Vlastnosti delta-matroidů

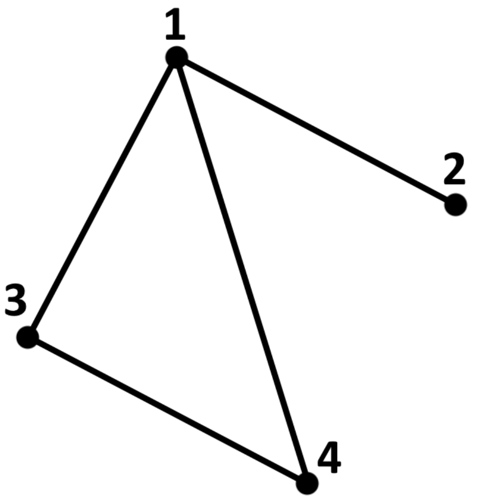
Obhajoba bakalářské práce

LUCIEN ŠÍMA

21. června 2019

Co mají společného?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



0000
1100
1010
1001
0011
1111

$$\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Motivace a cíl práce

- **Motivace:**
- Lineární algebra, kombinatorika, teoretická informatika
- Hranové CSP

- **Cíl práce:**
- Výzkum delta-matroidů
- Poznání tříd delta-matroidů a vztahy mezi nimi

Delta-matroidy

- Konečná *nosná množina* **X**
- Systém **F** podmnožin **X** (*přípustné množiny*) splňující *axiom o výměně*

$$(\forall F, F' \in \mathcal{F})(\forall x \in F \Delta F')(\exists y \in F \Delta F') : F \Delta \{x, y\} \in \mathcal{F}$$

Delta-matroidy

- Konečná *nosná množina* **X**
- Systém **F** podmnožin **X** (*přípustné množiny*) splňující *axiom o výměně*

$$(\forall F, F' \in \mathcal{F})(\forall x \in F \Delta F')(\exists y \in F \Delta F') : F \Delta \{x, y\} \in \mathcal{F}$$

- Příklad:

$$V = \{1, 2, 3\}$$
$$\mathcal{F} = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$F = \{\emptyset\}, F' = \{1, 2, 3\}, F \Delta F' = \{1, 2, 3\}$$
$$x = 2, y = 3 \quad \rightarrow \quad F \Delta \{x, y\} = \{\emptyset\} \Delta \{2, 3\} = \{2, 3\} \in \mathcal{F}$$

Lineární delta-matroidy

- Reprezentované antisymetrickou maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární delta-matroidy

- Reprezentované antisymetrickou maticí

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad V = \{1, 2, 3, 4\}$$

- Nosná množina – množina řádků/sloupců

Lineární delta-matroidy

- Reprezentované antisymetrickou maticí

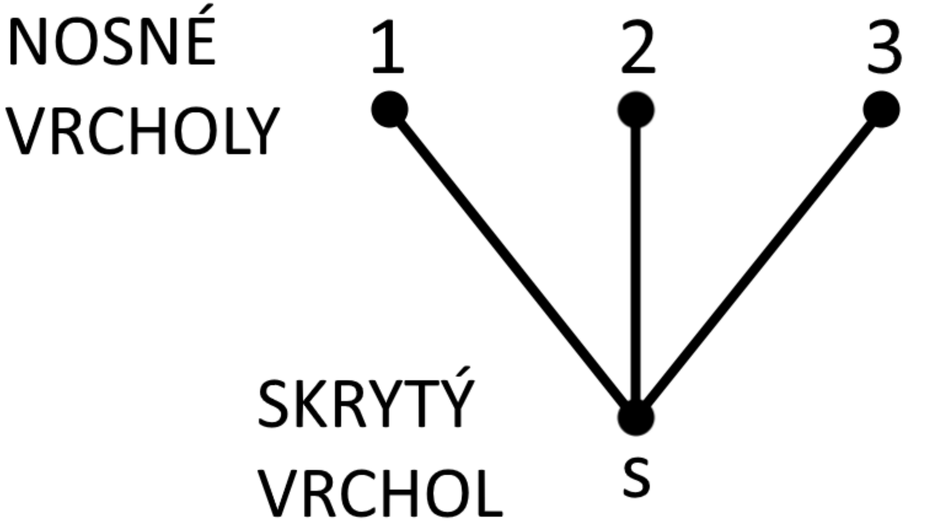
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$$

- Nosná množina – množina řádků/sloupců
- Přípustné množiny odpovídají regulárním podmaticím

Grafové delta-matroidy

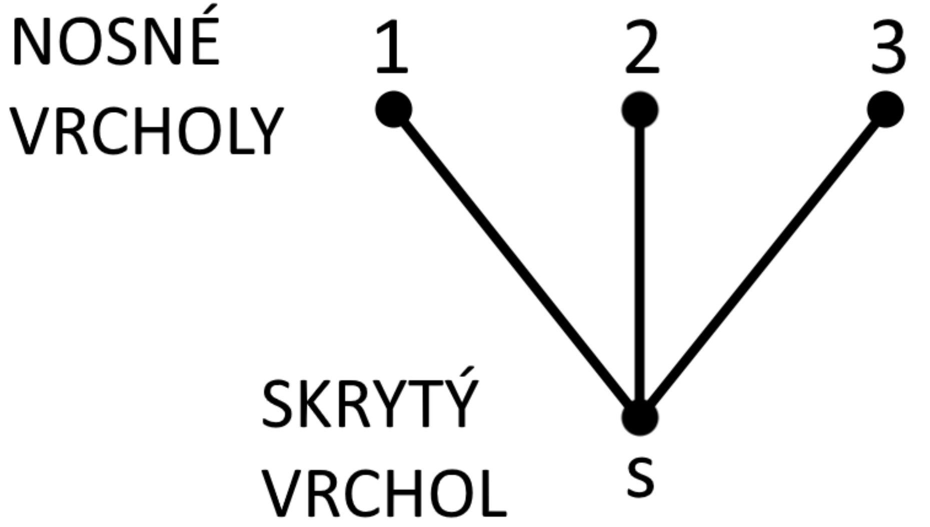
- Reprezentované grafem
  a podmnožinou *nosných vrcholů*
- Zbylé vrcholy se nazývají *skryté*.



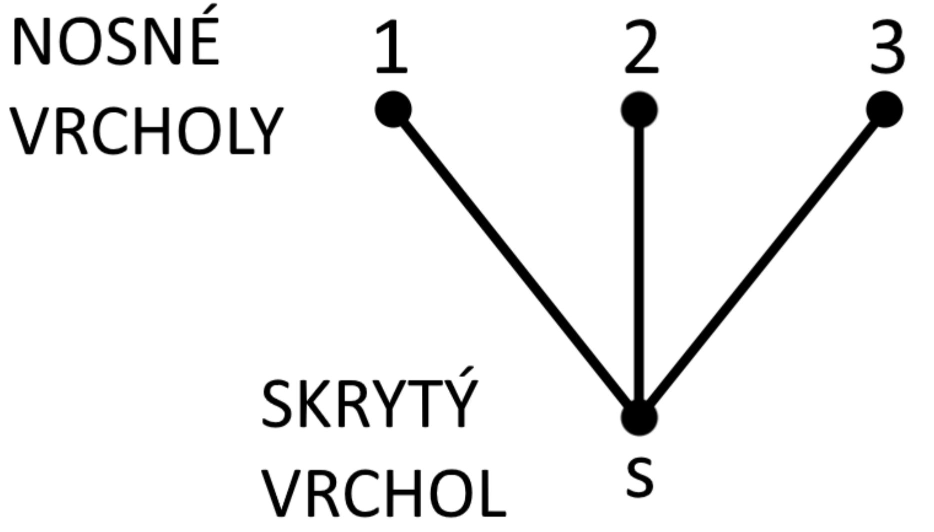
Grafové delta-matroidy

- Reprezentované grafem
  a podmnožinou *nosných vrcholů*
- Zbylé vrcholy se nazývají *skryté*.

- Nosná množina – nosné vrcholy



Grafové delta-matroidy

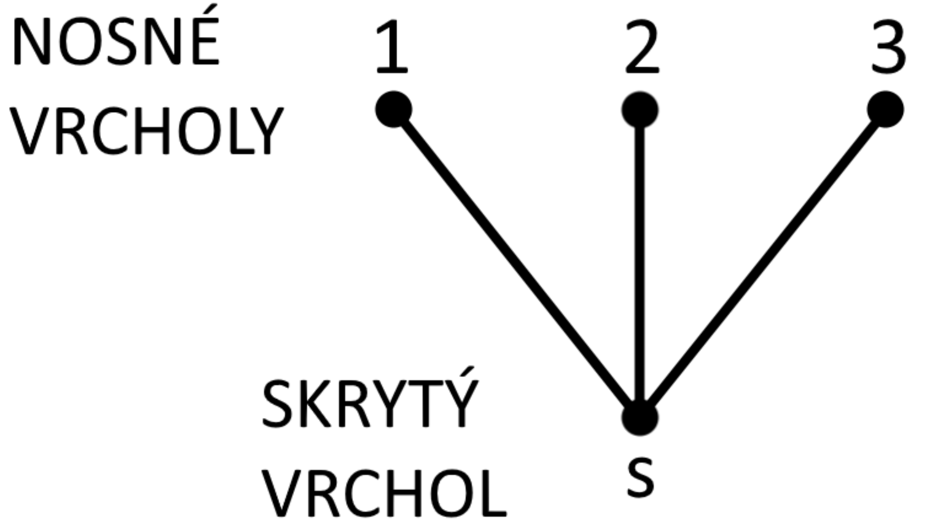


- Reprezentované grafem

  a podmnožinou *nosných vrcholů*
- Zbylé vrcholy se nazývají *skryté*.

- Nosná množina – nosné vrcholy
- Podmnožina je přípustná, pokud podgraf indukovaný danou podmnožinou a skrytými vrcholy má perfektní párování

Grafové delta-matroidy



- Reprezentované grafem
  a podmnožinou *nosných vrcholů*
- Zbylé vrcholy se nazývají *skryté*.

- Nosná množina – nosné vrcholy
- Podmnožina je přípustná, pokud podgraf indukovaný danou podmnožinou a skrytými vrcholy má perfektní párování

- Delta-matroid je *čistě grafový*, pokud jej lze reprezentovat grafem bez skrytých vrcholů

Sudé delta-matroidy

- Delta-matroid je *sudý*, pokud všechny jeho přípustné množiny mají stejnou paritu.

Výsledky

- Lineární a grafové delta-matroidy jsou sudé

Výsledky

- Lineární a grafové delta-matroidy jsou sudé
- Existuje sudý delta-matroid, který není grafový [Kazda, Rolínek, Kolmogorov, 2019]

$$
\begin{array}{llll}
\{\} & \{1,4\} & \{1,2,3,4\} & \{1,2,3,4,5,6\} \\
 & \{1,5\} & \{1,2,3,5\} & \\
 & \{2,3\} & \{1,2,4,6\} & \\
 & \{2,6\} & \{1,2,5,6\} & \\
 & \{3,4\} & \{1,3,4,6\} & \\
 & \{3,5\} & \{1,3,5,6\} & \\
 & \{3,6\} & \{1,4,5,6\} & \\
 & \{4,6\} & \{2,3,5,6\} & \\
 & & \{3,4,5,6\} &
\end{array}
$$

Výsledky

- Lineární a grafové delta-matroidy jsou sudé
- Existuje sudý delta-matroid, který není grafový [Kazda, Rolínek, Kolmogorov, 2019]

$$\begin{array}{llll} \{\} & \{1,4\} & \{1,2,3,4\} & \{1,2,3,4,5,6\} \\ & \{1,5\} & \{1,2,3,5\} & \\ & \{2,3\} & \{1,2,4,6\} & \\ & \{2,6\} & \{1,2,5,6\} & \\ & \{3,4\} & \{1,3,4,6\} & \\ & \{3,5\} & \{1,3,5,6\} & \\ & \{3,6\} & \{1,4,5,6\} & \\ & \{4,6\} & \{2,3,5,6\} & \\ & & \{3,4,5,6\} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Existuje lineární delta-matroid, který není grafový

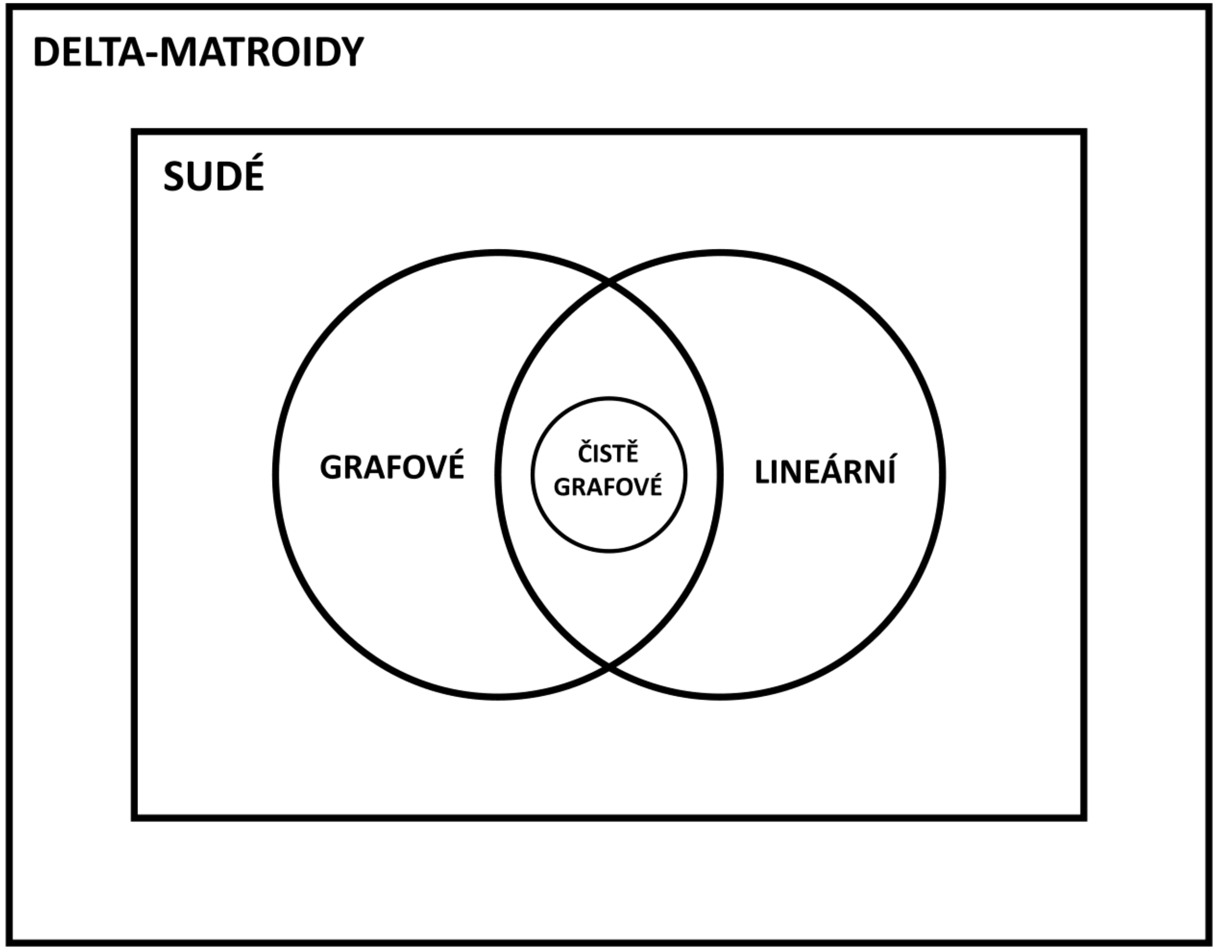
Výsledky

- Čistě grafové delta-matroidy jsou lineární

Výsledky

- Čistě grafové delta-matroidy jsou lineární
- Grafové delta-matroidy arity nejvýše 5 jsou lineární

Závěr



Děkuji za pozornost!