Jiří Rohn

Lineární algebra a optimalizace

KAROLINUM

UČEBNÍ TEXTY UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Lineární algebra a optimalizace

Jiří Rohn
Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

19. června 2004

Věnuji svým dětem

Zuzaně, Martinovi a Julii

Obsah

Předmluva

Tento učební text je určen k přednáškám „Lineární algebra I” (v zimním semestru) a „Lineární algebra II a optimalizace” (v letním semestru) 1. ročníku bakalářského studia informatiky na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Kromě látky předepsané syllabem obsahuje řadu nadstavbových částí, které se vztahují k látce probírané ve vyšších ročnících: jde zejména o pseudoinverzní matice a metodu nejmenších čtverců v kapitole 1, ortogonální matice a SVD rozklad v kapitole 5, hlubší vlastnosti vlastních čísel v kapitole 7, dualitu a teorii her v kapitole 8. Oproti jiným textům o lineární algebře, které jsou k dispozici na MFF UK, akcentuje tento učební text maticový přístup a algoritmickou stránku problematiky s ohledem na aplikace, např. v počítačové grafice.

K dosažení co největší srozumitelnosti je text členěn do malých celků (subsekcí), většinou kratších než jedna strana a se samostatnými názvy, které co nejvýstižněji charakterizují jejich obsah. Text je opatřen řadou poznámek, majících za cíl podat bližší vysvětlení resp. upozornit na souvislosti, klíčová nebo obtížná místa, která čtenář, setkávající se poprvé s matematickým textem tohoto typu, může snadno přehlédnout. Často je poznámka vložena mezi znění věty a důkaz, aby tak čtenář mohl lépe pochopit smysl věty ještě před studiem jejího důkazu. Důkazy vět jsou provedeny podrobně s ohledem na posluchače 1. ročníku a na případnou možnost samostudia (kombinované studium). Popis algoritmů není vázán na znalost žádného konkrétního programovacího jazyka, předpokládá pouze elementární znalost programování (cykly a podmínky). Celý text jsem psal sám v LaTeXu a jsem proto odpovědný za veškeré případné chyby, včetně typografických. Budu vděčný za jakékoliv připomínky k obsahu i formě textu.

Závěrem bych chtěl vyjádřit poděkování všem studentům matematicko-fyzikální fakulty UK, které jsem učil v letech 2001-2004 lineární algebru a lineární programování, za jejich zájem a pozitivní přístup, které mě přiměly k sepsání tohoto textu.

Praha, červen 2004

Jiří Rohn
(rohn@cs.cas.cz)

Kapitola 1

Matice a soustavy rovnic

1.1 Úvod

Přečtěte si laskavě nejprve předmluvu, ve které je vysvětlen specifický styl tohoto textu.

Základními pojmy lineární algebry jsou matice a vektorové prostory. Tato kapitola je věnována maticím a jejich aplikacím na řešení soustav lineárních rovnic.

1.2 Základní maticové operace

1.2.1 Definice matice

Značení. Množinu reálných čísel značíme $\mathbb{R}$, komplexních $\mathbb{C}$.

Definice. Obdélníkové schéma sestavené z reálných čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme (reálnou) maticí typu $m \times n$. Prvek a_{ij} se nazývá ij-tý koeficient matice A. Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m\times n}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu n. Podobně definujeme množinu komplexních matic typu $m \times n$ a značíme ji $\mathbb{C}^{m\times n}$.

1.2.2 Poznámky

- matice je matematickou formalizací tabulky,
- vždy předpokládáme $m \geq 1$, $n \geq 1$, tj. neuvažujeme prázdné matice,
- matice značíme velkými latinskými písmeny,
- v protikladu k maticím se čísla z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ nazývají skaláry a obvykle je značíme malými řeckými písmeny,
- koeficienty matice A značíme a_{ij} nebo A_{ij},
- v dalším se budeme většinou zabývat reálnými maticemi,
- pojem matice zavedl anglický matematik J. J. Sylvester r. 1850.

1.2.3 Rovnost matic

Definice. Matice A, B se rovnají, což zapisujeme $A = B$, jestliže jsou stejného typu $m \times n$ a platí

$$A_{ij} = B_{ij}$$

pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Poznámka. $A \neq B$ tedy znamená, že buďto matice jsou různých typů, nebo jsou stejného typu a platí $A_{ij} \neq B_{ij}$ pro jisté[1] i, j.

1.2.4 Sečítání matic

Definice. Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$. Potom jejich součtem $A + B$ nazýváme matici typu $m \times n$ s koeficienty

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Poznámka. Jsou-li A, B různých typů, potom součet $A + B$ není definován.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.2.5 Násobení matice skalárem

Definice. Nechť A je matice typu $m \times n$, α skalár. Potom $\alpha \cdot A$ je matice typu $m \times n$ s koeficienty

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Příklad.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Upozornění. Nikdy nepíšeme $A \cdot \alpha$.

1.2.6 Poznámky

- podobně jako u násobení reálných čísel tečku většinou vynecháváme a píšeme αA místo $\alpha \cdot A$,
- definujeme nulovou matici typu $m \times n$ jako

$$0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

- místo 0_{mn} píšeme pouze 0, je-li typ z kontextu zřejmý,
- ve výrazu typu $0 \cdot 0$ je vlevo skalár, vpravo nulová matice.

[1] Slovem „jisté" opisujeme existenční kvantifikátory; myslíme tím tedy „existují indexy i, j, pro které $A_{ij} \neq B_{ij}$".

1.2.7 Vlastnosti sečítání matic a násobení matice skalárem

Věta 1. *Nechť A, B, C jsou matice typu $m \times n$ a α, β skaláry. Potom platí:*

1) $A + B = B + A$ *(komutativnost),*
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asociativnost),*
3) $A + 0 = A$ *(existence nulového prvku),*
4) $A + (-1) \cdot A = 0$ *(existence opačného prvku),*
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
6) $1 \cdot A = A$,
7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivnost),*
8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivnost).*

Poznámka. Znění matematických vět je zvykem psát *kurzívou.*

Důkaz. Ve všech osmi případech se jedná o rovnost matic, musíme proto podle definice rovnosti dokázat, že pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ se ij-tý koeficient matice na levé straně rovná ij-tému koeficientu matice na pravé straně.

1) Pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ je $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ podle definice součtu matic; $A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$ podle komutativnosti součtu reálných (komplexních) čísel; nakonec $B_{ij} + A_{ij} = (B+A)_{ij}$ podle definice součtu matic. Spojením všech tří rovností dostáváme $(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$ pro každé i, j, tedy $A+B = B+A$ podle definice rovnosti matic. V dalším vypisujeme vždy celý řetězec rovností aniž bychom zdůvodňovali jednotlivé kroky, čtenář má však mít na mysli, že stále postupujeme podle stejného schématu.

2) Pro každé i, j (míníme tím ovšem $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) je $((A + B) + C)_{ij} = (A + B)_{ij} + C_{ij} = (A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) = A_{ij} + (B + C)_{ij} = (A + (B + C))_{ij}$, tedy $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3) Pro každé i, j je $(A + 0)_{ij} = A_{ij} + 0_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}$, takže $A + 0 = A$.

4) Pro každé i, j je $(A + (-1) \cdot A)_{ij} = A_{ij} + ((-1) \cdot A)_{ij} = A_{ij} + (-1) \cdot A_{ij} = 0 = 0_{ij}$, což dává $A + (-1) \cdot A = 0$.

5) Pro každé i, j je $(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha(\beta A_{ij}) = (\alpha\beta)A_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$, což znamená, že $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

6) Pro každé i, j je $(1 \cdot A)_{ij} = 1 \cdot A_{ij} = A_{ij}$, čímž dostáváme $1 \cdot A = A$.

7) Pro každé i, j je $(\alpha(A+B))_{ij} = \alpha(A+B)_{ij} = \alpha(A_{ij}+B_{ij}) = \alpha A_{ij}+\alpha B_{ij} = (\alpha A)_{ij}+(\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}$, což dokazuje, že $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

8) Nakonec, pro každé i, j je $((\alpha + \beta)A)_{ij} = (\alpha + \beta)A_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$, z čehož plyne poslední rovnost $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$. □

Poznámka. Čtvereček „□” označuje konec důkazu.

1.2.8 Násobení matic

Definice. Je-li A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$, potom $A \cdot B$ je matice typu $m \times n$ definovaná předpisem

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Poznámka. Nemůže-li dojít k nedorozumění, píšeme AB místo $A \cdot B$.

Upozornění. Maticovému součinu vzhledem k jeho důležitosti je třeba věnovat zvláštní pozornost. Budeme se s ním setkávat až do konce tohoto textu.

1.2.9 Poznámky k maticovému součinu

- k proveditelnosti výrazu
$$\sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$
je třeba, aby počet sloupců matice A se rovnal počtu řádků matice B; z toho plyne předpoklad, že A je typu $m \times p$, B typu $p \times n$,
- je-li A typu $m \times p$, B typu $r \times n$, kde $p \neq r$, potom součin $A \cdot B$ není definován,
- příklady:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ není definován.}$$

1.2.10 Jednotková matice

Čtvercová matice řádu n
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
(s jedničkami na diagonále a nulami mimo ni) se nazývá jednotková matice. Je-li řád zřejmý z kontextu, píšeme místo I_n pouze I.

Poznámka. Jak uvidíme, hraje jednotková matice u maticového součinu podobnou roli jako číslo 1 u reálných čísel (věta 2, tvrzení 5)).

1.2.11 Vlastnosti součinu matic

Věta 2. *Nechť A, B, C jsou matice, α skalár. Potom:*

1) *Jestliže součin $(AB)C$ je definován, potom i součin $A(BC)$ je definován a platí $(AB)C = A(BC)$,*
2) *jestliže $A(B + C)$ je definován, potom i $AB + AC$ je definován a platí $A(B + C) = AB + AC$,*
3) *jestliže $(A + B)C$ je definován, potom i $AC + BC$ je definován a platí $(A + B)C = AC + BC$,*
4) *je-li AB definován, je $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,*
5) *je-li A typu $m \times n$, potom $I_m A = A I_n = A$.*

Důkaz. 1) Jestliže součin $(AB)C$ je definován, potom A je typu $m \times p$, B typu $p \times r$ a C typu $r \times n$ pro jistá m, p, r, n. Potom součin BC je definován a je typu $p \times n$, takže $A(BC)$ je definován a je typu $m \times n$ stejně jako $(AB)C$. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ potom platí $((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\sum_{k=1}^{r} B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}(BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}$, takže $(AB)C = A(BC)$.

2) Jestliže $A(B+C)$ je definován, potom A je typu $m \times p$ a $B + C$ typu $p \times n$ pro jistá m, p, n, z čehož plyne, že B i C jsou typu $p \times n$, takže součiny AB i AC jsou definované a jsou oba typu $m \times n$ stejně tak jako matice $A(B+C)$. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ je potom $(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{p} A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij}$, takže $A(B+C) = AB + AC$.

3) Rozborem typů bychom dokázali tak jako v části 2) že je-li $(A+B)C$ definován, je i $AC+BC$ definován a je stejného typu. Je-li p počet sloupců matice A, potom pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A+B)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(A_{ik}+B_{ik})C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}C_{kj} + \sum_{k=1}^{p} B_{ik}C_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}$, takže $(A+B)C = AC + BC$.

4) Je-li součin AB definován, potom A je typu $m \times p$ a B typu $p \times n$ pro jistá m, p, n. Potom αA je stejného typu jako A a αB stejného typu jako B, takže součiny $(\alpha A)B$ i $A(\alpha B)$ jsou definované a příslušná matice je typu $m \times n$ tak jako AB. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ potom dostáváme $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha A)_{ik}B_{kj} = ((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(\alpha B)_{kj} = (A(\alpha B))_{ij}$, což dokazuje, že $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ je $(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(I_m)_{ik}A_{kj} = \sum_{k\neq i} 0 \cdot A_{kj} + 1 \cdot A_{ij} = A_{ij}$, takže $I_m A = A$. Podobně $(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(I_n)_{kj} = \sum_{k\neq j} A_{ik} \cdot 0 + A_{ij} \cdot 1 = A_{ij}$, tedy $AI_n = A$. □

1.2.12 Nekomutativnost součinu matic

Násobení matic není komutativní, tj. obecně *neplatí* $AB = BA$. Jsou k tomu tyto důvody:

- je-li A typu $m \times p$ a B typu $p \times n$, kde $m \neq n$, potom součin AB je definován, kdežto BA není definován,
- je-li $m = n$, potom AB je čtvercová matice řádu m a BA je čtvercová řádu p, takže $AB \neq BA$ je-li $m \neq p$,
- je-li $m = p = n$, potom AB i BA jsou čtvercové matice řádu m, ale může být $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+fc & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

  takže stačí volit $bg \neq fc$ aby součiny byly různé.

Uvádí se, že nejčastější chybou při maticových výpočtech je nerespektování nekomutativnosti maticového součinu. Např. pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

nikoliv „... $= A^2 + 2AB + B^2$", jak by napovídala analogie s reálnými čísly.

1.2.13 Transponovaná matice

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definujeme transponovanou matici $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ předpisem

$$(A^T)_{ji} = A_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n).$$

Poznámka. Slovně, i-tý řádek matice A se stává i-tým sloupcem matice A^T $(i = 1, \ldots, m)$ a j-tý sloupec matice A se stává j-tým řádkem matice A^T $(j = 1, \ldots, n)$.

Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.2.14 Vlastnosti transpozice

Věta 3. *Platí:*

1) $(A^T)^T = A$,
2) jsou-li A, B stejného typu, je $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) je-li AB definován, je i $B^T A^T$ definován a platí $(AB)^T = B^T A^T$.

Poznámka. 4) je důležitá a často používaná vlastnost.

Důkaz. 1) Je-li A typu $m \times n$, potom A^T je typu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět typu $m \times n$. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ potom platí $((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}$, takže $(A^T)^T = A$.

2) Jsou-li A, B stejného typu $m \times n$, potom A^T, B^T jsou stejného typu $n \times m$, takže součet $A^T + B^T$ je definován a je stejného typu jako $(A + B)^T$ a pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ je $((A+B)^T)_{ji} = (A+B)_{ij} = A_{ij}+B_{ij} = (A^T)_{ji}+(B^T)_{ji} = (A^T+B^T)_{ji}$, takže $(A+B)^T = A^T+B^T$.

3) Je-li A typu $m \times n$, potom $(\alpha A)^T$ i αA^T jsou typu $n \times m$ a pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $((\alpha A)^T)_{ji} = (\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij} = \alpha (A^T)_{ji} = (\alpha A^T)_{ji}$, což dokazuje, že $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

4) Je-li součin AB definován, potom A je typu $m \times p$ a B je typu $p \times n$ pro jistá m, p, n. Potom B^T je typu $n \times p$ a A^T je typu $p \times m$, takže součin $B^T A^T$ je definován a je typu $n \times m$ stejně tak jako $(AB)^T$. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ dostáváme potom $((AB)^T)_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{jk} (A^T)_{ki} = (B^T A^T)_{ji}$, čímž je dokázáno, že $(AB)^T = B^T A^T$. □

1.2.15 Symetrická matice

Definice. Matice A se nazývá symetrická, jestliže[2] $A^T = A$.

Poznámky. Symetrická matice je nutně čtvercová. Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $A + B$ i αA jsou symetrické (AB obecně ne).

Věta 4. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je $A^T A$ symetrická.*

[2] Definice má *vždy* charakter ekvivalence. Konvencí (tj. všeobecnou dohodou) je však zvykem psát ji ve tvaru implikace (v našem případě použitím „jestliže” místo „právě když”) s tím, že se jí rozumí ekvivalence. Použití „právě když” v definici je známkou nepochopení této konvence.

Důkaz. Podle tvrzení 4) a 1) věty 3 platí $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$, takže matice A^TA se transpozicí nemění a je tedy symetrická. □

1.2.16 Vektory

Definice. Matici typu $n \times 1$ nazýváme n-rozměrným (aritmetickým, sloupcovým) vektorem a značíme ho

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\text{místo } \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix})$$

resp. $x = (x_i)$. Koeficienty x_i se nazývají složky (souřadnice) vektoru x. Množinu všech reálných (resp. komplexních) n-rozměrných vektorů značíme $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Shrnutí značení. Vektory značíme malými latinskými písmeny, matice velkými latinskými, skaláry malými řeckými.

1.2.17 Operace s vektory

- protože vektory jsou speciálním případem matic, vztahují se na ně dříve definované operace: pro $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ je $x + y = (x_i + y_i)$, $\alpha x = (\alpha x_i)$,
- násobení matic nelze jednoduše přenést, protože $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ a $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ lze násobit jen pro $n = 1$; lze však zavést *skalární součin*

$$x^Ty = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^n x_i y_i),$$

  což je matice 1×1, kterou ztotožňujeme s tímto číslem[3],
- pro $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_j) \in \mathbb{R}^n$ definujeme *vnější součin*

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{pmatrix},$$

- pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ definujeme

$$A_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

  (i-tý řádek A) a

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

  (j-tý sloupec A).

[3] Pro $x, y \in \mathbb{C}^n$ se skalární součin definuje jako $\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$, kde pruh značí komplexně sdružené číslo (bude probráno později).

1.2.18 Eukleidovská norma

Definice. Číslo

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

nazýváme eukleidovskou normou vektoru $x \in \mathbb{R}^m$.

Poznámky. Pro odlišení od jiných norem se eukleidovská norma někdy označuje $\|x\|_2$. Vlastnosti normy probereme později v obecnějším pojetí (kap. 3). Zatím budeme využívat pouze evidentního faktu, že $\|x\| \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ a $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$.

1.2.19 „Metamechanika" maticového součinu

Značení. Definujeme $e_j = I_{\bullet j} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (j-tý sloupec jednotkové matice)[4]. Potom je $A_{\bullet j} = Ae_j$ pro každé j a $A_{i\bullet} = e_i^T A$ pro každé i.

Věta 5. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x \in \mathbb{R}^p$ a $y \in \mathbb{R}^m$. Potom platí:*

1) $(AB)_{\bullet j} = A \cdot B_{\bullet j}$ *pro* $j = 1, \dots, n$,

2) $(AB)_{i\bullet} = A_{i\bullet} \cdot B$ *pro* $i = 1, \dots, m$,

3) $Ax = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j A_{\bullet j}$,

4) $y^T A = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_{i\bullet}$.

Poznámka. Jde o shrnutí vlastností často používaných v odvozeních a důkazech. Speciálně, tvrzení 1) říká, že k vypočtení j-tého sloupce součinu AB není nutno násobit obě matice, stačí matici A znásobit j-tým sloupcem matice B; analogicky tvrzení 2) pro řádky.

Důkaz. Nechť A je typu $m \times p$ a B typu $p \times n$. Potom:

1) Pro každé $j = 1, \dots, n$ je $(AB)_{\bullet j} = (AB)e_j = A(Be_j) = A \cdot B_{\bullet j}$.

2) Podobně pro každé $i = 1, \dots, m$ je $(AB)_{i\bullet} = e_i^T(AB) = (e_i^T A)B = A_{i\bullet} \cdot B$.

3) Každé $x \in \mathbb{R}^p$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, takže $Ax = A(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j Ae_j = \sum_{j=1}^{p} x_j A_{\bullet j}$.

4) Podobně pro každé $y \in \mathbb{R}^m$ je $y^T A = (\sum_{i=1}^{m} y_i e_i)^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i(e_i^T A) = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\bullet}$. □

1.3 Elementární operace a Gauss(-Jordan)ova eliminace

1.3.1 Maticový zápis soustavy rovnic

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Potom maticový zápis

$$Ax = b$$

[4] Povšimněte si, že sloupcový vektor e_j zde zapisujeme jako transponovaný řádkový vektor. Tohoto způsobu se často používá z typografických důvodů jednak pro úsporu místa, jednak pro lepší vzhled textu.

rozepsáním ve složkách znamená

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \quad & \vdots \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

je to tedy zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých.

1.3.2 Regularita

Definice. *Čtvercová* matice A se nazývá regulární, jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má jediné řešení $x = 0$ (tzv. triviální), a nazývá se singulární v opačném případě, tj. platí-li $Ax = 0$ pro jistý vektor $x \neq 0$.

Upozornění. $x \neq 0$ znamená, že $x_i \neq 0$ pro jisté i, nikoliv pro všechna i.

Věta 6. *Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $q \geq 1$, potom $A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_q$ je regulární.*

Poznámka. Důkaz této věty je klasickou ukázkou matematické indukce v její krystalicky čisté podobě. Důkaz indukcí je založen na axiomu aritmetiky přirozených čísel, který říká, že *je-li M podmnožina množiny přirozených čísel N taková, že 1) $1 \in M$ a 2) pro každé $q - 1 \in M$ [tzv. indukční předpoklad] je i $q \in M$, potom $M = N$.* Důkaz indukcí musí vždy obsahovat kroky 1) a 2). Množina M se většinou explicitně nevypisuje a je zřejmá z kontextu. V našem případě je $M = \{q \in N\,;\ \text{tvrzení věty platí pro } q\}$.

Důkaz. Důkaz se provádí matematickou indukcí podle q. 1) Je-li $q = 1$, je matice A_1 regulární podle předpokladu. 2) Nechť tedy tvrzení platí pro jisté $q - 1 \geq 1$ a nechť $A_1, \ldots, A_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou regulární matice. Uvažujme soustavu

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1}A_q)x = 0, \tag{1.1}$$

kterou vzhledem k asociativnosti maticového součinu můžeme psát ve tvaru

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1})A_qx = 0. \tag{1.2}$$

Podle indukčního předpokladu je matice $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1}$ regulární, takže z rovnosti (1.2) plyne $A_qx = 0$ a regularita matice A_q dává $x = 0$. Tedy soustava (1.1) má jediné řešení $x = 0$, takže matice $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1}A_q$ je regulární, čímž je indukční krok proveden. $\square$

1.3.3 Elementární operace

Definice. Následující tři operace nazýváme elementárními operacemi s maticí A:

1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ (tj. $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$),
2. vynásobení i-tého řádku číslem α a přičtení k j-tému řádku, $j \neq i$ (tj. $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$),
3. výměna i-tého a j-tého řádku, $i \neq j$ (značíme $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$).

Poznámka. Podmínky „$\alpha \neq 0$” u operace 1 a „$j \neq i$” u operace 2 jsou nezbytné, jinak by bylo možno kterýkoliv řádek kdykoliv vynulovat a operace by ztratily smysl (z regulární matice by se stala singulární apod.).

1.3.4 Třetí elementární operaci lze složit z prvních dvou

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{2.} \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} + A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{2.} \begin{pmatrix} \vdots \\ -A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} + A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{2.} \begin{pmatrix} \vdots \\ -A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{1.} \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Poznámka. Teoreticky bychom tedy vystačili jen s prvními dvěma operacemi, to by však zbytečně komplikovalo další text, proto budeme v dalším výměnu řádků považovat za plnoprávnou samostatnou operaci.

1.3.5 Maticová reprezentace elementárních operací

Věta 7. *Pro matici $\widetilde{A}$ vzniklou z matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ provedením*

1) *elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + (\alpha - 1)e_i e_i^T)A$,*
2) *elementární operace $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + \alpha e_j e_i^T)A$,*
3) *elementární operace $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T)A$,*

ve všech třech případech je tedy $\widetilde{A}$ tvaru[5]

$$\widetilde{A} = (I + bc^T)A$$

pro jisté $b, c \in \mathbb{R}^m$, přičemž matice $I + bc^T$ je regulární.

Důkaz. 1) Matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ má tvar

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \alpha A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + (\alpha - 1) \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} = A + (\alpha - 1)e_i A_{i\bullet} \\ &= A + (\alpha - 1)e_i e_i^T A = (I + (\alpha - 1)e_i e_i^T)A. \end{aligned}$$

2) Matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ má tvar

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} = A + \alpha e_j A_{i\bullet} \\ &= A + \alpha e_j e_i^T A = (I + \alpha e_j e_i^T)A. \end{aligned}$$

[5] bc^T je vnější součin, viz 1.2.17.

3) Nakonec matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ je tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{j\bullet} - A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} - A_{j\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} \\
&= A + e_i(A_{j\bullet} - A_{i\bullet}) + e_j(A_{i\bullet} - A_{j\bullet}) = A + (e_i - e_j)(A_{j\bullet} - A_{i\bullet}) \\
&= A + (e_i - e_j)(e_j^T A - e_i^T A) = A + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T A \\
&= (I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T)A.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že ve všech případech je $\tilde{A}$ tvaru $\tilde{A} = (I + bc^T)A$, kde b, c jsou jisté vektory z $\mathbb{R}^m$. Pro důkaz zbývající části dokážeme nejprve, že je-li matice tvaru $I + bc^T$ singulární, potom $c^T b = -1$. Nechť tedy existuje vektor $x \neq 0$ takový, že

$$(I + bc^T)x = 0,$$

potom roznásobením

$$x = -(c^T x)b \tag{1.3}$$

a přenásobením rovnosti (1.3) vektorem c^T docházíme k

$$c^T x = -(c^T x)c^T b.$$

Kdyby bylo $c^T x = 0$, potom by z (1.3) plynulo $x = 0$ ve sporu s předpokladem $x \neq 0$. Tedy $c^T x \neq 0$ a vydělením dostáváme

$$c^T b = -1.$$

Dokázali jsme tedy, že singularita matice $I + bc^T$ implikuje $c^T b = -1$. Obrácením této implikace[6] dostáváme, že je-li $c^T b \neq -1$, je $I + bc^T$ regulární. Tento výsledek nyní aplikujeme na matice vyskytující se v tvrzeních 1)-3).

1) Pro matici $I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$ platí $c^T b = e_i^T((\alpha - 1)e_i) = \alpha - 1 \neq -1$ (neboť $\alpha \neq 0$ podle definice první elementární operace), takže matice $I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$ je regulární.

2) Pro matici $I + \alpha e_j e_i^T$ platí $c^T b = e_i^T(\alpha e_j) = \alpha e_i^T e_j = 0 \neq -1$ jelikož $e_i^T e_j = 0$ vzhledem k $i \neq j$ (podle definice druhé elementární operace), takže matice $I + \alpha e_j e_i^T$ je regulární.

3) Nakonec pro matici $I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$ je $c^T b = 2e_j^T e_i - e_j^T e_j - e_i^T e_i = -2 \neq -1$ (neboť $i \neq j$ podle definice třetí elementární operace a tedy $e_j^T e_i = 0$), takže matice $I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$ je opět regulární. □

1.3.6 Maticová reprezentace posloupnosti elementárních operací

Věta 8. *Matice $\widetilde{A}$ vzniklá z matice A provedením konečné posloupnosti elementárních operací je tvaru*

$$\widetilde{A} = QA,$$

[6] Obrácení implikace je založeno na formuli výrokové logiky $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

kde Q je jistá čtvercová regulární matice.

Důkaz. Provedením jedné elementární operace s maticí A dostáváme podle věty 7 matici $(I + b_1c_1^T)A$ pro jisté vektory $b_1, c_1 \in \mathbb{R}^m$, provedení další elementární operace dává matici $(I + b_2c_2^T)(I + b_1c_1^T)A$ a pokračováním tohoto postupu zjistíme, že matice $\tilde{A}$ vzniklá provedením q elementárních operací je tvaru

$$\tilde{A} = (I + b_qc_q^T) \cdot \ldots \cdot (I + b_1c_1^T)A,$$

tedy

$$\tilde{A} = QA,$$

kde matice

$$Q = (I + b_qc_q^T) \cdot \ldots \cdot (I + b_1c_1^T)$$

je součinem matic, které jsou podle věty 7 vesměs regulární, a je tedy rovněž regulární (věta 6). (Jak vidíme, jde o neformálně provedený důkaz indukcí podle q.) □

1.3.7 Elementární operace zachovávají množinu řešení

Věta 9. *Jestliže matice $(A\ \ b)$ vznikne z matice $(\widehat{A}\ \ \widehat{b})$ provedením konečné posloupnosti elementárních operací, potom soustavy*

$$\widehat{A}x = \widehat{b}$$

a

$$Ax = b$$

mají stejnou množinu řešení.

Důkaz. Důkaz je snadný a přenechává se čtenáři za cvičení. Provádí se indukcí podle počtu elementárních operací. □

Definice. Matice $(\widehat{A}\ \ \widehat{b})$, která vznikne přidáním sloupce pravých stran $\widehat{b}$ k matici $\widehat{A}$, se nazývá rozšířená matice soustavy $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

Poznámka. Původní soustavu zde značíme $\widehat{A}x = \widehat{b}$, abychom značení $Ax = b$ rezervovali pro soustavy vznikající v průběhu algoritmu.

1.3.8 Myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic

Převedeme-li soustavu

$$\widehat{A}x = \widehat{b}$$

se čtvercovou maticí $\widehat{A}$ s použitím elementárních operací do tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_n \end{array}$$

(s nulovými prvky pod diagonálou a jednotkovými na diagonále), potom řešení můžeme přímo vypočítat tzv. *zpětnou substitucí*

$$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j \qquad (k = n, n-1, \ldots, 1)$$

při použití konvence $\sum_{\emptyset} = 0$ (díky které vzorec platí i pro $k = n$).

1.3.9 Gaussova eliminace

Nulování prvků pod diagonálou provádíme Gaussovou eliminací (Gauss 1810)[7]:

0. Dána: soustava $\widehat{A}x = \widehat{b}$ se čtvercovou maticí $\widehat{A}$. Sestav rozšířenou matici soustavy $A := (\widehat{A}\ \widehat{b})$ a polož $k := 1$.
1. Je-li $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$, ukonči: $\widehat{A}$ je singulární.
2. Jinak nalezni $a_{ik} \neq 0$, $i \geq k$, a vyměň řádky $A_{i\bullet}$ a $A_{k\bullet}$.
3. $A_{k\bullet} := \frac{1}{a_{kk}} A_{k\bullet}$.
4. Pro každé $i > k$ polož $\alpha := a_{ik}$ a $A_{i\bullet} := A_{i\bullet} - \alpha A_{k\bullet}$.
5. Polož $k := k + 1$. Je-li $k \leq n$, jdi na krok 1, jinak na krok 6.
6. Polož $x_k := a_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j$ $(k = n, n-1, \ldots, 1)$ a ukonči: $x = (x_k)$ je jediným řešením soustavy $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

1.3.10 Tvar matice v běžném kroku (na počátku kroku 1)

$$\begin{pmatrix}
1 & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 1 & a_{k-1,k} & \ldots & a_{k-1,n} & a_{k-1,n+1} \\
0 & \ldots & 0 & a_{kk} & \ldots & a_{kn} & a_{k,n+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{ik} & \ldots & a_{in} & a_{i,n+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{nk} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{pmatrix}$$

1.3.11 Příklad

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 - 12x_3 &= 44 \\
3x_1 + 6x_2 - 8x_3 &= 32 \\
-2x_1 - x_2 \qquad &= -7
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

[7] Moderní věda přisuzuje autorství Gaussovi; metoda je však popsaná už ve staročínském traktátu „Matematika v devíti knihách” z r. 263 (první tištěné vydání r. 1084).

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -1,\ x_2 = 3,\ x_1 = 2.$$

1.3.12 Gauss-Jordanova eliminace

Na rozdíl od Gaussovy eliminace nuluje Gauss-Jordanova eliminace (Jordan 1888) i prvky nad diagonálou:

$\vdots$

4. Pro každé $i \neq k$ polož $\alpha := a_{ik}$ a $A_{i\bullet} := A_{i\bullet} - \alpha A_{k\bullet}$.

$\vdots$

6. Polož $x_k := a_{k,n+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$ a ukonči: $x = (x_k)$ je jediným řešením soustavy $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

(Ostatní kroky jako v Gaussově eliminaci.)

1.3.13 Tvar matice v běžném kroku (na počátku kroku 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_{k-1,k} & \ldots & a_{k-1,n} & a_{k-1,n+1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{kk} & \ldots & a_{kn} & a_{k,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{ik} & \ldots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nk} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

1.3.14 Zastavení algoritmu I

Věta 10. *Jestliže Gaussova nebo Gauss-Jordanova eliminace projde až do konce (tj. do kroku 6), potom $\widehat{A}$ je regulární a vypočtené řešení je jediným řešením soustavy $\widehat{A}x = \widehat{b}$.*

Důkaz. Jestliže Gaussova eliminace při řešení soustavy

$$\hat{A}x = \hat{b} \tag{1.4}$$

projde až do konce, potom výsledná soustava má tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_n \end{array} \tag{1.5}$$

a zpětnou substitucí zjistíme snadno, že tato soustava má jediné řešení

$$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j \qquad (k = n, n-1, \ldots, 1). \tag{1.6}$$

Protože podle věty 9 mají soustavy (1.4) a (1.5) stejnou množinu řešení, je řešení (1.6) rovněž jediným řešením soustavy (1.4).

Pro důkaz regularity předpokládejme, že bychom řešili soustavu

$$\hat{A}x = 0 \tag{1.7}$$

s použitím stejné posloupnosti elementárních operací, kterou jsme použili předtím k řešení soustavy $\hat{A}x = \hat{b}$. Protože všechny elementární operace se provádějí po řádcích, nemůže změna v posledním sloupci ovlivnit průběh eliminace v prvních n sloupcích, takže po provedení eliminace bychom dostali soustavu

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & 0, \end{array}$$

jejíž matice je identická s maticí soustavy (1.5) a má jediné řešení $x = 0$. Tím jsme dokázali, že soustava (1.7) má jediné řešení $x = 0$, a tedy že matice $\hat{A}$ je regulární.

Důkaz pro Gauss-Jordanovu eliminaci je ještě jednodušší, neboť v tom případě má soustava (1.5) tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad\qquad\qquad & = & b_1, \\ x_2 \qquad\quad & = & b_2, \\ \ddots \qquad & & \vdots \\ x_n & = & b_n, \end{array}$$

z něhož je ihned vidět, že má jediné řešení $x = b$ a že soustava $\hat{A}x = 0$ má jediné řešení $x = 0$. □

1.3.15 Zastavení algoritmu II

Věta 11. *Jestliže se Gaussova nebo Gauss-Jordanova eliminace zastaví v kroku 1, potom matice $\widehat{A}$ je singulární a soustava $\widehat{A}x = \widehat{b}$ buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz. Předpokládejme, že Gaussova eliminace se zastaví v kroku 1 pro jisté $k \geq 1$. To znamená, že soustava v okamžiku zastavení algoritmu má tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} \; + \; a_{1k}x_k \; + \; a_{1,k+1}x_{k+1} + \; \ldots \; + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\ x_{k-1} + a_{k-1,k}x_k + a_{k-1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k-1,n}x_n & = & b_{k-1}, \\ a_{k,k+1}x_{k+1} + \; \ldots \; + a_{kn}x_n & = & b_k, \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\ a_{n,k+1}x_{k+1} + \; \ldots \; + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

(jelikož $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$). Protože (jak víme z důkazu věty 10) tvar matice této soustavy nezávisí na pravé straně $\hat{b}$, dostali bychom při řešení soustavy

$$\hat{A}x = 0$$

při použití stejné posloupnosti elementárních operací soustavu

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} \;+\; a_{1k}x_k \;+\; a_{1,k+1}x_{k+1} + \;\ldots\; + a_{1n}x_n & = & 0, \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\ x_{k-1} + a_{k-1,k}x_k + a_{k-1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k-1,n}x_n & = & 0, \\ a_{k,k+1}x_{k+1} + \;\ldots\; + a_{kn}x_n & = & 0, \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\ a_{n,k+1}x_{k+1} + \;\ldots\; + a_{nn}x_n & = & 0. \end{array} \tag{1.8}$$

Položíme-li v ní $x_k = 1$ a $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, můžeme prvních $k-1$ složek vektoru x vypočítat přímo řešením soustavy

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} & = & -a_{1k}, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k-1} & = & -a_{k-1,k}, \end{array}$$

čímž dostáváme

$$x_i = -a_{ik} - \sum_{j=i+1}^{k-1} a_{ij}x_j \qquad (i = k-1, k-2, \ldots, 1),$$

což spolu s $x_k = 1$, $x_i = 0$ $(i = k+1, \ldots, n)$ dává explicitní řešení soustavy (1.8), které je nenulové (neboť $x_k = 1$) a je podle věty 9 řešením soustavy $\hat{A}x = 0$. Tedy $\hat{A}$ je singulární. Analogicky (a dokonce jednodušeji) dokážeme singularitu v případě Gauss-Jordanovy eliminace. K dokončení důkazu zbývá dokázat, že soustava $\hat{A}x = \hat{b}$ v tomto případě buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho. Nemá-li soustava $\hat{A}x = \hat{b}$ žádné řešení, jsme hotovi. Má-li řešení x', potom pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\hat{A}(x' + \alpha x) = \hat{A}x' + \alpha\hat{A}x = b + \alpha \cdot 0 = b$, takže $x' + \alpha x$ je řešení soustavy $\hat{A}x = \hat{b}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, přičemž $(x' + \alpha x)_k = x'_k + \alpha \cdot 1 = x'_k + \alpha$, takže k-tá složka řešení $x' + \alpha x$ může nabývat libovolných hodnot, tj. $\hat{A}x = \hat{b}$ má nekonečně mnoho řešení. □

1.3.16 Soustavy s regulární maticí

Věta 12. *Je-li $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, potom pro libovolnou pravou stranu $\widehat{b} \in \mathbb{R}^n$ má soustava*

$$\widehat{A}x = \widehat{b}$$

právě jedno řešení.

Důkaz. Je-li $\widehat{A}$ regulární, potom při libovolné pravé straně $\widehat{b}$ se Gaussova eliminace nemůže zastavit v kroku 1 (potom by $\widehat{A}$ byla singulární podle věty 11), tedy projde až do kroku 6 a soustava má podle věty 10 jediné řešení. □

1.4 Inverzní matice

1.4.1 Existence a jednoznačnost inverzní matice

Věta 13. *Ke každé regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje právě jedna matice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastností*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{1.9}$$

Naopak, existuje-li k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice A^{-1} s vlastností (1.9), potom A je regulární.

Definice. Matici A^{-1} s vlastností (1.9) nazýváme inverzní maticí k matici A.

Poznámka. Inverzní matici mají tedy právě regulární matice.

Důkaz. *1. Existence.* Protože matice A je regulární, má pro každé $j = 1, \ldots, n$ soustava $Ax = e_j$ jediné řešení x^j (věta 12). Nechť A^{-1} je matice o sloupcích $x^1, \ldots, x^n$. Potom pro každé j je $(AA^{-1})_{\bullet j} = A(A^{-1})_{\bullet j} = Ax^j = e_j = I_{\bullet j}$, takže $AA^{-1} = I$. Dále, $A(A^{-1}A - I) = (AA^{-1})A - A = A - A = 0$ a z regularity A plyne $A^{-1}A - I = 0$, tj. $A^{-1}A = I$. Dokázali jsme, že matice A^{-1} splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

2. Jednoznačnost. Nechť pro jistou matici X platí $AX = XA = I$. Potom je

$$X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

To znamená, že matice A^{-1} je vlastností (1.9) určena jednoznačně.

3. Existence inverze implikuje regularitu. Jestliže k A existuje matice A^{-1} s vlastností (1.9), potom z $Ax = 0$ plyne

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = 0,$$

takže matice A je regulární. □

Důsledek. *Je-li A regulární, je i A^T regulární.*

Důkaz. Je-li A regulární, potom má inverzní matici splňující (1.9). Z toho transpozicí dostáváme

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I,$$

což znamená, že matice A^T má inverzní matici $(A^{-1})^T$ a tedy je regulární. □

1.4.2 Jedna rovnost stačí

Inverzní matici k A jsme definovali jako matici X, která splňuje jak $AX = I$, tak $XA = I$. Ukazuje se však, že k jednoznačnému určení inverzní matice stačí jen jedna z obou rovností:

Věta 14. *Jestliže pro $A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí*

$$XA = I,$$

potom A je regulární a

$$X = A^{-1}.$$

Analogicky, jestliže $AX = I$, potom A je regulární a $X = A^{-1}$.

Důkaz. Jestliže pro matice $X, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $XA = I$, potom A je regulární, neboť z $Ax = 0$ plyne $x = Ix = (XA)x = X(Ax) = 0$. Tedy podle věty 13 má A inverzní matici A^{-1} a přenásobením rovnice $XA = I$ touto maticí zprava dostáváme

$$X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Podobně, je-li $AX = I$, potom $X^T A^T = I$ a matice A^T je podle předchozí části regulární a tedy podle důsledku věty 13 je i matice A regulární, takže má inverzní matici a platí

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}I = A^{-1}.$$ □

1.4.3 Případ $n = 2$

Věta 15. *Matice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je regulární právě když $ad \neq bc$. V tom případě je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolná a, b, c, d platí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I. \tag{1.10}$$

Je-li[8] $ad \neq bc$, potom podle věty 14 je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

takže A je regulární. Je-li $ad - bc = 0$, potom buď $A = 0$, v tom případě je A singulární, nebo $A \neq 0$, v tom případě (1.10) dává, že $Ax = 0$ pro jisté $x \neq 0$ (buď $x = (d, -c)^T$, nebo $x = (-b, a)^T$), takže A je opět singulární. Dokázali jsme, že $ad - bc = 0$ implikuje singularitu A. Obrácením této implikace dostáváme, že pro A regulární je $ad \neq bc$. V první části důkazu jsme dokázali opačnou implikaci, takže A je regulární právě když $ad \neq bc$. □

1.4.4 Výpočet inverzní matice

Věta 16. *Nechť matice $(A\ I)$ je Gauss-Jordanovou eliminací převedena na tvar $(I\ X)$. Potom $X = A^{-1}$. Jestliže Gauss-Jordanova eliminace není proveditelná až do konce, potom A je singulární a nemá inverzní matici.*

Důkaz. Nechť matice $(A\ I) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ je Gauss-Jordanovou eliminací převedena na tvar $(I\ X)$. Potom podle věty 8 platí $(I\ X) = Q(A\ I)$ pro jistou regulární matici Q. Odtud podle věty 5 dostáváme, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je

$$(I\ X)_{\bullet j} = I_{\bullet j} = (Q(A\ I))_{\bullet j} = Q(A\ I)_{\bullet j} = QA_{\bullet j} = (QA)_{\bullet j},$$

[8] Ekvivalence se téměř vždy dokazuje jako konjunkce dvou implikací na základě formule výrokové logiky $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

tedy $I = QA$ a podle věty 14 je $Q = A^{-1}$. Dále analogicky pro $j = 1, \ldots, n$ je

$$(I\ X)_{\bullet,n+j} = X_{\bullet j} = (Q(A\ I))_{\bullet,n+j} = Q \cdot I_{\bullet j} = (QI)_{\bullet j} = Q_{\bullet j},$$

takže $X = Q = A^{-1}$. Jestliže Gauss-Jordanova eliminace s maticí $(A\ I)$ selhává, potom selhává už v bloku matice A a tedy A je singulární. □

1.4.5 Algoritmus pro výpočet inverzní matice

0. Dána: čtvercová matice A.

1. Sestav matici $(A\ I)$.

2. Použij Gauss-Jordanovu eliminaci k převedení na tvar $(I\ X)$.

3. Dojde-li k předčasnému zastavení, ukonči: A je singulární a nemá inverzní matici.

4. Jinak ukonči: $X = A^{-1}$.

1.4.6 Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.7 Vlastnosti inverzní matice

Věta 17. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou regulární matice. Potom platí:*

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$,
4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Důkaz. Větu dokážeme s pomocí věty 14, podle které z $XA = I$ plyne $X = A^{-1}$. 1) Z $AA^{-1} = I$ plyne $A = (A^{-1})^{-1}$. 2) Z $AA^{-1} = I$ plyne $(A^{-1})^T A^T = I$ a tedy $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. 3) Z $(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = A^{-1}A = I$ plyne $\frac{1}{\alpha}A^{-1} = (\alpha A)^{-1}$. 4) Z $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$ plyne $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. □

Poznámka. Povšimněte si formální analogie tvrzení 1), 4) s tvrzeními 1), 4) věty 3.

1.4.8 Sherman-Morrisonova formule

Neexistuje obecný vzorec pro $(A+B)^{-1}$, existuje však v případě, že B má tvar vnějšího součinu:

Věta 18. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární a nechť $b, c \in \mathbb{R}^n$. Potom platí:*

1) je-li $c^TA^{-1}b \neq -1$, je

$$(A+bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+c^TA^{-1}b}A^{-1}bc^TA^{-1}, \tag{1.11}$$

2) je-li $c^TA^{-1}b = -1$, je $A+bc^T$ singulární.

Důkaz. 1) Vynásobením dostáváme

$$\begin{aligned} & (A+bc^T)(A^{-1} - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}A^{-1}bc^TA^{-1}) \\ = \quad & I - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}bc^TA^{-1} + bc^TA^{-1} - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}b(c^TA^{-1}b)c^TA^{-1} \\ = \quad & I + (-\tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b} + 1 - \tfrac{c^TA^{-1}b}{1+c^TA^{-1}b})bc^TA^{-1} = I, \end{aligned}$$

neboť výraz v poslední závorce je roven nule. Z toho podle věty 14 plyne, že

$$A^{-1} - \frac{1}{1+c^TA^{-1}b}A^{-1}bc^TA^{-1} = (A+bc^T)^{-1}.$$

2) Je-li $c^TA^{-1}b = -1$, potom $(A+bc^T)A^{-1}b = b + b(c^TA^{-1}b) = b - b = 0$, přičemž $A^{-1}b \neq 0$ vzhledem k tomu že $c^TA^{-1}b = -1$, čili $A+bc^T$ je singulární. □

1.4.9 Důsledek: vliv změny jednoho koeficientu na inverzi

Nechť A má inverzi A^{-1} a nechť $k\ell$-tý koeficient A se změní o α. Potom pro inverzi pozměněné matice platí podle Sherman-Morrisonovy formule

$$((A+\alpha e_k e_\ell^T)^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ij} - \frac{\alpha(A^{-1})_{ik}(A^{-1})_{\ell j}}{1+\alpha(A^{-1})_{\ell k}}$$

pro $i, j = 1, \ldots, n$ (za předpokladu $\alpha(A^{-1})_{\ell k} \neq -1$).

Obecně se tedy změna v jednom koeficientu matice A promítne do *všech* koeficientů inverzní matice, a tato závislost není lineární.

1.4.10 Dodatek k soustavám s regulární maticí

Věta 19. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, potom pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy*

$$Ax = b$$

dáno vzorcem

$$x = A^{-1}b.$$

Důkaz. Je-li A regulární, potom má inverzní matici a z rovnosti $Ax = b$ přenásobením inverzní maticí zleva dostáváme

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b. \qquad \square$$

1.5 Intermezzo

1.5.1 Počítače nepočítají přesně

Počítače zobrazují reálná čísla v pohyblivé řádové čárce s pevnou délkou mantisy, která např. v „IEEE floating-point standard” činí 23 bitů u jednoduché přesnosti a 52 bitů u dvojnásobné přesnosti ($2^{-23} \approx 10^{-7}$, $2^{-52} \approx 10^{-16}$).

Tato přesnost se zdá být pro běžné účely postačující. Ukazuje se však, že chyby vzniklé zaokrouhlováním mohou při numerických výpočtech už u příkladů malých rozměrů způsobit katastrofické selhání algoritmů.

1.5.2 Hilbertovy matice

Pro každé $n \geq 1$ definujme Hilbertovu matici $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ předpisem

$$(H_n)_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

např.

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

1.5.3 Soustavy $H_n x = H_n e$

Pro zvolené n řešme soustavu

$$H_n x = H_n e,$$

která vzhledem k regularitě H_n má jediné řešení $x = e = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Výpočty byly provedeny v programu MATLAB 6.0 v dvojnásobné přesnosti jednak Gaussovou eliminací ($n = 12, 13, 14$), jednak zabudovanou MATLABovskou procedurou ($n = 14$).

1.5.4 Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 12$, 13 Gaussovou eliminací

```
n=12;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
soustava ma jedine reseni
x =
  Columns 1 through 7
    1.0000    1.0000    0.9999    1.0009    0.9932    1.0298    0.9176
  Columns 8 through 12
    1.1481    0.8273    1.1258    0.9479    1.0094

n=13;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
soustava ma jedine reseni
x =
  Columns 1 through 7
    1.0000    1.0000    1.0012    0.9804    1.1771    0.0332    4.3909
```

```
  Columns 8 through 13
   -6.8988   13.3496  -11.8095    9.4534   -2.2127    1.5352
```

1.5.5 Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 14$ (2 metody)

```
n=14;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
H singularni

n=14;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);(H\b)'
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.408541e-019.
x =
  Columns 1 through 7
    1.0000    0.9999    1.0021    0.9714    1.2008    0.2596    2.1136
  Columns 8 through 14
    2.7604  -10.9133   27.2272  -31.2902   24.5310   -8.5114    2.6489
```

1.5.6 Závěr intermezza

Vidíme, že vypočtená řešení se drasticky liší od správného řešení $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$: např. pro $n = 14$ dostáváme $x_{11} = -31.2902$ místo $x_{11} = 1$.

Výsledky nejsou špatné proto, že by byl špatný algoritmus nebo počítač, ale proto, že „špatná" je sama soustava: matice H_n jsou totiž „blízké singulárním".

1.6 Odstupňovaný tvar a pseudoinverzní matice

1.6.1 Co dělat v případě singulární nebo obdélníkové matice?

V případě, že se Gauss-Jordanova eliminace zastaví z důvodu singularity ($a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$), můžeme formálně pokračovat tak, že budeme hledat pivota v následujícím sloupci a stejném řádku. Tímto způsobem můžeme pokračovat i u obecné obdélníkové matice.

Matici, kterou takto vypočteme, nazýváme maticí v odstupňovaném tvaru.

1.6.2 Odstupňovaný tvar matice: definice

Definice. Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v odstupňovaném (RREF[9]) tvaru jestliže existují $0 \leq r \leq m$ a $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$ tak, že platí:

1. $A_{i1} = \ldots = A_{i,k_i-1} = 0$ a $A_{\bullet k_i} = e_i$ pro $i = 1, \ldots, r$,
2. $A_{i\bullet} = 0^T$ pro $i = r+1, \ldots, m$.

Poznámka. Slovně, matice má prvních r řádků nenulových a zbývajících $m - r$ nulových. V každém nenulovém řádku i je prvním nenulovým číslem jednička v k_i-tém sloupci, a všechny ostatní prvky tohoto sloupce jsou nulové. Indexy těchto sloupců splňují $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Poznámka. Slova „odstupňovaný tvar" a „RREF (tvar)" používáme jako synonyma.

[9] Z angl. „reduced row-echelon form".

1.6.3 Odstupňovaný tvar matice: příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zde je $r = 4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 7$ (hvězdičky označují místa, kde mohou stát libovolná čísla).

1.6.4 Pomocné tvrzení

Následující tvrzení má pomocný charakter a používá se pouze v důkazu věty 21.

Věta 20. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou matice v odstupňovaném tvaru a nechť platí*

$$A = QB \tag{1.12}$$

pro jistou regulární matici Q. Potom

$$A = B.$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu sloupců n. Nechť $n = 1$, takže $A = a \in \mathbb{R}^m$ a $B = b \in \mathbb{R}^m$. Protože b je v odstupňovaném tvaru, je buď $b = 0$, nebo $b = e_1$; podobně pro a. Je-li $b = 0$, je $a = Qb = 0 = b$; je-li $b = e_1$, potom vzhledem k regularitě Q je $a = Qe_1 \neq 0$, tedy $a = e_1 = b$.

Nechť tedy tvrzení platí pro $n - 1 \geq 1$ a nechť $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potom můžeme psát $A = (\tilde{A}\ a)$, $B = (\tilde{B}\ b)$, kde $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ a $a, b \in \mathbb{R}^m$, přičemž $\tilde{A}, \tilde{B}$ jsou v odstupňovaném tvaru. Potom z (1.12) plyne

$$\tilde{A} = Q\tilde{B}, \tag{1.13}$$

$$a = Qb, \tag{1.14}$$

a tedy podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} = \tilde{B}$. K dokončení důkazu zbývá proto dokázat, že $a = b$. Nechť r je počet nenulových řádků matice $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$) a nechť $k_1, \ldots, k_r$ jsou indexy jednotkových sloupců v $\tilde{A}$ (a tedy i v $\tilde{B}$). Potom pro každé $i = 1, \ldots, r$ je

$$e_i = \tilde{A}_{\bullet k_i} = Q\tilde{B}_{\bullet k_i} = Qe_i = Q_{\bullet i},$$

tedy prvních r sloupců matice Q je tvořeno prvními r sloupci jednotkové matice. Protože A je v odstupňovaném tvaru, je buď $a_{r+1} = \ldots = a_m = 0$, nebo $a = e_{r+1}$, podobně pro b. Je-li $a_{r+1} = \ldots = a_m = 0$, potom $a = \sum_{i=1}^r a_i e_i = \sum_{i=1}^r a_i Q_{\bullet i} + \sum_{i=r+1}^m 0 \cdot Q_{\bullet i} = Qa$, tedy podle (1.14) je $Qa = Qb$ a z regularity Q plyne $a = b$. Je-li $a = e_{r+1}$, potom kdyby bylo $b_{r+1} = 0$, potom $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ a platilo by $a = Qb = \sum_{i=1}^r b_i Q_{\bullet i} = \sum_{i=1}^r b_i e_i$, přičemž $(e_i)_{r+1} = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, r$, tedy by bylo $a_{r+1} = 0$, spor. Tedy $b_{r+1} \neq 0$, takže $b = e_{r+1} = a$. Dokázali jsme tedy, že v obou případech je $a = b$, a jelikož podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} = \tilde{B}$, dostáváme tak $A = B$, čímž je důkaz indukcí proveden. □

1.6.5 Algoritmus pro výpočet odstupňovaného tvaru

0. Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
1. Polož $i := 1$, $k := 1$.
2. Je-li $a_{\ell j} = 0$ pro každé $\ell \geq i$ a $j \geq k$, polož $A^R := A$ a ukonči.
3. Jinak urči $k := \min\{j\,;\, j \geq k,\ a_{\ell j} \neq 0 \text{ pro jisté } \ell \geq i\}$.
4. Nalezni $a_{\ell k} \neq 0$, $\ell \geq i$ a vyměň řádky $A_{i\bullet}$ a $A_{\ell\bullet}$.
5. Polož $A_{i\bullet} := \frac{1}{a_{ik}} A_{i\bullet}$.
6. Pro každé $\ell \neq i$ polož $\alpha := a_{\ell k}$ a $A_{\ell\bullet} := A_{\ell\bullet} - \alpha A_{i\bullet}$.
7. Je-li $i < m$ a $k < n$, polož $i := i+1$, $k := k+1$ a jdi na krok 2. Jinak polož $A^R := A$ a ukonči.

1.6.6 Výsledná matice je v RREF a je jednoznačně určena

Věta 21. *Matice A^R vypočtená algoritmem je v odstupňovaném tvaru a výsledek* nezávisí *na výběru pivotů v kroku 4 a je tedy jednoznačně určen maticí A.*

Poznámka. To ospravedlňuje použití symbolu A^R.

Důkaz. Dokážeme že matice A^R vypočtená algoritmem je v RREF tvaru. Je-li $A = 0$, je matice v RREF tvaru (s $r = 0$) a algoritmus končí v kroku 2. Nechť tedy $A \neq 0$. Označme r poslední hodnotu indexu i, se kterou se provádí eliminace v kroku 6 algoritmu, a nechť pro každé $1 \leq i \leq r$ je k_i rovno hodnotě k vypočtené v kroku 3. Dokážeme indukcí podle i, že pro každé $1 \leq i \leq r$ po provedení eliminace s pivotem a_{ik_i} v kroku 6 je podmatice sestávající z prvních k_i sloupců matice v RREF tvaru, přičemž její řádky počínaje $(i+1)$-ním jsou nulové. To je zřejmé pro $i = 1$, neboť k_1 je index prvního nenulového sloupce původní matice, takže po provedení eliminace je podmatice sestávající z prvních k_1 sloupců evidentně v RREF tvaru a všechny její řádky počínaje druhým jsou nulové.

Nechť tedy tvrzení platí pro $1 \leq i-1 < r$, takže po provedení eliminace s pivotem $a_{i-1,k_{i-1}}$ je podmatice sestávající z prvních k_{i-1} sloupců v RREF tvaru a všechny její řádky počínaje i-tým jsou nulové. To znamená, že pro index k_i vypočtený v kroku 3 platí $k_{i-1} < k_i$ a při eliminaci s pivotem a_{ik_i} se prvních k_{i-1} sloupců nemění a navíc se vytvoří i-tý řádek a k_i-tý sloupec v RREF tvaru. To ukazuje, že v podmatici sestávající z prvních k_i sloupců je prvních i řádků v RREF tvaru a její zbývající řádky jsou vzhledem k výběru k_i v kroku 3 a k eliminaci nulové, takže celá podmatice je v RREF tvaru. Tím je tvrzení indukcí dokázáno. Po provedení poslední eliminace s hodnotou $i = r$ je buď $i = m$, nebo všechny řádky počínaje $(i+1)$-ním jsou nulové, takže výsledná matice A^R je v RREF tvaru.

Protože matice se v průběhu algoritmu upravuje pouze elementárními operacemi (v krocích 4, 5, 6), platí pro výslednou matici A^R podle věty 8 $A^R = QA$, kde Q je jistá regulární matice. Použijeme-li libovolný jiný výběr pivotů v kroku 4, dojdeme na konci algoritmu k matici A^1, která je v odstupňovaném tvaru a platí pro ni opět $A^1 = Q_1 A$, kde Q_1 je jistá regulární matice. Z toho plyne, že
$$A = Q_1^{-1} A^1 = Q^{-1} A^R$$
a tedy
$$A^1 = Q_1 Q^{-1} A^R,$$
kde A^1, A^R jsou matice v odstupňovaném tvaru a $Q_1 Q^{-1}$ je regulární, z čehož podle pomocného tvrzení 20 dostáváme $A^1 = A^R$. Tedy výsledná matice vypočtená algoritmem nezávisí na výběru

pivotů v kroku 3 a je jednoznačně určena. □

1.6.7 Lineární nezávislost sloupců resp. řádků matice

Definice. Říkáme, že matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lineárně nezávislé sloupce, jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má pouze triviální řešení $x = 0$, a že má lineárně nezávislé řádky, jestliže A^T má lineárně nezávislé sloupce.

1.6.8 Lineární nezávislost a regularita

Věta 22. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:*

1) *A má lineárně nezávislé sloupce právě když $A^T A$ je regulární,*
2) *A má lineárně nezávislé řádky právě když AA^T je regulární.*

Důkaz. 1) Nechť A má lineárně nezávislé sloupce a nechť $A^T Ax = 0$ pro jisté x. Potom $\|Ax\|^2 = x^T A^T Ax = 0$, tedy $Ax = 0$ a z lineární nezávislosti sloupců matice A plyne $x = 0$, tedy $A^T A$ je regulární. Naopak, nechť $A^T A$ je regulární a nechť $Ax = 0$ pro jisté x. Potom $A^T Ax = 0$ a z regularity $A^T A$ plyne $x = 0$, což dokazuje, že A má lineárně nezávislé sloupce.

2) A má lineárně nezávislé řádky právě když A^T má lineárně nezávislé sloupce a to podle části 1) platí právě když $(A^T)^T A^T = AA^T$ je regulární. □

1.6.9 Hodnostní rozklad

Věta 23. *Nechť A^R je odstupňovaný tvar matice $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom platí*

$$A = BC,$$

kde $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$ je matice o sloupcích $A_{\bullet k_1}, \dots, A_{\bullet k_r}$ a matice $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ sestává z prvních r řádků matice A^R. Přitom B má lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky.

Poznámka. Každý rozklad tvaru $A = BC$, ve kterém matice B má lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky, se nazývá hodnostním rozkladem matice A. Věta tedy ukazuje, jak z odstupňovaného tvaru A^R matice A sestrojit její hodnostní rozklad. K hodnostnímu rozkladu se vrátíme v části 5.2.4.

Důkaz. Protože A^R vzniká z A posloupností elementárních operací, je podle věty 8 $A^R = QA$ pro jistou regulární matici Q, tj.

$$A = PA^R, \tag{1.15}$$

kde $P = Q^{-1}$. Potom pro $i = 1, \dots, r$ dostáváme

$$B_{\bullet i} = A_{\bullet k_i} = (PA^R)_{\bullet k_i} = P(A^R)_{\bullet k_i} = Pe_i = P_{\bullet i}$$

a z (1.15) plyne pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$A_{\bullet j} = P(A^R)_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} P_{\bullet i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} B_{\bullet i}C_{ij} = B \cdot C_{\bullet j} = (BC)_{\bullet j},$$

takže $A = BC$. Kdyby B neměla lineárně nezávislé sloupce, potom by platilo $0 = Bx = \sum_{i=1}^{r} B_{\bullet i}x_i = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i}x_i$ pro jisté $x \neq 0$. Definujeme-li vektor x' předpisem $x'_i = x_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ a $x'_i = 0$ pro $i = r+1, \ldots, m$, je $0 = Bx = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i}x'_i = \sum_{i=1}^{m} P_{\bullet i}x'_i = Px'$, kde $x' \neq 0$, což je spor s regularitou matice P. Proto sloupce B jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme dále, že $C^T y = 0$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^r$, tj. $y^T C = 0^T$. Protože C je sestavená z prvních r řádků matice A^R a v k_i-tém sloupci A^R, a tedy i C, stojí vektor e_i, je $0 = (y^T C)_{k_i} = y^T C_{\bullet k_i} = y^T e_i = y_i$ pro $i = 1, \ldots, r$, tj. $y = 0$. Z toho dostáváme, že C^T má lineárně nezávislé sloupce, takže C má lineárně nezávislé řádky. □

1.6.10 Příklad

Protože

$$A^R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}^R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

má matice A hodnostní rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = BC,$$

což lze přímo ověřit vynásobením.

1.6.11 Moore-Penroseova inverze

Věta 24. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existuje právě jedna matice $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ s těmito vlastnostmi:*
1) $AA^+A = A$,
2) $A^+AA^+ = A^+$,
3) $(AA^+)^T = AA^+$,
4) $(A^+A)^T = A^+A$.

Definice. Matici A^+ nazýváme Moore-Penroseovou inverzí matice A (autorství: Moore v termínech ortogonálních projekcí 1920, Penrose v dnešní podobě 1955).

Poznámka. Vlastnosti 3), 4) říkají, že obě matice AA^+ a A^+A jsou symetrické.

Důkaz. *1. Existence.* Je-li $A = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom $A^+ = 0^T$ splňuje 1)-4). Nechť tedy $A \neq 0$ a nechť $A = BC$ je hodnostní rozklad matice A (věta 23), potom B má lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky, takže matice $B^T B$ a CC^T jsou regulární podle věty 22 a jejich inverze existují. Položme

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T.$$

Ukážeme, že A^+ splňuje 1)-4).
1) $AA^+A = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBC = BC = A$,
2) $A^+AA^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = A^+$,
3) $AA^+ = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = B(B^TB)^{-1}B^T = (B(B^TB)^{-1}B^T)^T = (AA^+)^T$,
4) $A^+A = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBC = C^T(CC^T)^{-1}C = (C^T(CC^T)^{-1}C)^T = (A^+A)^T$.

2. Jednoznačnost. Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že jistá matice $A^\#$ splňuje 1)-4). Položme $D = A^+ - A^\#$. Z $AA^+A = A$ plyne $(AA^+A)^T = (A^+A)^TA^T = A^+AA^T = A^T$, podobně $A^\#AA^T = A^T$, odečtením $DAA^T = 0$, tudíž

$$DA(DA)^T = DAA^TD^T = 0$$

a odtud $DA = 0$ (viz poznámku níže). Dále z $A^+AA^+ = A^+$ plyne $(A^+AA^+)^T = (AA^+)^T(A^+)^T = AA^+(A^+)^T = (A^+)^T$ a podobně $AA^\#(A^\#)^T = (A^\#)^T$, tedy

$$\begin{aligned} DD^T &= D((A^+)^T - (A^\#)^T) = D(AA^+(A^+)^T - AA^\#(A^\#)^T) \\ &= DA(A^+(A^+)^T - A^\#(A^\#)^T) = 0 \end{aligned}$$

(neboť $DA = 0$) a odtud $D = 0$, tj. $A^+ = A^\#$. □

Poznámka. V důkazu jednoznačnosti jsme použili dvakrát faktu, že z $FF^T = 0$ plyne $F = 0$ (pro každé i je totiž $0 = (FF^T)_{ii} = \sum_j F_{ij}(F^T)_{ji} = \sum_j F_{ij}^2$, takže celý i-tý řádek F je nulový).

1.6.12 Algoritmus pro výpočet Moore-Penroseovy inverze

0. Dána: matice $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
1. Vypočti odstupňovaný tvar A^R matice A.
2. Sestav matici $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ o sloupcích $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$ a matici $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ z prvních r řádků matice A^R.
3. Polož $A^+ = C^T(B^TAC^T)^{-1}B^T$.

1.6.13 Poznámky

Poznámka. Podle věty o hodnostním rozkladu má B lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky, takže B^TB i CC^T jsou regulární podle věty 22, proto i $B^TAC^T = B^TBCC^T$ je regulární a má inverzní matici.

Poznámka. Místo „Moore-Penroseova inverze” říkáme rovněž synonymně „pseudoinverzní matice”.

1.6.14 Grevillův rekurentní vzorec

Greville dokázal r. 1960 rekurentní vzorec pro výpočet pseudoinverzní matice (přidáváním sloupců). Jeho poměrně složitý důkaz ústí v elegantní algoritmus (část 1.6.15).

Věta 25. (Greville) *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$. Potom je*

$$(A\ a)^+ = \begin{pmatrix} A^+ - db^T \\ b^T \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{array}{rcl} d & = & A^+a, \\ c & = & a - Ad, \\ b^T & = & \begin{cases} \frac{c^T}{c^Tc} & \text{je} - \text{li } c \neq 0, \\ \frac{d^TA^+}{1+d^Td} & \text{je} - \text{li } c = 0. \end{cases} \end{array}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme některé pomocné vztahy. Především je

$$c^TA = (a - AA^+a)^TA = a^T(I - AA^+)A = a^T(A - AA^+A) = 0^T \tag{1.16}$$

podle vlastnosti 1) pseudoinverzní matice, a dále

$$c^T(c - a) = c^T(-Ad) = -(c^TA)d = 0 \tag{1.17}$$

podle (1.16). Nyní dokážeme, že

$$b^TA = \begin{cases} 0^T & \text{je} - \text{li } c \neq 0, \\ \frac{d^T}{1+d^Td} & \text{je} - \text{li } c = 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

a

$$b^Ta = \begin{cases} 1 & \text{je} - \text{li } c \neq 0, \\ \frac{d^Td}{1+d^Td} & \text{je} - \text{li } c = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Skutečně, je-li $c \neq 0$, potom

$$b^TA = \frac{c^TA}{c^Tc} = 0^T$$

podle (1.16), a pro $c = 0$ je

$$b^TA = \frac{d^TA^+A}{1+d^Td} = \frac{a^T(A^+)^TA^+A}{1+d^Td} = \frac{a^T(A^+AA^+)^T}{1+d^Td} = \frac{a^T(A^+)^T}{1+d^Td} = \frac{d^T}{1+d^Td},$$

čímž je (1.18) dokázáno. Dále pro $c \neq 0$ je

$$b^Ta = \frac{c^Ta}{c^Tc} = \frac{c^Tc}{c^Tc} = 1$$

podle (1.17), a pro $c = 0$ je

$$b^Ta = \frac{d^TA^+a}{1+d^Td} = \frac{d^Td}{1+d^Td},$$

což dokazuje (1.19). Položme nyní

$$A^\# = \begin{pmatrix} A^+ - db^T \\ b^T \end{pmatrix}.$$

Dokážeme, že matice $(A\ a)$ a $A^\#$ mají vlastnosti 1)-4) z věty 24. Důkaz rozdělíme do dvou částí.
(a) Nechť $c \neq 0$, tj. $a \neq Ad = AA^+a$. Potom

$$A^\#(A\ a) = \begin{pmatrix} A^+A - db^TA & A^+a - db^Ta \\ b^TA & b^Ta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

podle (1.18), (1.19), takže matice je symetrická, což dokazuje vlastnost 4) z věty 24. Odtud dostáváme

$$A^\#(A\ a)A^\# \;=\; \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} A^\# = \begin{pmatrix} A^+ - A^+AA^+ab^T \\ b^T \end{pmatrix} = A^\#,$$

což dokazuje vlastnost 2). Dále

$$(A\ a)A^{\#}(A\ a) = (A\ a)\begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = (AA^+A\ \ a) = (A\ a),$$

což je vlastnost 1), a nakonec

$$(A\ a)A^{\#} = AA^+ + cb^T = AA^+ + \tfrac{cc^T}{c^Tc},$$

tedy matice je symetrická, což dokazuje vlastnost 3).
(b) Nechť $c = 0$, tj. $a = Ad = AA^+a$. Potom

$$(A\ a)A^{\#} = AA^+ - Adb^T + ab^T = AA^+,$$

takže matice je symetrická, což dokazuje vlastnost 3). Odtud

$$(A\ a)A^{\#}(A\ a) = AA^+(A\ a) = (A\ Ad) = (A\ a),$$

což je vlastnost 1), dále

$$A^{\#}(A\ a)A^{\#} = A^{\#}AA^+ = \begin{pmatrix} A^+ - db^TAA^+ \\ b^TAA^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+ - \frac{dd^TA^+AA^+}{1+d^Td} \\ \frac{d^TA^+AA^+}{1+d^Td} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - \frac{dd^TA^+}{1+d^Td} \\ \frac{d^TA^+}{1+d^Td} \end{pmatrix} = A^{\#},$$

což je vlastnost 2), a nakonec

$$A^{\#}(A\ a) = \begin{pmatrix} A^+A - db^TA & A^+a - db^Ta \\ b^TA & b^Ta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+A - \frac{dd^T}{1+d^Td} & \frac{d}{1+d^Td} \\ \frac{d^T}{1+d^Td} & \frac{d^Td}{1+d^Td} \end{pmatrix}$$

podle (1.18), (1.19), tedy matice je symetrická, což dokazuje vlastnost 4).
V obou případech (a), (b) jsme ukázali, že matice $(A\ a)$ a $A^{\#}$ splňují vlastnosti 1)-4) z věty 24, tedy $A^{\#} = (A\ a)^+$, čímž je tvrzení věty dokázáno. □

Věta 26. *Je-li* $a \in \mathbb{R}^m$, *potom*

$$a^+ = \begin{cases} \frac{a^T}{a^Ta} & \text{je}-\text{li } a \neq 0, \\ a^T & \text{je}-\text{li } a = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne přímým ověřením vlastností 1)-4) z věty 24. □

1.6.15 Grevillův algoritmus

Z posledních dvou vět plyne následující Grevillův algoritmus pro výpočet A^+. V jeho popisu poprvé použijeme MATLABovské „dvojtečkové značení”[10]. V MATLABu $i : j$ značí (řádkový)

[10] Angl. „colon notation”.

vektor o celočíselných složkách $i, i+1, \ldots, j$. V souvislosti s tím $A(i : j, k : \ell)$ znamená podmatici sestávající z prvků v řádcích $i, i+1, \ldots, j$ a sloupcích $k, k+1, \ldots, \ell$. Speciálně $A(i, :)$ resp. $A(:, j)$ znamená i-tý řádek resp. j-tý sloupec, tedy v našem značení $A_{i\bullet}$ resp. $A_{\bullet j}$.

% Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$c = A(:, 1)$;
if $c = 0$, $X = c^T$; **else** $X = \frac{c^T}{c^T c}$; **end**
for $j = 2 : n$
    $d = XA(:, j)$;
    $c = A(:, j) - A(:, 1 : (j-1))d$;
    if $c = 0$, $b^T = \frac{d^T X}{1+d^T d}$; **else** $b^T = \frac{c^T}{c^T c}$; **end**
    $X = \begin{pmatrix} X - db^T \\ b^T \end{pmatrix}$;
end
% $X = A^+$.

1.6.16 Příklad

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je singulární jelikož

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a nemá tedy inverzní matici. S použitím Grevillova algoritmu dostáváme její pseudoinverzi

$$A^+ = \begin{pmatrix} -0.6389 & -0.1667 & 0.3056 \\ -0.0556 & 0.0000 & 0.0556 \\ 0.5278 & 0.1667 & -0.1944 \end{pmatrix}$$

(zaokrouhleno na 4 desetinná místa).

1.6.17 Zvláštní případy

Platí:

1) $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ má-li A lineárně nezávislé sloupce,

2) $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$ má-li A lineárně nezávislé řádky,

3) $A^+ = A^{-1}$ je-li A čtvercová regulární.

Důkaz se provede přímým ověřením, že ve všech třech případech má matice A^+ vlastnosti 1)-4) z věty 24 (je též proveden ve větě 111, která shrnuje vlastnosti pseudoinverzní matice).

1.7 Řešení obecných soustav lineárních rovnic

1.7.1 Použití RREF tvaru k řešení obecných soustav lineárních rovnic

Věta 27. *K dané soustavě lineárních rovnic*

$$Ax = b \tag{1.20}$$

(kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) vypočtěme odstupňovaný tvar rozšířené matice soustavy

$$(A\ \ b)^R = (\widetilde{A}\ \ \widetilde{b}).$$

Potom platí:

1) *je-li $k_r = n+1$, potom soustava (1.20) nemá řešení,*
2) *je-li $k_r \leq n$ a $r = n$, potom soustava (1.20) má právě jedno řešení $x = (\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n)^T$,*
3) *je-li $k_r \leq n$ a $r < n$, potom soustava (1.20) má nekonečně mnoho řešení, jejichž parametrický popis dostaneme, vyjádříme-li „závislé” proměnné $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ pomocí ostatních „nezávislých” proměnných.*

Důkaz. Jelikož $(A\ \ b)^R = (\tilde{A}\ \ \tilde{b})$, vznikla matice $(\tilde{A}\ \ \tilde{b})$ z matice $(A\ \ b)$ provedením konečné posloupnosti elementárních operací a proto soustavy

$$Ax = b \tag{1.21}$$

a

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \tag{1.22}$$

mají podle věty 9 stejnou množinu řešení.

1) Je-li $k_r = n+1$, potom r-tá rovnice soustavy (1.22) má tvar

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = 1,$$

tedy nemá řešení a proto ani soustava (1.22) resp. (1.21) nemá řešení.

2) Nechť $k_r \leq n$ a $r = n$. Potom $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq n$, takže musí platit $k_i = i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a soustava (1.22) má tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad\qquad & = & \tilde{b}_1, \\ \ddots \quad & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \tilde{b}_n, \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n & = & 0, \\ \vdots \qquad & \vdots & \vdots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n & = & 0 \end{array}$$

a tedy má jediné řešení $x = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)^T$, které je rovněž jediným řešením soustavy (1.21).

3) Nechť $k_r \leq n$ a $1 \leq r < n$. Položme $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$. Potom pro každé $i = 1, \ldots, r$ má i-tý řádek soustavy (1.22) tvar

$$x_{k_i} + \sum_{j \notin K} \tilde{A}_{ij} x_j = \tilde{b}_i,$$

tedy

$$x_{k_i} = \tilde{b}_i - \sum_{j \notin K} \tilde{A}_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, r), \tag{1.23}$$

čímž dostáváme vyjádření „závislých proměnných” x_j, $j \in K$, pomocí „nezávislých proměnných” x_j, $j \notin K$, přičemž množina $\{j\,;\, j \notin K\}$ obsahuje právě $n - r \geq 1$ prvků. Zvolme $k \notin K$. Potom pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je vektor

$$\begin{array}{rcll} x_k & = & \alpha & \\ x_j & = & 0 & (j \notin K,\, j \neq k) \\ x_{k_i} & = & \tilde{b}_i - \tilde{A}_{ik}\alpha & (i = 1, \ldots, r) \end{array}$$

řešením (1.20), takže tato soustava má nekonečně mnoho řešení. □

1.7.2 Příklad

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 7 \end{array}$$

Převod na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava (1.23):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 & = & 1 - x_4. \end{array}$$

Doplníme-li soustavu rovnostmi $x_2 = x_2$ a $x_4 = x_4$ a přeznačíme-li proměnné x_2, x_4 na pravé straně jako parametry y_1, y_2, dostáváme parametrický popis všech řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 \qquad (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

1.7.3 Homogenní soustavy

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Soustavu

$$Ax = 0$$

(tj. s nulovou pravou stranou) nazýváme homogenní soustavou. Je zřejmé, že homogenní soustava má aspoň jedno řešení $x = 0$ (tzv. triviální).

Důsledek. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $m < n$, potom soustava $Ax = 0$ má netriviální řešení.*

Důkaz. Ve větě 27 nenastává případ 1), protože $x = 0$ je řešení. Kdyby nastal případ 2), bylo by $n = r \leq m$ ve sporu s předpokladem $m < n$. Tedy nastává případ 3) a soustava má netriviální řešení. □

1.7.4 Tvar množiny řešení

Z věty 27 a z příkladu 1.7.2 je zřejmé, že je-li $k_r \leq n$ a $r < n$, potom množina X řešení soustavy $Ax = b$ má tvar

$$X = \{x_0 + \widetilde{B}y\,;\; y \in \mathbb{R}^{n-r}\},$$

a přidáním r nulových sloupců k $\widetilde{B}$ můžeme psát

$$X = \{x_0 + By\,;\; y \in \mathbb{R}^{n}\}.$$

V tomto tvaru pak platí i pro případ jediného řešení (s $B = 0$). Následující věta uvádí explicitní tvar x_0 a B s použitím pseudoinverzní matice.

1.7.5 Popis množiny řešení

Věta 28. (Penrose 1956) *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a nechť množina X řešení soustavy*

$$Ax = b$$

je neprázdná. Potom platí

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\; y \in \mathbb{R}^n\},$$

přičemž

$$\|A^+b\| = \min\{\|x\|\,;\; x \in X\}$$

a A^+b je jediné řešení, ve kterém se tohoto minima nabývá.

Poznámka. A^+b je tedy jakési „význačné řešení". Povšimněte si analogie se vzorcem $A^{-1}b$ u soustav se čtvercovou regulární maticí.

Důkaz. Nechť $X \neq \emptyset$, takže $x_0 \in X$ pro jisté x_0. S využitím vlastnosti 1) z věty 24 dostáváme

$$AA^+b = AA^+Ax_0 = Ax_0 = b,$$

takže $A^+b \in X$. Nechť $x \in X$; položme $y = x - A^+b$, potom $Ay = Ax - AA^+b = b - b = 0$, takže

$$x = A^+b + y = A^+b + (I - A^+A)y.$$

Dokázali jsme tím, že

$$X \subseteq \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\; y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Naopak, nechť x je tvaru $x = A^+b + (I - A^+A)y$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^n$. Potom $Ax = AA^+b + (A - AA^+A)y = b$ (použili jsme opět vlastnost 1) z věty 24), takže $x \in X$. Tím jsme dokázali opačnou inkluzi a tedy i rovnost[11]

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.24}$$

Pro důkaz zbývajícího tvrzení zvolme libovolné řešení $x \in X$, potom x je tvaru $x = A^+b + (I - A^+A)y$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^n$, a počítejme $\|x\|^2$:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = x^T x &= \|A^+b\|^2 + 2((I - A^+A)y)^T A^+b + \|(I - A^+A)y\|^2 \\ &= \|A^+b\|^2 + 2y^T(I - A^+A)A^+b + \|(I - A^+A)y\|^2 \\ &= \|A^+b\|^2 + \|(I - A^+A)y\|^2 \geq \|A^+b\|^2, \end{aligned} \tag{1.25}$$

kde jsme použili vlastnost $A^+AA^+ = A^+$ z věty 24. Pro každé $x \in X$ je tedy $\|x\| \geq \|A^+b\|$, přičemž A^+b rovněž patří do X, což znamená, že

$$\|A^+b\| = \min\{\|x\|\,;\, x \in X\}. \tag{1.26}$$

Jestliže $\|x\| = \|A^+b\|$ pro jisté $x = A^+b + (I - A^+A)y \in X$, potom z (1.25) dostáváme

$$\|x\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|(I - A^+A)y\|^2 \geq \|A^+b\|^2 = \|x\|^2,$$

takže nerovnost se nabývá jako rovnost, což dává $\|(I - A^+A)y\| = 0$, tedy $(I - A^+A)y = 0$ a $x = A^+b$. To znamená, že minimum v rovnosti (1.26) se nabývá právě jen pro $x = A^+b$. □

1.7.6 Důsledky Penroseovy věty

Věta 29. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Potom pro soustavu*

$$Ax = b \tag{1.27}$$

platí:

1) *soustava (1.27) má řešení právě když $AA^+b = b$,*
2) *soustava (1.27) má jediné řešení právě když $AA^+b = b$ a $A^+A = I$,*
3) *množina $\mathcal{N}(A) = \{x\,;\, Ax = 0\}$ řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ je popsaná vztahem $\mathcal{N}(A) = \{(I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$,*
4) *pro každé $x_0 \in X$ je $X = \{x_0 + x\,;\, x \in \mathcal{N}(A)\}$.*

Poznámka k 4). Jinými slovy, obecné řešení soustavy $Ax = b$ lze popsat jako součet jejího „partikulárního" řešení x_0 a obecného řešení homogenní soustavy $Ax = 0$; tato věta se používá mj. k popisu obecného řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Důkaz. 1) V důkazu věty 28 jsme dokázali, že je-li $X \neq \emptyset$, potom $AA^+b = b$. Naopak, platí-li $AA^+b = b$, potom $A^+b \in X$ a tedy $X \neq \emptyset$.

2) Má-li soustava $Ax = b$ jediné řešení, potom podle bodu 1) je $AA^+b = b$ a z popisu (1.24) vyplývá, že musí být $I - A^+A = 0$. Naopak, je-li $AA^+b = b$ a $A^+A = I$, potom A^+b je řešením a z (1.24) vyplývá, že jediným.

3) Aplikací vzorce (1.24) na soustavu $Ax = 0$ dostáváme $\mathcal{N}(A) = \{(I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$.

[11] Rovnost množin $Y = Z$ se v naprosté většině případů dokazuje jako konjunkce dvou inkluzí $Y \subseteq Z$, $Z \subseteq Y$.

4) Je-li $x_0 \in X$, potom podle (1.24) je $x_0 = A^+b + (I - A^+A)y_0$ pro jisté y_0, takže

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\} = \{x_0 + (I - A^+A)(y - y_0)\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$$
$$= \{x_0 + (I - A^+A)\tilde{y}\,;\, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_0 + x\,;\, x \in \mathcal{N}(A)\}. \qquad \square$$

1.8 Metoda nejmenších čtverců

1.8.1 Jak řešit soustavy, které řešení nemají?

Tato otázka vypadá jako zjevný protimluv: nalézt řešení soustav, které řešení nemají, samozřejmě nelze. Lze si však položit otázku, zda neexistuje něco, co by bylo možno považovat v jistém smyslu za adekvátní náhražku neexistujícího řešení.

Tato úvaha vede k tzv. metodě nejmenších čtverců.

1.8.2 Idea metody nejmenších čtverců

Má-li soustava $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$, řešení x, potom pro něj platí

$$\|Ax - b\| = 0,$$

přičemž 0 je nejmenší možná hodnota normy. To vede k myšlence hledat x, pro které platí

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Je-li $\|Ax - b\| = 0$, je x řešením $Ax = b$; je-li $\|Ax - b\| > 0$, je x „řešení” nalezené metodou nejmenších čtverců (angl. „least squares solution”).

1.8.3 Proč „nejmenších čtverců”?

Rovnost

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

lze umocněním a rozepsáním do složek převést na tvar

$$\sum_{i=1}^{m}(Ax - b)_i^2 = \min\Big\{\sum_{i=1}^{m}(Ay - b)_i^2\,;\, y \in \mathbb{R}^n\Big\},$$

jde tedy o minimalizaci součtu druhých mocnin („čtverců”).

1.8.4 Charakterizace řešení

Věta 30. *Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje*

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

právě když je řešením soustavy

$$A^TAx = A^Tb. \qquad (1.28)$$

Definice. Soustava (1.28) se nazývá soustavou normálních rovnic přiřazenou k soustavě $Ax = b$.

Důkaz. Při důkazu obou implikací použijeme pomocnou rovnost

$$\|A(x+z)-b\|^2 = \|Ax-b+Az\|^2 = \|Ax-b\|^2 + 2z^TA^T(Ax-b) + \|Az\|^2, \tag{1.29}$$

platnou pro libovolné vektory $x, z \in \mathbb{R}^n$.

Nechť x je řešením soustavy $A^TAx = A^Tb$. Potom $A^T(Ax-b) = 0$, takže pro libovolné $y \in \mathbb{R}^n$, píšeme-li ho ve tvaru $y = x+z$, kde $z = y-x$, dostáváme podle (1.29) $\|Ay-b\|^2 = \|Ax-b\|^2 + \|Az\|^2 \geq \|Ax-b\|^2$, což znamená, že

$$\|Ax-b\| = \min\{\|Ay-b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.30}$$

Naopak, nechť vektor $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje (1.30). Předpokládejme sporem[12], že $A^T(Ax-b) \neq 0$, a položme $z = -\varepsilon A^T(Ax-b)$, kde $\varepsilon > 0$. Potom z (1.29) plyne

$$\|A(x+z)-b\|^2 = \|Ax-b\|^2 - 2\varepsilon\|A^T(Ax-b)\|^2 + \varepsilon^2\|AA^T(Ax-b)\|^2. \tag{1.31}$$

Ukážeme, že $\varepsilon > 0$ lze volit tak, aby součet posledních dvou členů na pravé straně byl záporný. K tomu je třeba, aby platilo

$$\varepsilon\|AA^T(Ax-b)\|^2 < 2\|A^T(Ax-b)\|^2. \tag{1.32}$$

Je-li $\|AA^T(Ax-b)\| = 0$, lze $\varepsilon > 0$ volit libovolně (neboť $A^T(Ax-b) \neq 0$ podle předpokladu a proto $\|A^T(Ax-b)\| > 0$); je-li $\|AA^T(Ax-b)\| > 0$, je (1.32) splněno např. pro

$$\varepsilon = \|A^T(Ax-b)\|^2 / \|AA^T(Ax-b)\|^2.$$

Při této volbě ε pak z (1.31) dostáváme

$$\|A(x+z)-b\|^2 < \|Ax-b\|^2,$$

tedy pro $y = x+z$ máme

$$\|Ay-b\| < \|Ax-b\|$$

ve sporu s (1.30). Dokázali jsme, že platí-li (1.30), potom předpoklad, že $A^T(Ax-b) \neq 0$, vede ke sporu. Tedy $A^T(Ax-b) = 0$, takže x je řešením soustavy $A^TAx = A^Tb$, což dokazuje opačnou implikaci. □

1.8.5 Řešitelnost soustavy normálních rovnic

Věta 31. *Množina X řešení soustavy normálních rovnic*

$$A^TAx = A^Tb \tag{1.33}$$

je popsaná vzorcem

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Z toho plyne, že soustava (1.33) má vždy řešení *a má-li soustava*

$$Ax = b \tag{1.34}$$

řešení, potom obě soustavy (1.34), (1.33) mají stejnou *množinu řešení X.*

[12] Důkaz sporem je založen na formuli výrokové logiky $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r))$.

Poznámka. Řešení metodou nejmenších čtverců tedy *vždy existuje*. To dává této metodě smysl.

Důkaz. Podle vlastností 1), 3) z věty 24 platí

$$A^T AA^+ = A^T (AA^+)^T = (AA^+A)^T = A^T$$

a tedy

$$A^T AA^+ b = A^T b,$$

z čehož plyne, že soustava $A^T Ax = A^T b$ má řešení $A^+ b$. Pro množinu řešení X této soustavy platí tedy podle tvrzení 4) věty 29

$$X = \{A^+ b + x\,;\, x \in \mathcal{N}(A^T A)\}. \tag{1.35}$$

Dokážeme, že

$$\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A). \tag{1.36}$$

Skutečně, je-li $x \in \mathcal{N}(A)$, potom $Ax = 0$ a tedy i $A^T Ax = 0$, což dává $x \in \mathcal{N}(A^T A)$. Naopak, je-li $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, potom $A^T Ax = 0$ a tedy i $\|Ax\|^2 = x^T A^T Ax = 0$, což znamená, že $Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A)$. Tím je rovnost (1.36) dokázána a dosazením do (1.35) dostáváme

$$X = \{A^+ b + (I - A^+ A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}, \tag{1.37}$$

kde jsme použili popisu množiny $\mathcal{N}(A)$ z tvrzení 3) věty 29. Ve větě 28 jsme dokázali, že je-li množina řešení soustavy $Ax = b$ neprázdná, potom je popsaná vzorcem (1.37). Z toho plyne, že v tomto případě mají obě soustavy $Ax = b$ a $A^T Ax = A^T b$ stejnou množinu řešení. □

1.8.6 Algoritmus metody nejmenších čtverců

0. Dána: soustava $Ax = b$.
1. Sestav soustavu normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$ a nalezni popis množiny jejích řešení[13] ve tvaru $X = \{x_0 + By\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$ převodem na odstupňovaný tvar nebo podle Penroseovy věty.
2. Je-li $Ax_0 = b$, ukonči: X je množina řešení soustavy $Ax = b$.
3. Je-li $Ax_0 \neq b$, ukonči: soustava $Ax = b$ nemá řešení a X je množina vektorů x splňujících $\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$, tj. je to množina řešení metodou nejmenších čtverců.

1.8.7 Důležitý zvláštní případ

Věta 32. *Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lineárně nezávislé sloupce, potom soustava*

$$Ax = b$$

má jediné řešení metodou nejmenších čtverců, a to

$$x = A^+ b = (A^T A)^{-1} A^T b. \tag{1.38}$$

[13] Která je vždy neprázdná podle věty 31.

Důkaz. Skutečně, v tomto případě je $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ (viz 1.6.17), tedy $A^+A = (A^TA)^{-1}A^TA = I$ a podle Penroseovy věty je

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\} = \{A^+b + 0 \cdot y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\} = \{A^+b\},$$

takže množina řešení metodou nejmenších čtverců obsahuje jediný prvek

$$x = A^+b = (A^TA)^{-1}A^Tb. \qquad \square$$

Poznámka. V praktických úlohách vedoucích na metodu nejmenších čtverců je lineární nezávislost sloupců častým jevem a explicitní vzorec (1.38) tak nabývá zvláštní důležitosti.

1.8.8 Zpět k RREF; výhled

Jestliže, jak víme, je odstupňovaný tvar A^R jednoznačně určen maticí A, jaký význam potom mají čísla r a $k_1, \ldots, k_r$ z hlediska matice A?

Na tuto a další otázky lze snáze odpovědět, abstrahujeme-li od struktury matic a zaměříme-li se pouze na vlastnosti operací s nimi. To vede k pojmu abstraktních vektorových prostorů, které budeme probírat v další kapitole.

Kapitola 2

Vektorové prostory

2.1 Základní pojmy

2.1.1 Definice vektorového prostoru

Definice. Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ nazýváme množinu V, na které jsou definovány operace „+", která každé dvojici prvků $x \in V$, $y \in V$ přiřazuje prvek $x+y \in V$, a operace „·", která každé dvojici $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$ přiřazuje prvek $\alpha \cdot x \in V$ tak, že platí:

1) $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in V$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro každé $x, y, z \in V$,
3) existuje prvek $0 \in V$ takový, že $x + 0 = x$ pro každé $x \in V$,
4) ke každému $x \in V$ existuje prvek $y \in V$ takový, že $x + y = 0$,
5) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x \in V$,
6) $1 \cdot x = x$ pro každé $x \in V$,
7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x, y \in V$,
8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x \in V$.

2.1.2 Poznámky

- podobně jako u matic píšeme většinou αx místo $\alpha \cdot x$ (nikdy nepíšeme $x\alpha$). S touto konvencí a s vynecháním kvantifikátorů lze psát vlastnosti 1)–8) v jednodušší, ale méně přesné podobě:
  1) $x + y = y + x$,
  2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
  3) $x + 0 = x$,
  4) $x + y = 0$,
  5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
  6) $1x = x$,
  7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
  8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- je $0 \in V$ (nulový vektor), takže vektorový prostor je vždy neprázdný,
- prvky z $\mathbb{R}$ nazýváme skaláry, prvky z V vektory,
- *struktura prvků z V není blíže určena; zajímají nás vlastnosti operací s nimi, nikoliv jejich podstata,*

- podobně definujeme vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$,
- nebude-li řečeno jinak, budeme se v dalším zabývat reálnými vektorovými prostory (nad $\mathbb{R}$) a místo „vektorový prostor” budeme říkat jednoduše „prostor”.

2.1.3 Příklady vektorových prostorů

- jednobodová množina $V = \{0\}$ s definovanými operacemi $0 + 0 = 0$, $\alpha \cdot 0 = 0$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je vektorový prostor (tzv. nulový),
- *prostor* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *s operacemi sečítání matic a násobení matice skalárem, viz větu 1* (pro nás „standardní” prostor),
- prostory $\mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$,
- množina P_n všech polynomů stupně $\leq n$ s reálnými koeficienty (nikoliv „$= n$” !),
- množina P_∞ polynomů všech stupňů s reálnými koeficienty,
- množina $C(a, b)$ všech funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$,
- množina všech konvergentních posloupností reálných čísel,
- atd.

2.1.4 Základní vlastnosti vektorového prostoru

Věta 33. *Pro každý vektorový prostor platí:*

1) *existuje právě jeden prvek* $a \in V$ *s vlastností* $x + a = x$ *pro každé* $x \in V$, *a to* $a = 0$,
2) *ke každému* $x \in V$ *existuje právě jeden prvek* $y \in V$ *s vlastností* $x + y = 0$, *a to* $y = (-1)x$,
3) $\alpha \cdot 0 = 0$ *pro každý skalár* α,
4) $0 \cdot x = 0$ *pro každé* $x \in V$,
5) *je-li* $\alpha \cdot x = 0$, *je buď* $\alpha = 0$, *nebo* $x = 0$.

Důkaz. Dokážeme vlastnosti v pořadí 3), 4), 1), 2), 5), protože 4), 3) se používají v důkazu 2), 5).

3) Podle vlastnosti 4) z definice vektorového prostoru existuje prvek $y \in V$ takový, že $\alpha \cdot 0 + y = 0$. Z toho dostáváme

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 + y) = (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) + y = \alpha \cdot (0 + 0) + y = \alpha \cdot 0 + y = 0,$$

takže $\alpha \cdot 0 = 0$.

4) K vektoru $0 \cdot x$ existuje vektor y s vlastností $0 \cdot x + y = 0$, a odtud dostáváme

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + (0 \cdot x + y) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + y = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + y = 0,$$

takže $0 \cdot x = 0$.

1) Aspoň jeden prvek s touto vlastností existuje, a to 0 (podle vlastnosti 3) z definice). Nechť platí $x + a = x$ pro každé x; potom to speciálně platí i pro $x = 0$, z čehož dostáváme

$$a = a + 0 = 0 + a = 0,$$

tedy $a = 0$ a 0 je jediný prvek s touto vlastností.

2) Definice zaručuje, že ke každému $x \in V$ existuje $y \in V$ takové, že $x + y = 0$. Nechť rovněž $x + z = 0$. Potom

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z,$$

takže $y = z$ a prvek y s vlastností $x + y = 0$ je jediný. Protože platí

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

podle 4), je $y = (-1) \cdot x$.

5) Nechť $\alpha \cdot x = 0$. Je-li $\alpha = 0$, není co dokazovat. Je-li $\alpha \neq 0$, je podle 3)

$$x = 1 \cdot x = (\tfrac{1}{\alpha}\alpha) \cdot x = \tfrac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot x) = \tfrac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

2.1.5 Podprostory

Definice. Podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme jeho podprostorem jestliže má tyto vlastnosti:

1) $0 \in W$,
2) pro každé $x, y \in W$ je $x + y \in W$,
3) pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in W$ je $\alpha x \in W$,

jinými slovy jestliže množina W je sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sečítání a násobení skalárem definovaným na V.

2.1.6 Příklad

Pro každý vektorový prostor V a libovolný jeho prvek $x \in V$ je

$$W = \{\alpha x\,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

podprostor prostoru V, neboť:

- $0 = 0x \in W$,
- $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x \in W$,
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \in W$.

2.1.7 Systém vektorů

Systémem vektorů ve vektorovém prostoru V nazýváme libovolnou konečnou posloupnost jeho prvků $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 0$ (tj. připouštíme i prázdné systémy).

Důležité je, že vektory jsou uspořádané, takže stejný vektor se může vyskytnout vícekrát (tj. může být $x_i = x_j$ pro $i \neq j$); viz např. systém sloupců dané matice.

V obecné neuspořádané množině se každý její prvek může vyskytnout jen jednou.

2.1.8 Lineární kombinace

Definice. Říkáme, že vektor $x \in V$ je lineární kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_n \in V$, $n \geq 1$, jestliže *existují* skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že platí

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

(jinými slovy, jestliže x se dá vyjádřit ve tvaru $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$).

Poznámka. Z hlediska teorie vektorových prostorů je to základní pojem. Lineární kombinací nazýváme i samotný výraz $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$.

2.1.9 Lineární obal

Definice. Je-li $x_1, \dots, x_n$ systém vektorů z V, $n \geq 1$, potom definujeme jeho lineární obal předpisem

$$[x_1, \dots, x_n] = \Big\{x\,;\, x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \text{ pro jisté skaláry } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\},$$

je to tedy množina všech možných lineárních kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$. Pro prázdný systém definujeme $[\emptyset] = \{0\}$.

Věta 34. *Pro libovolné vektory $x_1, \dots, x_n \in V$ je $[x_1, \dots, x_n]$ podprostor prostoru V.*

Důkaz. Položme $W = [x_1, \dots, x_n]$. Je-li $n = 0$, je $W = [\emptyset] = \{0\}$ podle definice, tedy W je podprostor V. Nechť tedy $n \geq 1$. Dokážeme, že W má tři vlastnosti z definice podprostoru.

1) Je $0 \in W$, protože $0 = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot x_j$.

2) Nechť $a, b \in W$, takže $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ pro jistá α_j, β_j, $j = 1, \dots, n$. Potom $a + b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) x_j$, takže $a + b \in W$.

3) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $b \in W$, takže $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ pro jistá β_j, $j = 1, \dots, n$. Potom $\alpha b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha \beta_j) x_j \in W$.

Podle definice podprostoru je tedy W podprostorem V. □

2.1.10 Inkluze a rovnost lineárních obalů

Poznámka. Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_m$ dva systémy vektorů z V, potom:

1) $[x_1, \dots, x_n] \subseteq [y_1, \dots, y_m]$ právě když $x_j \in [y_1, \dots, y_m]$ pro každé $j = 1, \dots, n$,
2) $[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_m]$ právě když $x_j \in [y_1, \dots, y_m]$ pro každé $j = 1, \dots, n$ a $y_i \in [x_1, \dots, x_n]$ pro každé $i = 1, \dots, m$.

Vlastnost 1) plyne z definice lineárního obalu, a 2) dostaneme dvojím použitím 1).

2.2 Systém generátorů a lineární nezávislost

2.2.1 Systém generátorů

Definice. Systém vektorů $x_1, \dots, x_n$ nazýváme systémem generátorů prostoru V (nebo říkáme, že generuje prostor V), jestliže platí

$$V = [x_1, \dots, x_n],$$

jinými slovy jestliže každý vektor $x \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $x_1, \dots, x_n$.

Definice. Vektorový prostor V, ve kterém existuje aspoň jeden systém generátorů, nazýváme konečně generovaný.

Poznámka. V dalším budeme studovat jen konečně generované prostory.

2.2.2 Příklady

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ je konečně generovaný, neboť každou matici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lze psát ve tvaru $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i e_j^T$ (kde $e_i e_j^T$ je matice s jedničkou na ij-tém místě a nulami na ostatních místech), takže mn matic $e_i e_j^T$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, tvoří systém generátorů $\mathbb{R}^{m\times n}$,
- podobně $\mathbb{R}^m$ je konečně generovaný, protože každý vektor $x \in \mathbb{R}^m$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$,
- prostor P_n polynomů stupně $\leq n$ je konečně generovaný, protože každý polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ je lineární kombinací polynomů $1, x, x^2, \ldots, x^n$,
- prostor P_∞ polynomů všech stupňů není konečně generovaný,
- prostor $C(a, b)$ funkcí spojitých na $[a, b]$ není konečně generovaný.

2.2.3 Co vede k pojmu lineární nezávislosti vektorů

Jestliže $x_1, \ldots, x_n$ je systém generátorů prostoru V, potom každý vektor $x \in V$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Na koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ můžeme pohlížet jako na souřadnice vektoru x. *Kdy jsou tyto souřadnice jednoznačně určeny?* Jestliže jednoznačně určeny nejsou, potom lze psát

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j,$$

kde $\alpha_j \neq \beta_j$ pro aspoň jedno j, takže

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j) x_j = 0,$$

kde aspoň jedno $\alpha_j - \beta_j \neq 0$. Vyloučením této možnosti zaručíme jednoznačnost.

2.2.4 Lineární (ne)závislost vektorů

Definice. Systém vektorů $x_1, \ldots, x_n \in V$ nazýváme lineárně závislý, jestliže *existují* čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž aspoň jedno je nenulové, taková, že platí

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \tag{2.1}$$

a lineárně nezávislý v opačném případě (tj. jestliže rovnost (2.1) platí jen pro $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$).

2.2.5 Poznámky

- lineárně závislý systém je podle definice neprázdný; z toho plyne, že prázdný systém je lineárně nezávislý,
- je-li $x_i = 0$ pro jisté i, je systém lineárně závislý (volíme $\alpha_i = 1$, $\alpha_k = 0$ jinak),
- je-li $x_i = x_j$ pro jisté $i \neq j$, je systém lineárně závislý (volíme $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = -1$, $\alpha_k = 0$ jinak),
- podsystém lineárně nezávislého systému je lineárně nezávislý,
- nadsystém lineárně závislého systému je lineárně závislý.

2.2.6 Redukce lineárně závislého systému generátorů

Věta 35. *Je-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně závislý systém generátorů prostoru V, potom existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ je opět systém generátorů prostoru V.*

Poznámka. Výsledný systém $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ však už nemusí být lineárně závislý.

Důkaz. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je lineárně závislý systém generátorů prostoru V. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j = 0 \tag{2.2}$$

pro jistá $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, přičemž existuje k, pro které $\beta_k \neq 0$. Rovnost (2.2) můžeme psát ve tvaru

$$\beta_k x_k + \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \beta_j x_j = 0$$

a odtud vypočítat x_k přičtením $\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} (-\beta_j) x_j$ k oběma stranám a vydělením β_k:

$$x_k = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \left(-\frac{\beta_j}{\beta_k} \right) x_j. \tag{2.3}$$

Nechť x je libovolný prvek V. Protože $x_1, \ldots, x_n$ je systém generátorů prostoru V, existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

S využitím (2.3) můžeme nyní psát

$$x = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \alpha_j x_j + \alpha_k x_k = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \left(\alpha_j - \frac{\beta_j}{\beta_k} \alpha_k \right) x_j.$$

To znamená, že x lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů

$$x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \tag{2.4}$$

a protože x byl libovolný vektor z V, je (2.4) systém generátorů prostoru V. □

2.2.7 Steinitzova věta o výměně

Následující věta hraje v této kapitole centrální roli:

Věta 36. *Nechť $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a $y_1, \ldots, y_n$ systém generátorů prostoru V ($m \geq 0$, $n \geq 0$). Potom platí:*

1) *$m \leq n$,*
2) *existují vzájemně různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ je opět systém generátorů prostoru V.*

Poznámka. Česká terminologie zde kopíruje německou („Steinitzer Austauschsatz"); v anglicky psané literatuře se používá názvu „replacement theorem". Část 2) se někdy pro zjednodušení formuluje jako „po vhodném přečíslování tvoří $x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n$ opět systém generátorů prostoru V".

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle m. Je-li $m = 0$, potom zřejmě $m \le n$ a $y_1, \dots, y_n$ tvoří hledaný systém. Nechť tedy tvrzení platí pro $m - 1 \ge 0$ a nechť $x_1, \dots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a $y_1, \dots, y_n$ je systém generátorů prostoru V. Jelikož systém $x_1, \dots, x_m$ je lineárně nezávislý, je i jeho podsystém $x_1, \dots, x_{m-1}$ lineárně nezávislý a tedy podle indukčního předpokladu je

$$m - 1 \le n \tag{2.5}$$

a existují vzájemně různé indexy $\ell_1, \dots \ell_{n-m+1} \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$x_1, \dots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \dots, y_{\ell_{n-m+1}} \tag{2.6}$$

tvoří systém generátorů prostoru V. Kdyby bylo $m - 1 = n$, potom by to znamenalo, že $x_1, \dots, x_{m-1}$ je systém generátorů V a tedy by bylo možno vyjádřit x_m jako jejich lineární kombinaci

$$x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j,$$

z čehož by plynulo, že systém $x_1, \dots, x_m$ je lineárně závislý ve sporu s předpokladem. Z (2.5) tedy plyne $m - 1 < n$, tj. $m \le n$, čímž je první tvrzení dokázáno. Pro důkaz druhého tvrzení vyjděme z toho, že jelikož vektory (2.6) tvoří systém generátorů V, lze x_m vyjádřit jako jejich lineární kombinaci

$$x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i} \tag{2.7}$$

a aspoň jeden z koeficientů β_i je různý od nuly, protože jinak by vektor x_m byl lineární kombinací vektorů $x_1, \dots, x_{m-1}$ a tedy systém $x_1, \dots, x_m$ by byl lineárně závislý ve sporu s předpokladem. Tedy $\beta_k \neq 0$ pro jisté k a z (2.7) dostáváme

$$y_{\ell_k} = \frac{1}{\beta_k}(x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j - \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i}). \tag{2.8}$$

Jelikož (2.6) tvoří systém generátorů podle indukčního předpokladu, existují ke každému $x \in V$ koeficienty γ_j, δ_i tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j x_j + \sum_{i=1}^{n-m+1} \delta_i y_{\ell_i}.$$

Dosadíme-li sem vyjádření y_{ℓ_k} z (2.8), dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j x_j + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-m+1} \delta_i y_{\ell_i} + \frac{\delta_k}{\beta_k}(x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j - \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i}) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} (\gamma_j - \frac{\delta_k}{\beta_k}\alpha_j) x_j + \frac{\delta_k}{\beta_k} x_m + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-m+1} (\delta_i - \frac{\delta_k}{\beta_k}\beta_i) y_{\ell_i}, \end{aligned}$$

takže x je lineární kombinací vektorů

$$x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, y_{\ell_1}, \dots, y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_{k+1}}, \dots, y_{\ell_{n-m+1}}. \tag{2.9}$$

Protože x byl libovolný vektor z V, dokázali jsme tím, že (2.9) je systém generátorů prostoru V. Přečíslujeme-li nyní $n-m$ vektorů $y_{\ell_1}, \dots, y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_{k+1}}, \dots, y_{\ell_{n-m+1}}$ jako $y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$, dostáváme tvrzení věty pro m. Tím je důkaz indukcí ukončen. □

2.3 Báze

2.3.1 Báze a její existence

Definice. Lineárně nezávislý systém generátorů konečně generovaného prostoru V nazýváme jeho bází.

Poznámka. Povšimněte si, že jde o konjunkci dvou vlastností: báze je systém generátorů, který je navíc lineárně nezávislý.

Věta 37. *Každý konečně generovaný prostor V má bázi.*

Důkaz. Protože V je konečně generovaný, má aspoň jeden systém generátorů. Položme

$$M = \{m \geq 0\,;\, V \text{ má systém generátorů o } m \text{ prvcích}\}.$$

Potom M je neprázdná množina přirozených čísel a jako taková má nejmenší prvek m_0. Nechť $x_1, \dots, x_{m_0}$ je jemu odpovídající systém generátorů. Kdyby tento systém byl lineárně závislý, potom podle věty 35 by z něho bylo možno vyřadit jistý vektor x_k tak, že

$$x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m_0}$$

by byl opět systém generátorů s počtem prvků $m_0 - 1 \in M$ ve sporu s tím, že m_0 je nejmenší prvek množiny M. Předpoklad lineární závislosti systému $x_1, \dots, x_{m_0}$ vede tedy ke sporu. To znamená, že systém $x_1, \dots, x_{m_0}$ je lineárně nezávislý, a jelikož je to systém generátorů, dostáváme tak, že tvoří bázi prostoru V. □

2.3.2 Smysl zavedení báze: souřadnice

Věta 38. *Je-li $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 1$, báze prostoru V, potom ke každému $x \in V$ existuje* právě jedna *n-tice skalárů $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ taková, že platí*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Definice. Čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazýváme souřadnicemi vektoru x v bázi $x_1, \dots, x_n$.

Důkaz. Nechť $x \in V$. Protože $x_1, \dots, x_n$ tvoří bázi, je to systém generátorů a tedy existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j. \tag{2.10}$$

Jestliže platí rovněž

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

pro jistá $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, potom odečtením dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) x_j = x - x = 0$$

a jelikož systém $x_1, \ldots, x_n$ je lineárně nezávislý, musí platit

$$\beta_j = \alpha_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

tedy vyjádření (2.10) vektoru x v bázi $x_1, \ldots, x_n$ je jednoznačné. (Jak vidíme, jde vlastně o opakování postupu, který nás v části 2.2.3 dovedl k pojmu lineární nezávislosti.) $\square$

2.3.3 Shrnutí

Prvek $x \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků systému $x_1, \ldots, x_n \in V$

- aspoň jedním způsobem, je-li to systém generátorů,
- právě jedním způsobem, je-li to báze,
- nejvýše jedním způsobem, je-li lineárně nezávislý.

2.4 Dimenze

2.4.1 Dimenze vektorového prostoru

Věta 39. *Všechny báze konečně generovaného prostoru V mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Nechť $x_1, \ldots, x_m$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou libovolné dvě báze V. Potom:

(a) $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů, takže podle Steinitzovy věty je $m \leq n$,

(b) $y_1, \ldots, y_n$ je lineárně nezávislý systém a $x_1, \ldots, x_m$ je systém generátorů, takže podle téže věty je $n \leq m$.

Dokázali jsme, že platí jak $m \leq n$, tak $n \leq m$, celkem tedy $m = n$ a obě báze mají stejný počet prvků. $\square$

Definice. Počet prvků báze[1] nazýváme dimenzí prostoru V a značíme ji $\dim V$.

2.4.2 Příklady

- pro $V = \{0\}$ je prázdný systém $\emptyset$ lineárně nezávislý a $[\emptyset] = \{0\}$, tedy prázdný systém tvoří bázi prostoru $\{0\}$ a proto $\dim \{0\} = 0$,

[1] Uvědomte si, že tuto definici můžeme vyslovit teprve poté, co jsme dokázali větu 39.

- systém vektorů $e_i e_j^T$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ tvoří systém generátorů prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$ (viz část 2.2.2) a je lineárně nezávislý: je-li
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i e_j^T = 0,$$
potom nalevo je matice $A = (\alpha_{ij})$, tedy z $A = 0$ plyne $\alpha_{ij} = 0$ pro všechna i, j. Závěr: $\mathbb{R}^{m \times n}$ má dimenzi mn,
- podobně systém vektorů e_i, $i = 1, \dots, m$, tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^m$, tedy $\mathbb{R}^m$ má dimenzi m.

2.4.3 Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Věta 40. *V konečně generovaném prostoru V platí:*

1) je-li $x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, potom $m \le \dim V$ a je-li $m = \dim V$, potom $x_1, \dots, x_m$ je báze V,

2) je-li $y_1, \dots, y_n$ systém generátorů prostoru V, potom $\dim V \le n$ a je-li $\dim V = n$, potom $y_1, \dots, y_n$ je báze V.

Poznámka. Dá se tedy rovněž říci, že báze je maximální (z hlediska počtu prvků) lineárně nezávislý systém a minimální (z hlediska počtu prvků) systém generátorů.

Důkaz. Nechť $z_1, \dots, z_d$ je báze V (která existuje podle věty 37), takže $d = \dim V$.

1) Je-li $x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém, potom vzhledem k tomu, že $z_1, \dots, z_d$ je systém generátorů, platí podle Steinitzovy věty $m \le d = \dim V$. Je-li $m = \dim V$, potom systém $x_1, \dots, x_m$ lze podle téže věty doplnit o $d - m = 0$ vektorů na systém generátorů prostoru V. Z toho plyne, že $x_1, \dots, x_m$ je už systém generátorů a proto je to báze V.

2) Je-li $y_1, \dots, y_n$ systém generátorů, potom opět podle Steinitzovy věty s ohledem na to, že systém $z_1, \dots, z_d$ je lineárně nezávislý, platí $\dim V = d \le n$. Je-li $\dim V = n$, potom v případě, že by $y_1, \dots, y_n$ byl lineárně závislý, bylo by možno z něj podle věty 35 vyloučit jeden vektor a systém by zůstal systémem generátorů o $d - 1$ prvcích, přičemž lineárně nezávislý systém $z_1, \dots, z_d$ má d prvků. To by protiřečilo první části Steinitzovy věty, proto systém $y_1, \dots, y_n$ je lineárně nezávislý a tedy tvoří bázi V. □

2.4.4 Lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi

Věta 41. *Každý lineárně nezávislý systém v konečně generovaném prostoru V lze rozšířit na bázi.*

Důkaz. Nechť $x_1, \dots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a nechť $z_1, \dots, z_d$ je libovolná báze V. Potom podle Steinitzovy věty existují $k_1, \dots, k_{d-m}$ tak, že $x_1, \dots, x_m, z_{k_1}, \dots, z_{k_{d-m}}$ je systém generátorů který sestává z d prvků, kde $d = \dim V$, a proto podle druhé části věty 40 je to báze prostoru V, která je rozšířením systému $x_1, \dots, x_m$. □

2.4.5 Dimenze podprostoru

Věta 42. *Každý podprostor W konečně generovaného prostoru V je konečně generovaný a platí pro něj*

$$\dim W \leq \dim V.$$

Navíc, je-li $\dim W = \dim V$*, potom* $W = V$*.*

Důkaz. Položme

$$M = \{m \geq 0\,;\, W \text{ obsahuje lineárně nezávislý systém o } m \text{ prvcích}\}.$$

Potom $0 \in M$ (prázdný systém je lineárně nezávislý, viz 2.2.5), takže $M \neq \emptyset$. Je-li $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve W, potom je lineárně nezávislý i ve V a tedy podle věty 40 je $m \leq \dim V$. To ukazuje, že množina M je shora omezená a proto obsahuje největší prvek m_1; nechť $x_1, \ldots, x_{m_1}$ je jemu odpovídající lineárně nezávislý systém ve W. Dokážeme, že $x_1, \ldots, x_{m_1}$ je báze W. Kdyby ne, potom by systém $x_1, \ldots, x_{m_1}$ nebyl systémem generátorů W a tedy by existoval prvek $x \in W - [x_1, \ldots, x_{m_1}]$ jehož přidáním k systému $x_1, \ldots, x_{m_1}$ bychom dostali lineárně nezávislý systém ve W o $m_1 + 1$ prvcích, což je spor s definicí m_1 jakožto největšího prvku množiny M. Tedy $x_1, \ldots, x_{m_1}$ je systém generátorů W, takže je to báze W a platí $\dim W = m_1 \leq \dim V$. Je-li $\dim W = \dim V$, potom podle první části věty 40 je $x_1, \ldots, x_{m_1}$ báze V a tedy $W = [x_1, \ldots, x_{m_1}] = V$. $\square$

2.4.6 Tvar podprostoru

Víme, že je-li $x_1, \ldots, x_m \in V$, potom $[x_1, \ldots, x_m]$ je podprostor V (věta 34). Platí i opak:

Věta 43. *Pro každý podprostor W konečně generovaného prostoru V platí*

$$W = [x_1, \ldots, x_m]$$

pro jisté vektory $x_1, \ldots, x_m$, které lze volit tak, aby $m \leq \dim V$.

Důkaz. Je-li W podprostor konečně generovaného prostoru V, potom podle věty 42 má bázi $x_1, \ldots, x_m$, kde $m \leq \dim V$, a platí $W = [x_1, \ldots, x_m]$. $\square$

2.4.7 Spojení a průnik podprostorů

Věta 44. *Jsou-li W_1, W_2 podprostory prostoru V, potom i $W_1 \cap W_2$ a*

$$W_1 + W_2 := \{x\,;\, x = x_1 + x_2 \text{ pro jisté } x_1 \in W_1,\, x_2 \in W_2\}$$

jsou podprostory prostoru V.

Definice. Podprostor $W_1 + W_2$ nazýváme spojením podprostorů W_1 a W_2.

Důkaz. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory prostoru V.

(a) Dokážeme, že $W_1 \cap W_2$ je podprostor V (podle definice 2.1.5). Je $0 \in W_1$ a $0 \in W_2$, takže $0 \in W_1 \cap W_2$. Jsou-li $x, y \in W_1 \cap W_2$, potom $x, y \in W_1$, takže $x + y \in W_1$, a analogicky $x, y \in W_2$, takže $x + y \in W_2$, celkem tedy $x + y \in W_1 \cap W_2$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in W_1 \cap W_2$, potom $x \in W_1$, takže $\alpha x \in W_1$, a $x \in W_2$, takže $\alpha x \in W_2$, celkem $\alpha x \in W_1 \cap W_2$. Dokázali jsme, že $W_1 \cap W_2$ má tři vlastnosti z definice podprostoru a je to tedy podprostor V.

(b) Dokážeme, že $W_1 + W_2$ je podprostor V. Zřejmě $0 \in W_1 + W_2$, protože $0 \in W_1$ a $0 \in W_2$. Nechť $x, y \in W_1 + W_2$. Potom x je tvaru $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, a y je tvaru $y = y_1 + y_2$, kde $y_1 \in W_1$ a $y_2 \in W_2$. Potom $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, kde $x_1 + y_1 \in W_1$ a $x_2 + y_2 \in W_2$ s ohledem na to, že W_1, W_2 jsou podprostory, tedy $x + y \in W_1 + W_2$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in W_1 + W_2$, potom $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, tedy $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$, kde $\alpha x_1 \in W_1$ a $\alpha x_2 \in W_2$, což dává $\alpha x \in W_1 + W_2$. Dokázali jsme, že i $W_1 + W_2$ má tři vlastnosti z definice podprostoru a je to tedy opět podprostor V. $\square$

Poznámka. Sjednocení podprostorů $W_1 \cup W_2$ obecně není podprostor; proto zavádíme spojení $W_1 + W_2$, které je nejmenším (ve smyslu inkluze) podprostorem obsahujícím množinu $W_1 \cup W_2$.

2.4.8 Věta o dimenzi spojení a průniku

Věta 45. *Pro libovolné podprostory W_1, W_2 konečně generovaného prostoru V platí*

$$\dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Důkaz. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory konečně generovaného prostoru V. Potom $W_1 \cap W_2$ je podprostor V (věta 44) a má bázi $z_1, \dots, z_p$, kde $p \leq \dim V$ (věta 42). Protože $z_1, \dots, z_p$ je lineárně nezávislý systém ve W_1, lze ho podle věty 41 rozšířit na bázi

$$z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_m \tag{2.11}$$

podprostoru W_1 a analogicky ho lze rozšířit na bázi

$$z_1, \dots, z_p, y_1, \dots, y_n \tag{2.12}$$

podprostoru W_2. Dokážeme, že

$$z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \tag{2.13}$$

je báze $W_1 + W_2$. Především dokážeme, že (2.13) je systém generátorů podprostoru $W_1 + W_2$. Je-li $t \in W_1 + W_2$, potom $t = t_1 + t_2$, kde $t_1 \in W_1$ a $t_2 \in W_2$. Protože (2.11), (2.12) jsou báze W_1 resp. W_2, lze psát

$$t_1 = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,$$

$$t_2 = \sum_{k=1}^{p} \delta_k z_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$$

pro jistá $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_k$, takže

$$t = t_1 + t_2 = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_k + \delta_k) z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j,$$

což ukazuje, že t je lineární kombinací systému (2.13) a protože t byl libovolný prvek podprostoru $W_1 + W_2$, znamená to, že (2.13) je systém generátorů $W_1 + W_2$.

Dále dokážeme, že systém (2.13) je lineárně nezávislý. Předpokládejme, že platí

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = 0 \tag{2.14}$$

pro jistá $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$. Potom

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j. \tag{2.15}$$

Označme t vektor stojící na levé (resp. pravé) straně (2.15). Potom podle (2.11), (2.15) je $t \in W_1$ a podle (2.12), (2.15) je $t \in W_2$, tedy $t \in W_1 \cap W_2$ a protože $z_1, \ldots, z_p$ je báze $W_1 \cap W_2$, lze psát

$$t = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k$$

pro jistá ε_k. Z toho dostáváme

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = 0,$$

a jelikož (2.12) je báze W_2, plyne odsud

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_p = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0, \tag{2.16}$$

a dosazením do (2.15) dostáváme

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_p = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0 \tag{2.17}$$

vzhledem k tomu, že (2.11) je báze W_1. Z (2.16), (2.17) plyne, že všechny koeficienty v (2.14) jsou nulové, takže systém (2.13) je lineárně nezávislý a protože jsme již dříve dokázali, že je to systém generátorů podprostoru $W_1 + W_2$, dostáváme tak, že je to báze $W_1 + W_2$. Z toho nyní podle (2.11), (2.12), (2.13) plyne, že

$$\dim(W_1 + W_2) = p + m + n = (p + m) + (p + n) - p = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2),$$

což je tvrzení věty. $\square$

Věta 46. *Jsou-li* W_1, W_2 *podprostory* V *a je-li* $\dim W_1 + \dim W_2 > \dim V$, *potom*

$$\dim (W_1 \cap W_2) \geq 1.$$

Důkaz. V tomto případě je $\dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 + W_2) > \dim V - \dim (W_1 + W_2) \geq 0$, takže $\dim (W_1 \cap W_2) \geq 1$. $\square$

Poznámka. Jak uvidíme později, tento jednoduchý důsledek věty o dimenzi spojení a průniku je podstatnou složkou některých komplikovaných důkazů (např. Courant-Fischerovy věty 160 aj.).

2.4.9 Direktní součet podprostorů

Definice. Platí-li $V = W_1 + W_2$, kde $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, potom V nazýváme direktním součtem podprostorů W_1, W_2 a zapisujeme $V = W_1 \oplus W_2$.

Věta 47. *Je-li $V = W_1 \oplus W_2$, potom každý vektor $x \in V$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru*

$$x = x_1 + x_2,$$

kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$.

Důkaz. Nechť $V = W_1 \oplus W_2$. Protože $V = W_1 + W_2$, lze každý vektor $x \in V$ psát ve tvaru

$$x = x_1 + x_2, \tag{2.18}$$

kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$. Nechť platí rovněž

$$x = y_1 + y_2,$$

kde $y_1 \in W_1$ a $y_2 \in W_2$. Potom z rovnosti

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

plyne

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2,$$

kde $x_1 - y_1 \in W_1$ a $y_2 - x_2 \in W_2$, takže $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$. Protože $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ podle definice, je $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$, tedy $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$, takže vyjádření x ve tvaru (2.18), kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, je jednoznačné. □

Příklad. Je-li $x_1, \ldots, x_n$ báze V, potom pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$V = [x_1, \ldots, x_k] \oplus [x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

2.4.10 Dimenze direktního součtu

Věta 48. *Je-li V konečně generovaný a $V = W_1 \oplus W_2$, potom*

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Důkaz. Je-li V konečně generovaný a platí-li $V = W_1 \oplus W_2$, potom $V = W_1 + W_2$ a $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, takže z věty 45 přímo plyne

$$\dim V = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$ □

Kapitola 3

Vektorové prostory se skalárním součinem

3.1 Skalární součin a norma

3.1.1 Vektorový prostor se skalárním součinem

Definice. Vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ se nazývá vektorovým prostorem se skalárním součinem, jestliže je na něm navíc definovaná operace, která každé dvojici $x, y \in V$ přiřazuje skalár $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in V$, přičemž $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = 0$,
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ pro každé $x, y, z \in V$,
3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ pro každé $x, y \in V$.

Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, potom $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ a vlastnost 4) se nahrazuje vlastností

4') $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in V$,

kde pruh značí komplexně sdružené číslo.

3.1.2 Důsledky

Jako důsledky definice dostáváme tyto vlastnosti:

- $\langle x, y + z\rangle = \langle y + z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ nad $\mathbb{R}$,
- $\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ nad $\mathbb{C}$,
- $\langle x, \alpha y\rangle = \langle \alpha y, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ nad $\mathbb{R}$,
- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ nad $\mathbb{C}$,
- $\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

3.1.3 Příklady

Dříve definované vektorové prostory se stanou prostory se skalárním součinem, zavedeme-li

- v $\mathbb{R}^{m\times n}$: $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$,
- v $\mathbb{C}^{m\times n}$: $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}\overline{B_{ij}}$,
- v $\mathbb{R}^{m}$: $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$,
- v $\mathbb{C}^{m}$: $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$,
- v $C(a,b)$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

3.1.4 Norma

Až do konce této kapitoly předpokládáme, že V je vektorový prostor se skalárním součinem a nebudeme už většinou tento předpoklad explicitně uvádět.

Definice. Pro každé $x \in V$ definujeme normu vektoru x předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Poznámka. To je možné díky vlastnosti 1), podle které $\langle x, x\rangle \geq 0$. Norma je tedy nezáporné reálné číslo i pro prostory nad $\mathbb{C}$ a představuje „délku” vektoru x.

3.1.5 Ortogonální vektory

Definice. Vektory $x, y \in V$ se nazývají ortogonální (kolmé), jestliže $\langle x, y\rangle = 0$.

Věta 49. (Pythagorova věta) *Jsou-li $x, y \in V$ ortogonální, potom*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz. Platí

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

protože $\langle x, y\rangle = 0$ a $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = \overline{0} = 0$. □

Poznámka. V prostoru nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace, v prostoru nad $\mathbb{C}$ obecně ne.

3.1.6 Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta 50. *Ve vektorovém prostoru V se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ pro každé $x, y \in V$ platí*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Poznámka. U prostorů nad $\mathbb{C}$ jde vlevo o absolutní hodnotu komplexního čísla, tj. $|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Autorství. Cauchy 1821 pro $\mathbb{R}^m$, Schwarz $\sim$1880 pro $C(a,b)$.

Důkaz. Nerovnost jistě platí pro $\langle x,y\rangle = 0$ nebo $x = 0$. Nechť tedy $\langle x,y\rangle \neq 0$ a $x \neq 0$. Potom existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, že $\alpha y - x$ a x jsou ortogonální: skutečně, rovnost $\langle \alpha y - x, x\rangle = \alpha\langle y,x\rangle - \langle x,x\rangle = 0$ je splněna pro $\alpha = \langle x,x\rangle/\langle y,x\rangle = \|x\|^2/\langle y,x\rangle$. Z ortogonality vektorů $\alpha y - x$ a x plyne potom podle Pythagorovy věty

$$\|\alpha y\|^2 = \|(\alpha y - x) + x\|^2 = \|\alpha y - x\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2,$$

tedy

$$\|\alpha y\| \geq \|x\|$$

a dosazením za α

$$\frac{\|x\|^2}{|\langle y,x\rangle|}\|y\| \geq \|x\|,$$

tj.

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$ □

Instruktivní je elementární důkaz Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pro $V = \mathbb{R}^m$:

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_iy_j - x_jy_i)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_i^2y_j^2 - 2x_iy_jx_jy_i + x_j^2y_i^2) \\ &= (\sum_{i=1}^{m} x_i^2)(\sum_{j=1}^{m} y_j^2) - 2(\sum_{i=1}^{m} x_iy_i)(\sum_{j=1}^{m} x_jy_j) + (\sum_{j=1}^{m} x_j^2)(\sum_{i=1}^{m} y_i^2) \\ &= 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x^Ty)^2, \end{aligned}$$

tedy

$$|x^Ty| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$ □

3.1.7 Vlastnosti normy

Věta 51. *Ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ pro každé $x,y \in V$ a každý skalár α platí:*

1) $\|x\| \geq 0$ *a* $\|x\| = 0$ *právě když* $x = 0$,
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Poznámka. Vlastnosti 2) se říká trojúhelníková nerovnost.

Důkaz. Tvrzení 1) a 3) plynou přímo z definice normy. S použitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

což dává po odmocnění tvrzení 2). □

3.1.8 Speciální normy a jejich značení

Normy indukované dříve zavedenými skalárními součiny:

- v $\mathbb{R}^{m\times n}$: $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \|A\|_F$,
- v $\mathbb{C}^{m\times n}$: $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2} = \|A\|_F$,
- v $\mathbb{R}^{m}$: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2} = \|x\|_2$,
- v $\mathbb{C}^{m}$: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^2} = \|x\|_2$,
- v $C(a,b)$: $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$

($\|A\|_F$ se nazývá Frobeniova norma, $\|x\|_2$ eukleidovská norma).

Poznámka. Až dosud jsme eukleidovskou normu $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$ v $\mathbb{R}^m$ značili $\|x\|$; dále ji budeme pro odlišení od jiných norem důsledně značit $\|x\|_2$.

3.2 Ortonormální báze

3.2.1 Ortonormální systém

Definice. Systém vektorů $z_1, \ldots, z_m \in V$ se nazývá ortonormální, jestliže platí $\langle z_i, z_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$ a $\|z_i\| = 1$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Prázdný systém považujeme definitoricky za ortonormální.

Poznámka. Systém ve kterém platí pouze $\langle z_i, z_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$ (bez požadavku jednotkové normy vektorů) se nazývá ortogonální. Takové systémy zde nebudeme uvažovat, uvádíme jen pro úplnost.

Poznámka. Pro každý vektor $x \neq 0$ je $\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$. Tohoto obratu se často používá při úpravě vektoru na jednotkovou normu.

Věta 52. *Každý ortonormální systém je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální systém a je-li $\sum_{j=1}^m \alpha_j z_j = 0$, potom pro každé $i = 1, \ldots, m$ dostáváme $0 = \langle 0, z_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^m \alpha_j z_j, z_i\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle z_j, z_i\rangle = \alpha_i\langle z_i, z_i\rangle = \alpha_i$, takže systém je lineárně nezávislý podle definice. □

3.2.2 Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 53. *Nechť $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém ve V. Položíme-li*

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j\rangle z_j, \tag{3.1}$$

$$z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k \tag{3.2}$$

pro $k = 1, \dots, m$, *potom tyto vektory jsou dobře definované*[1], $z_1, \dots, z_m$ *tvoří ortonormální systém a platí*

$$[z_1, \dots, z_m] = [x_1, \dots, x_m].$$

Poznámka. Gram-Schmidtův proces tedy z lineárně nezávislého systému $x_1, \dots, x_m$ vytvoří ortonormální systém $z_1, \dots, z_m$, který generuje stejný podprostor (speciálně, z báze vytvoří ortonormální bázi).

Důkaz. Dokážeme indukcí pro $k = 1, \dots, m$ že $y_k \neq 0$, $z_1, \dots, z_k$ je ortonormální systém a $[z_1, \dots, z_k] = [x_1, \dots, x_k]$. Pro $k = m$ pak dostáváme tvrzení věty.

1. Pro $k = 1$ je $y_1 = x_1 \neq 0$ z lineární nezávislosti, $\|z_1\| = 1$ a $[z_1] = [x_1]$ protože z_1 je násobkem x_1.

2. Nechť tvrzení platí pro $k - 1 < m$. Kdyby bylo $y_k = 0$, bylo by $x_k \in [z_1, \dots, z_{k-1}] = [x_1, \dots, x_{k-1}]$ ve sporu s lineární nezávislostí; proto $y_k \neq 0$. Jelikož $z_1, \dots, z_{k-1}$ tvoří ortonormální systém, je $\langle z_k, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_k\|}\langle y_k, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_k\|}(\langle x_k, z_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle \langle z_j, z_i \rangle) = \frac{1}{\|y_k\|}(\langle x_k, z_i \rangle - \langle x_k, z_i \rangle) = 0$ pro každé $i \leq k - 1$ a $\|z_k\| = 1$, takže $z_1, \dots, z_k$ tvoří ortonormální systém. Dále, z (3.1), (3.2) plyne $z_k \in [z_1, \dots, z_{k-1}, x_k] \subseteq [x_1, \dots, x_k]$, tedy $[z_1, \dots, z_k] \subseteq [x_1, \dots, x_k]$, a podobně z $x_k \in [z_1, \dots, z_k]$ plyne $[x_1, \dots, x_k] \subseteq [z_1, \dots, z_k]$, celkem tedy $[z_1, \dots, z_k] = [x_1, \dots, x_k]$. □

3.2.3 Gram-Schmidtův proces (algoritmus)

0. Dány: $x_1, \dots, x_m \in V$, lineárně nezávislé.

1. Pro $k = 1, \dots, m$ proveď

$$\begin{aligned} y_k &:= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j\,; \\ z_k &:= \tfrac{1}{\|y_k\|} y_k; \end{aligned}$$

2. Ukonči: $z_1, \dots, z_m$ je ortonormální systém ve V a $[z_1, \dots, z_m] = [x_1, \dots, x_m]$.

3.2.4 Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost a Fourierův rozvoj

Věta 54. *Nechť* $z_1, \dots, z_m$ *je ortonormální systém ve* V *a nechť* $x \in V$. *Potom platí:*

1) **(Besselova nerovnost)** $\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^m |\langle x, z_j \rangle|^2$,

2) **(Parsevalova rovnost)** $x \in [z_1, \dots, z_m]$ *právě když* $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m |\langle x, z_j \rangle|^2$,

3) **(Fourierův rozvoj)** *je-li* $x \in [z_1, \dots, z_m]$, *potom* $x = \sum_{j=1}^m \langle x, z_j \rangle z_j$.

Poznámka. Vlastnosti 2) a 3) umožňují rozhodnout, zda daný vektor patří do podprostoru generovaného $z_1, \dots, z_m$ a v kladném případě jednoduše vypočítat jeho souřadnice.

Důkaz. Pro každé $x \in V$ roznásobením dostáváme

$$\Big\langle x - \sum_{j=1}^m \langle x, z_j \rangle z_j, x - \sum_{j=1}^m \langle x, z_j \rangle z_j \Big\rangle = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^m |\langle x, z_j \rangle|^2. \tag{3.3}$$

[1] Tj. nedochází k dělení nulou.

Jelikož první člen v (3.3) je nezáporný, dostáváme Besselovu nerovnost $\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{m} |\langle x, z_j\rangle|^2$. Nastává-li v této nerovnosti rovnost, potom skalární součin na levé straně (3.3) je roven 0 a tedy $x = \sum_{j=1}^{m}\langle x, z_j\rangle z_j \in [z_1, \dots, z_m]$. Naopak, je-li $x \in [z_1, \dots, z_m]$, potom z $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_j$ pro každé i dostáváme přenásobením z_i zprava $\langle x, z_i\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle z_j, z_i\rangle = \alpha_i$, tedy $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_j = \sum_{j=1}^{m}\langle x, z_j\rangle z_j$ a odsud $\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{m}\langle x, z_i\rangle z_i, \sum_{j=1}^{m}\langle x, z_j\rangle z_j\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle x, z_i\rangle\overline{\langle x, z_j\rangle}\langle z_i, z_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} |\langle x, z_j\rangle|^2$. Tím jsme dokázali Fourierův rozvoj a současně i opačnou implikaci v Parsevalově rovnosti. □

3.2.5 Ortonormální báze

V dalším předpokládáme, že V je konečně generovaný prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem.

Definice. Bázi prostoru V, která tvoří ortonormální systém, nazýváme ortonormální bází.

Příklad. Vektory $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $i = 1, \dots, n$, tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ (tzv. standardní).

3.2.6 Existence ortonormální báze

Věta 55. *Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.*

Důkaz. Konečně generovaný prostor má bázi (věta 37) a tu lze Gram-Schmidtovým procesem převést na ortonormální systém který je lineárně nezávislý podle věty 52 a generuje celý prostor podle věty 53, takže tvoří ortonormální bázi. □

Věta 56. *Každý ortonormální systém vektorů lze rozšířit na ortonormální bázi.*

Důkaz. Ortonormální systém $z_1, \dots, z_m$ rozšíříme podle věty 41 na bázi $z_1, \dots, z_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ a tu převedeme Gram-Schmidtovým procesem na ortonormální bázi $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ (z (3.1) plyne, že $z_1, \dots, z_m$ se během procesu nezmění). □

3.2.7 Smysl zavedení ortonormální báze: vzorce pro souřadnice

Následující tvrzení je přímým důsledkem věty 54, vzhledem k jeho zásadnímu významu ho však uvádíme jako samostatnou větu:

Věta 57. *Nechť $z_1, \dots, z_n$ je ortonormální báze V. Potom pro každé $x \in V$ platí*

$$x = \sum_{j=1}^{n}\langle x, z_j\rangle z_j. \tag{3.4}$$

Poznámka. Souřadnicím $\langle x, z_j\rangle$, $j = 1, \dots, n$, se říká Fourierovy koeficienty.

3.3 Intermezzo

3.3.1 Fourierovy řady

Uvažujme vektorový prostor spojitých reálných funkcí $C(-\pi,\pi)$ na intervalu $[-\pi,\pi]$ se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. J. B. Fourier (1768-1830) byl první, kdo si všiml, že funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}},\dots$$

tvoří *spočetný* ortonormální systém v $C(-\pi,\pi)$. Sestrojíme-li formální analogii vzorce (3.4) pro tento případ, dostáváme řadu

$$\begin{aligned} f &= \left\langle f, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \tfrac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \tfrac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \tfrac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \tfrac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} \\ &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx), \end{aligned}$$

kde

$$a_j = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos jx\,dx, \quad b_j = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin jx\,dx.$$

Fourier dokázal, že skutečně platí

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

pro každé $x \in (-\pi,\pi)$. Pozoruhodné na tomto výsledku je, že obecná spojitá funkce $f(x)$ je vyjádřena řadou sestávající z periodických funkcí („kmitů"; $\cos jx$ resp. $\sin jx$ má periodu $2\pi/j$). Proto jsou Fourierovy řady základním nástrojem pro zpracování signálu (speciálně zvuku).

3.4 Ortogonální doplněk a ortogonální projekce

3.4.1 Ortogonální doplněk

Definice. Ortogonálním doplňkem podprostoru W prostoru V nazýváme množinu

$$W^{\perp} = \{x \in V\,;\ \langle x,y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in W\}.$$

Věta 58. *$W^{\perp}$ je podprostor prostoru V.*

Důkaz. Dokážeme, že $W^{\perp}$ má tři vlastnosti z definice podprostoru 2.1.5.

1) Pro každé $y \in W$ je $\langle 0,y\rangle = 0$, takže $0 \in W^{\perp}$.

2) Jsou-li $x_1, x_2 \in W^{\perp}$, potom pro každé $y \in W$ je $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle = 0 + 0 = 0$, tedy $x_1 + x_2 \in W^{\perp}$.

3) Je-li $x \in W^{\perp}$ a α je skalár, potom pro každé $y \in W$ je $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle = \alpha \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha x \in W^{\perp}$. $\square$

3.4.2 Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta 59. *Nechť W je podprostor V. Potom platí:*

1) *je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze W a je-li $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V, potom $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $W^\perp$,*
2) $(W^\perp)^\perp = W$,
3) $V = W \oplus W^\perp$,
4) $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

Důkaz. 1) Každé $x \in V$ má Fourierův rozvoj $x = \sum_{j=1}^m \langle x, z_j\rangle z_j + \sum_{j=m+1}^n \langle x, z_j\rangle z_j$. Je-li $x \in W^\perp$, je $\langle x, z_j\rangle = 0$ pro $j = 1, \dots, m$, tedy $x = \sum_{j=m+1}^n \langle x, z_j\rangle z_j \in [z_{m+1}, \dots, z_n]$. Naopak, je-li $x \in [z_{m+1}, \dots, z_n]$, potom $x = \sum_{j=m+1}^n \langle x, z_j\rangle z_j$ (věta 54, 3)) a z jednoznačnosti vyjádření x v bázi $z_1, \dots, z_n$ plyne, že $\langle x, z_j\rangle = 0$ pro $j = 1, \dots, m$, tj. že $x \in W^\perp$. Tím jsme dokázali, že $W^\perp = [z_{m+1}, \dots, z_n]$ a jelikož ortonormální systém $z_{m+1}, \dots, z_n$ je lineárně nezávislý, je to ortonormální báze $W^\perp$. Současně $\dim W^\perp = n - m = \dim V - \dim W$, což dokazuje 4).

2) Rozšíříme-li ortonormální bázi $z_{m+1}, \dots, z_n$ podprostoru $W^\perp$ na bázi $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$, dostáváme podle 1), že $(W^\perp)^\perp = [z_1, \dots, z_m] = W$.

3) Pro každé $x \in V$ je $x = \sum_{j=1}^m \langle x, z_j\rangle z_j + \sum_{j=m+1}^n \langle x, z_j\rangle z_j \in W + W^\perp$, takže $V = W + W^\perp$. Je-li $x \in W \cap W^\perp$, je $\langle x, x\rangle = 0$, tj. $x = 0$, což dává $W \cap W^\perp = \{0\}$ a proto $V = W \oplus W^\perp$. □

3.4.3 Ortogonální projekce na podprostor

Věta 60. *Nechť W je podprostor V. Potom ke každému $x \in V$ existuje* právě jeden *vektor $x_W \in W$ s vlastností*

$$\|x - x_W\| = \min\{\|x - y\|\,;\, y \in W\}.$$

Poznámka. x_W je tedy vektor z W, který má ze všech vektorů ve W nejmenší vzdálenost od x.

Důkaz. Nechť $z_1, \dots, z_m$ je ortonormální báze W a $z_1, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V. Položme $x_W = \sum_{j=1}^m \langle x, z_j\rangle z_j \in W$, potom $x - x_W = \sum_{j=m+1}^n \langle x, z_j\rangle z_j \in W^\perp$ podle věty 59 a pro každé $y \in W$ je $x_W - y \in W$, tedy $\langle x - x_W, x_W - y\rangle = 0$, a podle Pythagorovy věty $\|x - y\|^2 = \|(x - x_W) + (x_W - y)\|^2 = \|x - x_W\|^2 + \|x_W - y\|^2 \geq \|x - x_W\|^2$, přičemž rovnost se nabývá právě když $\|x_W - y\| = 0$, tj. pro $y = x_W$. □

Definice. Vektor x_W se nazývá ortogonální projekcí vektoru x na podprostor W.

3.4.4 Výpočet ortogonální projekce

Věta 61. *Nechť $z_1, \dots, z_m$ je ortonormální báze podprostoru W. Potom pro každé $x \in V$ je*

$$x_W = \sum_{j=1}^m \langle x, z_j\rangle z_j.$$

(Dokázáno v důkazu věty 60.)

Poznámka. Povšimněte si pozoruhodného faktu, že při libovolné volbě ortonormální báze $z_1, \dots, z_m$ podprostoru W dává $\sum_{j=1}^m \langle x, z_j\rangle z_j$ vždy stejný výsledek, totiž x_W.

Věta 62. *Nechť W je podprostor prostoru V. Potom pro každé $x \in V$ je*

$$x = x_W + x_{W^\perp}.$$

(Plyne ihned z věty 59, tvrzení 1), a z věty 61.)

Kapitola 4

Lineární zobrazení

Tato kapitola tvoří samostatnou část, na kterou už další kapitoly v zásadě nenavazují. Uvádíme proto některé důkazy v zestručněné podobě.

4.1 Základní pojmy a vlastnosti

4.1.1 Lineární zobrazení

Definice. Nechť V, W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Zobrazení $f : V \to W$ nazýváme lineárním zobrazením, jestliže

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro každé $x, y \in V$,
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ pro každé $x \in V$ a každý skalár α.

Poznámka. V 1), 2) jsou na levé straně vždy operace ve V, na pravé straně operace ve W (to je nutno rozlišovat, i když jsou značeny stejně).

Definice. Lineární zobrazení $f : V \to V$ (tj. do stejného prostoru) se nazývá lineární operátor.

4.1.2 Poznámky

- vlastnosti 1), 2) se dají shrnout jedinou vlastností

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$$

  pro každé $x, y \in V$ a každé skaláry α, β,
- předchozí vlastnost lze indukcí rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců:

$$f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot x_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(x_j),$$

- jako dříve, obvykle píšeme $f(\alpha x)$ místo $f(\alpha \cdot x)$.

4.1.3 Příklady

- zobrazení $f_0 : V \to W$ definované předpisem

$$f_0(x) = 0 \;\; \text{pro každé } x \in V$$

je lineární (tzv. nulové zobrazení); to znamená, že aspoň jedno lineární zobrazení V do W vždy existuje,

- zobrazení $i_V : V \to V$ definované předpisem
$$i_V(x) = x \quad \text{pro každé } x \in V$$
je lineární operátor (tzv. identický),
- je-li W podprostor konečně generovaného prostoru V se skalárním součinem, potom ortogonální projekce $x \mapsto x_W$ je lineární zobrazení V do W,
- pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je $f(x) = Ax$ lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

4.1.4 Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Věta 63. *Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom platí:*

1) $f(0) = 0$,
2) $f(V) = \{f(x)\,;\, x \in V\}$ *je podprostor* W,
3) $\mathcal{N}(f) := \{x \in V\,;\, f(x) = 0\}$ *je podprostor* V,
4) f *je prosté právě když* $\mathcal{N}(f) = \{0\}$.

Důkaz je jednoduchou aplikací definice lineárního zobrazení resp. definice podprostoru a přenechává se čtenáři za cvičení.

4.1.5 Lineární zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v bázi

Věta 64. *Nechť V, W jsou vektorové prostory a nechť $x_1, \ldots, x_n$ je báze V. Potom pro libovolné vektory $y_1, \ldots, y_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f : V \to W$ takové, že*

$$f(x_j) = y_j \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.1}$$

Důkaz. Pro každé $x \in V$, které lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ (věta 38), definujme $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$. Potom f je lineární zobrazení s vlastností (4.1). Má-li rovněž lineární zobrazení $g : V \to W$ vlastnost (4.1), potom pro každé $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \in V$ je $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j g(x_j) = g(x)$, takže $f = g$. □

Poznámka. Zde i dále, mluvíme-li o dimenzi nebo bázi, rozumíme tím, že prostor je konečně generovaný, aniž to budeme explicitně uvádět.

4.1.6 Souřadnicový vektor

Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V (připomeňme, že báze je systém vektorů a je to tedy uspořádaná množina). Potom, jak víme (věta 38), lze každý vektor $x \in V$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Aritmetický vektor

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

nazýváme souřadnicovým vektorem vektoru x v bázi $\mathcal{B}$. Povšimněte si, že

$$[x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n,$$

kde $n = \dim V$, a že souřadnicový vektor *závisí na výběru báze.*

4.2 Izomorfismus

4.2.1 Definice izomorfismu

Definice. Vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (bijekce) prostoru V na prostor W se nazývá izomorfismem těchto prostorů. Prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají izomorfní.

Poznámka. Izomorfní prostory mají „stejnou strukturu”, protože jejich prvky i výsledky operací s nimi si vzájemně jednoznačně odpovídají. Izomorfní struktury se v matematice považují za „stejné” v tom smyslu, že se liší pouze podstatou svých prvků, nikoliv povahou operací s nimi (srv. 2.1.2). Dá se říci, že se liší jenom „pojmenováním” svých prvků.

4.2.2 Všechny n-rozměrné prostory mají „stejnou strukturu”

Věta 65. *Každý n-rozměrný vektorový prostor V je izomorfní prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Při libovolně zvolené bázi $\mathcal{B}$ prostoru V je zobrazení $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ hledaný izomorfismus. □

Poznámka. *Všechny n-rozměrné vektorové prostory mají tedy „stejnou strukturu” jako prostor $\mathbb{R}^n$.* Je-li $f : V \to \mathbb{R}^n$ izomorfismus, potom z definice lineárního zobrazení plyne

$$x + y = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

$$\alpha \cdot x = f^{-1}(\alpha f(x)),$$

takže operace ve V jsou jednoznačně určeny operacemi v $\mathbb{R}^n$ a zobrazením f.

4.2.3 Matice lineárního zobrazení

Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V, $\mathcal{B}' = (y_1, \ldots, y_m)$ je báze W a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $j = 1, \ldots, n$ lze $f(x_j)$ zapsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i. \tag{4.2}$$

Matice $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se nazývá maticí lineárního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ a značí se $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Poznámka. $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ je tedy matice sestavená ze sloupců

$$([f(x_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [f(x_n)]_{\mathcal{B}'}),$$

které jsou souřadnicovými vektory vektorů $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ v bázi $\mathcal{B}'$. Povšimněme si pořadí indexů v (4.2): $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i$, nikoliv $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} y_i$, jak jsme zvyklí z definice maticového součinu.

4.2.4 Prostor lineárních zobrazení

Věta 66. *Nechť f, g jsou lineární zobrazení V do W, α skalár. Potom zobrazení $f+g : V \to W$ a $\alpha f : V \to W$ definovaná předpisem*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in V,$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in V,$$

jsou lineární zobrazení V do W.

Důkaz. Nechť $x, y \in V$ a nechť β je skalár. Potom

$$(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y),$$

$$(f+g)(\beta x) = f(\beta x) + g(\beta x) = \beta f(x) + \beta g(x) = \beta (f+g)(x).$$

Tedy $f+g$ je lineární zobrazení. Podobně pro αf. □

Věta 67. *Množina lineárních zobrazení prostoru V do prostoru W s operacemi sečítání a násobení skalárem, definovanými ve větě 66, tvoří vektorový prostor, který značíme $L(V, W)$.*

Důkaz. Přímým ověřením, že zavedené operace sečítání a násobení skalárem mají osm vlastností z definice vektorového prostoru (str. 55). □

Poznámka. To ukazuje, že ze dvou vektorových prostorů V, W můžeme vytvořit nový vektorový prostor $L(V, W)$.

4.2.5 Prostor lineárních zobrazení je izomorfní prostoru matic

Věta 68. *Nechť* $\dim V = n$ *a* $\dim W = m$. *Potom prostor $L(V, W)$ je izomorfní prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$. V důsledku toho je* $\dim L(V, W) = mn$.

Důkaz. Při libovolně zvolených bázích $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ prostorů V, W je zobrazení $f \mapsto [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ hledaný izomorfismus. □

Poznámka. Prostor $L(V, W)$ má tedy „stejnou strukturu” jako $\mathbb{R}^{m\times n}$. Z toho vyplývá důležitý fakt, že lineární zobrazení konečně generovaných prostorů lze vzájemně jednoznačně reprezentovat maticemi.

4.3 Maticová reprezentace lineárního zobrazení

4.3.1 Reprezentace lineárního zobrazení

Věta 69. *Nechť $\mathcal{B}$ je báze V, $\mathcal{B}'$ báze W, a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $x \in V$ platí*

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}},$$

kde napravo stojí maticový součin.

Poznámka. Tato věta ukazuje, že při zadaných bázích $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ lze lineární zobrazení f reprezentovat maticí $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ v tom smyslu, že pomocí ní lze ze souřadnic vektoru x vypočítat souřadnice vektoru $f(x)$ pouze použitím maticových operací. Výpočet hodnot lineárního zobrazení lze tedy „přenést" do počítání s maticemi a aritmetickými vektory.

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$ a $A = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Potom pro každé $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \in V$ je

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m A_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n A_{ij}\alpha_j) y_i = \sum_{i=1}^m ([f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}})_i y_i,$$

z čehož plyne

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}.$$

□

4.3.2 Skládání lineárních zobrazení

Věta 70. *Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení. Potom složené zobrazení $g \circ f : U \to W$ definované předpisem*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in U,$$

je rovněž lineárním zobrazením.

Důkaz. Nechť $x, y \in U$ a nechť α je skalár. Potom

$$(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y),$$

$$(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x),$$

což dokazuje, že $g \circ f$ je lineární zobrazení. □

4.3.3 Složené zobrazení a maticový součin

Věta 71. *Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení a nechť $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ jsou báze U, V, W. Potom platí*

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

kde napravo stojí maticový součin.

Důkaz. Pro každé $x \in U$ je podle věty 69

$$[(g \circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

a současně

$$[(g \circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [g(f(x))]_{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f(x)]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}},$$

takže porovnáním dostáváme

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} \cdot [x]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

pro každé $x \in U$, z čehož plyne rovnost obou matic. $\square$

Poznámka. Na konci důkazu jsme využili faktu, že jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a platí-li $Ax = Bx$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, potom $A = B$. Pro každé $j = 1, \ldots, n$ stačí totiž vzít $x = e_j$ a z $Ae_j = Be_j$ dostáváme rovnost j-tých sloupců.

Historická poznámka. Maticový součin tedy koresponduje skládání lineárních zobrazení. Uvádí se, že zakladatel teorie matic A. Cayley (1821-1895) byl kolem r. 1855 inspirován právě touto vlastností k definici maticového součinu.

4.3.4 Matice inverzního zobrazení

Věta 72. *Je-li $f : V \to W$ izomorfismus, potom inverzní zobrazení $f^{-1} : W \to V$ je rovněž izomorfismus a vzhledem k libovolným bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ prostorů V, W platí*

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

kde napravo stojí inverzní matice.

Důkaz. $f^{-1} \circ f = i_V$ je identický operátor (str. 80), takže podle věty o matici složeného zobrazení je $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f^{-1} \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I$ a podle věty 14 je $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. $\square$

Poznámka. Tímto způsobem lze v principu zavést inverzní matici A^{-1} jakožto matici inverzního zobrazení f^{-1} k zobrazení $f(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve standardní bázi $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ (někdy se to tak dělá). Taková definice však není příliš šťastná, protože maticovou podstatu definovaného objektu spíše zatemňuje.

4.4 Změna báze

Věta 73. *Nechť $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ jsou báze prostoru V. Potom pro každé $x \in V$ platí*

$$[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}.$$

Důkaz. Podle věty 69 je $[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V(x)]_{\mathcal{B}'} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$. $\square$

Poznámka. Tato věta uvádí, jak vypočítat souřadnice vektoru v jiné bázi. Matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ nemusí být jednotková (to by byla při $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$). Je-li $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathcal{B}' = (y_1, \ldots, y_n)$, potom podle definice je j-tý sloupec matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ je tvořen koeficienty α_{ij} lineární kombinace

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} y_i.$$

Matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ se nazývá maticí přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{B}'$. Vzorec z předchozí věty má jednu nevýhodu: vyžaduje totiž znalost vyjádření *staré* báze $\mathcal{B}$ v *nové* bázi $\mathcal{B}'$. Typická situace ovšem je, že máme k dispozici jen starou bázi $\mathcal{B}$ a pomocí ní vyjádříme novou bázi $\mathcal{B}'$. V tom případě můžeme použít vzorec

$$[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

(věta 72). Zde je j-tý sloupec matice $[i_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ tvořen koeficienty β_{ij} vyjádření

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} x_i$$

(tj. nové báze ve staré bázi).

4.5 Adjungovaný operátor

4.5.1 Reprezentace lineárních forem

Definice. Lineární zobrazení vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ se nazývá lineární forma na V.

Věta 74. *Nechť V je konečně generovaný prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Potom ke každé lineární formě $f : V \to \mathbb{R}$ existuje právě jeden prvek $a \in V$ takový, že*

$$f(x) = \langle x, a \rangle$$

pro každé $x \in V$.

Důkaz. Ve zvolené ortonormální bázi $z_1, \dots, z_n$ položme $a = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) z_j$. Potom pro každé $x \in V$ je $f(x) = f(\sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle f(z_j) = \langle x, \sum_{j=1}^{n} f(z_j) z_j \rangle = \langle x, a \rangle$. Je-li rovněž $f(x) = \langle x, b \rangle$ pro každé $x \in V$, potom dostáváme $\langle a - b, a - b \rangle = \langle a - b, a \rangle - \langle a - b, b \rangle = f(a - b) - f(a - b) = 0$ a tedy $a - b = 0$, tj. $a = b$. $\square$

4.5.2 Adjungovaný operátor

Věta 75. *Nechť V je konečně generovaný prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem a nechť f je lineární operátor na V. Potom existuje právě jeden lineární operátor f^* na V s vlastností*

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

pro každé $x, y \in V$.

Důkaz. Pro každé $y \in V$ definujme $f^*(y)$ následovně: jelikož $h_y(x) = \langle f(x), y \rangle$ je lineární forma na V, existuje podle věty 74 právě jeden prvek $a_y \in V$ s vlastností $h_y(x) = \langle x, a_y \rangle$ pro každé $x \in V$. Položme $f^*(y) = a_y$. Potom takto definovaný operátor f^* je lineární, platí

$$\langle f(x), y \rangle = h_y(x) = \langle x, a_y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

pro každé $x, y \in V$, a z věty 74 plyne, že f^* je určen jednoznačně. $\square$

Definice. Operátor f^*, který je podle věty jednoznačně určen, nazýváme adjungovaným operátorem k operátoru f.

Příklad. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je v prostoru $\mathbb{R}^n$ adjungovaným operátorem k operátoru $f(x) = Ax$ operátor $f^*(y) = A^T y$, neboť pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\langle f(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T (A^T y) = \langle x, A^T y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Kapitola 5

Matice

Na matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lze pohlížet

- buď jako na systém sloupcových vektorů $A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}$ v prostoru $\mathbb{R}^m$,
- nebo jako na systém řádkových vektorů $A_{1\bullet}, \dots, A_{m\bullet}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$,
- nebo jako na lineární zobrazení $f(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Na tyto objekty lze tedy aplikovat pojmy z vektorových prostorů.

5.1 Vektorové a maticové normy

5.1.1 Vektorové normy

Definice. Funkci $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme vektorovou normou v $\mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1) $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$,
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Poznámka. Jde tedy o zobecnění normy, definované pomocí skalárního součinu (viz větu 51).

Věta 76. (Hölder) *Pro každé reálné $p \geq 1$ je*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

norma v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Vlastnosti 1) a 3) jsou zřejmé. Důkaz vlastnosti 2) lze nejsnáze provést na základě faktu, že funkce $\|x\|_p$ je pro $p \geq 1$ konvexní[1] v $\mathbb{R}^n$, jak plyne z pravidel pro skládání konvexních funkcí. Z konvexity plyne, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\|_p \leq \frac{1}{2}\|x\|_p + \frac{1}{2}\|y\|_p$ a tedy $\|x + y\|_p = \|2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)\|_p = 2\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, což dokazuje vlastnost 2). □

[1] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá konvexní v $\mathbb{R}^n$, jestliže $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha \in [0, 1]$. V důkazu je použito $\alpha = 1/2$.

Ačkoliv Hölderova věta zavádí nekonečnou třídu norem, v praxi se takřka výlučně používají pouze normy

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \end{aligned}$$

přičemž značení poslední normy je dáno tím, že $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Poznámka. Norma $\|x\|_2$ je identická s eukleidovskou normou (viz část 1.2.18).

5.1.2 Maticové normy

Definice. Funkci $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ nazýváme maticovou normou v $\mathbb{R}^{m\times n}$, jestliže pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1) $\|A\| \geq 0$ a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$,
2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.

Poznámka. Jde tedy o stejné tři vlastnosti jako u vektorové normy. Ukážeme, že pro každé $p \in [1,\infty]$ lze pomocí vektorové normy $\|x\|_p$ definovat maticovou normu $\|A\|_p$.

Věta 77. *Pro každé reálné $p \in [1,\infty]$ je*

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \tag{5.1}$$

maticová norma v $\mathbb{R}^{m\times n}$. Navíc pro každé matice A, B, pro které je součin AB definován, je

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p. \tag{5.2}$$

Důkaz. Uvažujme množinu $S_p = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_p = 1\}$. Pro $p \in [1,\infty)$ je

$$S_p = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1\}$$

a pro $p = \infty$ je

$$S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x_i| \leq 1 \text{ pro každé } i \text{ a } |x_j| = 1 \text{ pro jisté } j\},$$

v obou případech je S_p kompaktní (tj. omezená a uzavřená) množina v $\mathbb{R}^n$ a proto podle Weierstrassovy věty na ní spojitá funkce $f(x) = \|Ax\|_p$ nabývá svého maxima. Tím je dokázáno, že maximum v (5.1) se nabývá a že hodnota $\|A\|_p$ je konečná. Dokážeme vlastnosti 1)-3) z definice maticové normy:

1) Z (5.1) plyne, že $\|A\|_p \geq 0$. Je-li $A \neq 0$, potom $A_{ij} \neq 0$ pro jisté i, j a tedy $Ae_j \neq 0$; položíme-li $x = (1/\|e_j\|_p)e_j$, je $\|x\|_p = 1$ a $\|Ax\|_p = (1/\|e_j\|_p)\|Ae_j\|_p > 0$, takže $\|A\|_p > 0$. Dokázali jsme, že pro $A \neq 0$ je $\|A\|_p > 0$. Obrácením této implikace dostáváme, že $\|A\|_p = 0$ implikuje $A = 0$.

2) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = 1$, je

$$\|(A+B)x\|_p \le \|Ax\|_p + \|Bx\|_p \le \max_{\|y\|_p=1} \|Ay\|_p + \max_{\|z\|_p=1} \|Bz\|_p = \|A\|_p + \|B\|_p.$$

Z toho plyne, že $\|A+B\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|(A+B)x\|_p \le \|A\|_p + \|B\|_p$.

3) $\|\alpha A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|\alpha Ax\|_p = \max_{\|x\|_p=1} |\alpha| \cdot \|Ax\|_p = |\alpha| \cdot \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = |\alpha| \cdot \|A\|_p$.

Nakonec dokážeme vlastnost (5.2). Nechť $\|x\|_p = 1$. Je-li $Bx \neq 0$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \|ABx\|_p &= \frac{\|ABx\|_p}{\|Bx\|_p} \cdot \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p} = \left\| A\Big(\frac{1}{\|Bx\|_p} Bx\Big)\right\|_p \cdot \left\| B\Big(\frac{1}{\|x\|_p} x\Big)\right\|_p \\ &\le \max_{\|y\|_p=1} \|Ay\|_p \cdot \max_{\|z\|_p=1} \|Bz\|_p = \|A\|_p \|B\|_p. \end{aligned}$$

Je-li $Bx = 0$, je $\|ABx\|_p = 0$. V obou případech tak dostáváme $\|ABx\|_p \le \|A\|_p\|B\|_p$ pro každé x, $\|x\|_p = 1$, a tedy $\|AB\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|ABx\|_p \le \|A\|_p\|B\|_p$, což dokazuje (5.2). □

Normy $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ lze explicitně vyjádřit:

Věta 78. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je*

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}|, \\ \|A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|. \end{aligned}$$

Důkaz. Nechť $\|x\|_\infty = 1$. Potom pro každé $i = 1, \dots, m$ platí

$$|(Ax)_i| = \Big|\sum_j A_{ij}x_j\Big| \le \sum_j |A_{ij}| \cdot |x_j| \le \Big(\sum_j |A_{ij}|\Big) \max_j |x_j| = \sum_j |A_{ij}| \le \max_i \sum_j |A_{ij}|,$$

tedy

$$\|Ax\|_\infty = \max_i |(Ax)_i| \le \max_i \sum_j |A_{ij}|. \tag{5.3}$$

Dokážeme, že tato horní mez se nabývá. Existuje k, pro které $\max_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{kj}|$. Položme $x'_j = 1$ pro $A_{kj} \ge 0$ a $x'_j = -1$ pro $A_{kj} < 0$, potom $\|x'\|_\infty = 1$ a platí

$$\max_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{kj}| = \sum_j A_{kj}x'_j = (Ax')_k \le \max_i |(Ax')_i| = \|Ax'\|_\infty, \tag{5.4}$$

takže spojením (5.3) a (5.4) dostáváme

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |A_{ij}| \le \|Ax'\|_\infty \le \|A\|_\infty,$$

z čehož plyne, že $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$. Důkaz vzorce pro $\|A\|_1$ je obdobný. □

Důsledek. *Pro každou matici A je $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$.*

Pro $p \in \{1, 2, \infty\}$ tak dostáváme tyto nejpoužívanější normy:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|, \\
\|A\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \\
\|A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|.
\end{aligned}$$

K nim přistupuje tzv. Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

zavedená v části 3.1.8, která, jak lze snadno dokázat z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti, má rovněž vlastnost (5.2). Tato norma není identická s žádnou z norem $\|A\|_p$, $p \in [1, \infty]$: pro každé takové p je totiž $\|I_n\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|x\|_p = 1$, kdežto $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$. Explicitní vyjádření normy $\|A\|_2$ je mnohem složitější a dojdeme k němu později (věta 108). Přes tuto nevýhodu má norma $\|A\|_2$, jak uvidíme, důležité vlastnosti, které ji v teoretických úvahách činí nezastupitelnou. Uvedeme ještě jednu větu, kterou použijeme v dalším:

Věta 79. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonální matice, potom*

$$\|A\|_1 = \|A\|_2 = \|A\|_\infty = \max_i |A_{ii}|.$$

Důkaz. Pro $\|A\|_1$ a $\|A\|_\infty$ plyne výsledek ihned z explicitních vzorců pro tyto normy (věta 78), zbývá proto důkaz pro $\|A\|_2$. Nechť $q = \min\{m, n\}$ a nechť $\max_i |A_{ii}| = |A_{kk}|$ pro jisté $k \in \{1, \dots, q\}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 1$, platí

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{q} A_{ii}^2 x_i^2 \le A_{kk}^2 \sum_{i=1}^{q} x_i^2 \le A_{kk}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A_{kk}^2,$$

tedy $\|Ax\|_2 \le |A_{kk}|$. Přitom pro $x = e_k$ je $\|x\|_2 = 1$ a $\|Ax\|_2 = |A_{kk}|$. Z toho plyne, že

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = |A_{kk}| = \max_i |A_{ii}|. \qquad \square$$

5.2 Hodnost matice

5.2.1 Fundamentální podprostory

Jak víme, pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je

$$\mathcal{R}(A) := \{Ax\,;\, x \in \mathbb{R}^n\}$$

podprostor prostoru $\mathbb{R}^m$ a

$$\mathcal{N}(A) := \{x\,;\, Ax = 0\}$$

je podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice. $\mathcal{R}(A)$ nazýváme sloupcovým prostorem matice A, $\mathcal{N}(A)$ jejím nulovým prostorem nebo jádrem. $\mathcal{R}(A^T)$ nazýváme řádkovým prostorem matice A.

5.2.2 Matice jako reprezentace podprostoru

Povšimněte si, že

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax\,;\, x \in \mathbb{R}^n\} = \Big\{\sum_{j=1}^{n} x_j A_{\bullet j}\,;\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\Big\} = [A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}],$$

je to tedy podprostor generovaný sloupci matice A. Z věty 40 víme, že každý podprostor lze psát jako lineární obal konečného počtu vektorů. Z toho plyne, že každý podprostor W prostoru $\mathbb{R}^m$ lze psát jako

$$W = \mathcal{R}(A)$$

pro jistou matici A.

5.2.3 Hodnost matice

Definice. Číslo

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$$

nazýváme hodností matice A.

Poznámka. Je to tedy maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A. Pro $A = 0$ je $\operatorname{rank}(A) = \dim\{0\} = 0$, pro $A \neq 0$ je $\operatorname{rank}(A) \geq 1$.

5.2.4 Hodnostní rozklad, hodnost a báze

Věta 80. *Nechť*

$$A = BC,$$

kde $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ a $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, je libovolný hodnostní rozklad[2] *matice A. Potom:*

1) $r = \operatorname{rank}(A)$,
2) *sloupce B tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,*
3) *řádky C tvoří bázi $\mathcal{R}(A^T)$.*

Důkaz. Z $A = BC$ přenásobením dostáváme $AC^T = BCC^T$ a podle věty 22 $B = AC^T(CC^T)^{-1}$. To znamená, že sloupce matice B patří do $\mathcal{R}(A)$; z $A = BC$ plyne, že tyto sloupce generují $\mathcal{R}(A)$, a protože jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$. To dokazuje 1), 2); tvrzení 3) se z nich dostane aplikací na hodnostní rozklad $A^T = C^T B^T$. □

5.2.5 Výpočet hodnosti a báze

Věta 23 uvádí, jak sestrojit hodnostní rozklad $A = BC$. To znamená, že

- hodnost matice A je počet nenulových řádků jejího odstupňovaného tvaru A^R,
- sloupce $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$ tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
- nenulové řádky A^R tvoří bázi $\mathcal{R}(A^T)$.

[2] Viz str. 41.

Vidíme, že všechny tyto veličiny můžeme snadno spočítat z odstupňovaného tvaru A^R matice A. Navíc platí

- $k_i = \min\{j\,;\, \dim[A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet j}] = i\}$ pro $i = 1, \ldots, r$,
- $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_i}$ je báze $[A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \ldots, A_{\bullet k_i}]$ pro $i = 1, \ldots, r$,
- $A_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} (A^R)_{ij} A_{\bullet k_i}$ pro $j = 1, \ldots, n$ (vyjádření $A_{\bullet j}$ v bázi $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$).

To zodpovídá otázky položené na konci kapitoly 1.

5.2.6 Příklad

Z hodnostního rozkladu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = BC$$

(viz 1.6.10) vidíme, že matice A má hodnost 2, její první a třetí sloupec tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$ a dva řádky matice C tvoří bázi $\mathcal{R}(A^T)$.

5.2.7 Věta o hodnosti transponované matice

Věta 81. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí*

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A).$$

Poznámka. Slovně, řádkový a sloupcový prostor matice A mají stejnou dimenzi. To není triviální fakt, protože sloupcový prostor je podprostorem $\mathbb{R}^m$ a řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé pro $A = 0$. Je-li $A \neq 0$, potom A má podle věty 23 hodnostní rozklad $A = BC$ ($B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$), a tedy platí i $A^T = C^T B^T$. Z toho plyne, že každý sloupec matice A^T je lineární kombinací sloupců matice C^T, tedy $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(C^T)$ a $\operatorname{rank}(A^T) = \dim \mathcal{R}(A^T) \leq \dim \mathcal{R}(C^T) = \operatorname{rank}(C^T) \leq r = \operatorname{rank}(A)$. Dokázali jsme, že $\operatorname{rank}(A^T) \leq \operatorname{rank}(A)$; aplikací tohoto výsledku na matici $A := A^T$ dostáváme opačnou nerovnost $\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(A^T)$, což dohromady dává $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)$. □

Důsledek. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je* $\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

5.2.8 Invariantnost hodnosti vůči regulární transformaci

Věta 82. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a jsou-li $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice, potom*

$$\operatorname{rank}(DAF) = \operatorname{rank}(A).$$

Poznámka. Jinými slovy, přenásobení regulární maticí zleva nebo zprava nemění hodnost.

Důkaz. Je-li $A = 0$, potom $\operatorname{rank}(DAF) = 0 = \operatorname{rank}(A)$. Je-li $A \neq 0$, potom A má hodnostní rozklad $A = BC$ (věta 23) a $DAF = (DB)(CF)$ je hodnostní rozklad matice DAF: je-li totiž $DBx = 0$, potom z regularity D plyne $Bx = 0$ a z lineární nezávislosti sloupců B plyne $x = 0$, takže DB má lineárně nezávislé sloupce, a podobně bychom dokázali, že CF má lineárně nezávislé řádky, přičemž $DB \in \mathbb{R}^{m \times r}$, takže podle věty 80 je $\operatorname{rank}(DAF) = r = \operatorname{rank}(A)$. $\square$

Poznámka. Pro $D = I$ resp. $F = I$ dostáváme invariantnost hodnosti při přenásobení pouze jednou maticí zprava resp. zleva.

5.3 Ortogonální doplněk a ortogonální projekce

5.3.1 Ortogonální doplněk a související vlastnosti

Pro každou matici jsou $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ podprostory, můžeme proto mluvit o jejich ortogonálním doplňku.

Věta 83. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:*

1) $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$,
2) $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)$,
3) $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A^T)$,
4) $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$,
5) $\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rank}(A)$.

Důkaz. 1) Protože $\mathcal{R}(A) = [A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}]$, je $x \in \mathcal{R}(A)^\perp$ právě když $x^T A_{\bullet j} = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$, tj. $x^T A = 0^T$, což platí právě když $A^T x = 0$, tj. $x \in \mathcal{N}(A^T)$.

2) Aplikací 1) na matici A^T dostáváme $\mathcal{R}(A^T)^\perp = \mathcal{N}(A)$ a tedy $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)$.

4) Je-li $x \in \mathcal{N}(A)$, potom $Ax = 0$, takže $A^T Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A^T A)$. Naopak, je-li $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, potom $A^T Ax = 0$, tedy $x^T A^T Ax = \|Ax\|_2^2 = 0$, z čehož plyne $Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A)$. (Dokázali jsme už v důkazu věty 31; zde uvádíme pro úplnost.)

3) Podle tvrzení 2), 4) je $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{N}((A^T A)^T)^\perp = \mathcal{N}(A^T A)^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)$.

5) Podle věty 59, 4), tvrzení 2) a věty 81 je $n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(A)^\perp = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A^T) = \dim \mathcal{N}(A) + \operatorname{rank}(A)$. $\square$

5.3.2 Výpočet ortogonální projekce na podprostor

Je-li dán podprostor W prostoru $\mathbb{R}^m$, existuje podle věty 60 ke každému x právě jeden vektor $x_W \in W$ s nejmenší vzdáleností od x. Protože v $\mathbb{R}^m$ lze každý podprostor W reprezentovat jako $\mathcal{R}(A)$ (viz 5.2.2), jde o výpočet $x_{\mathcal{R}(A)}$.

Věta 84. *Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ je*

$$x_{\mathcal{R}(A)} = AA^+ x.$$

Poznámka. Už sám fakt, že projekci lze vypočítat pouhým přenásobením jistou maticí, není na první pohled zřejmý. Matici AA^+ se říká projekční matice (A^+ je Moore-Penroseova inverze).

Důkaz. x lze psát ve tvaru $x = AA^+x + (I - AA^+)x$, kde $AA^+x = A(A^+x) \in \mathcal{R}(A)$ a $(I - AA^+)x \in \mathcal{R}(A)^\perp$ (pro každé $y = Az \in \mathcal{R}(A)$ je totiž $y^T(I - AA^+)x = z^T(A^T - A^TAA^+)x = z^T(A^T - (AA^+A)^T)x = z^T(A - AA^+A)^Tx = 0$ podle definice pseudoinverzní matice). Protože $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ (věta 59, tvrzení 3)), je $AA^+x = x_{\mathcal{R}(A)}$ (věta 62). □

5.3.3 Speciální případ

Věta 85. *Jsou-li sloupce matice A lineárně nezávislé, potom pro každé x je*

$$x_{\mathcal{R}(A)} = A(A^TA)^{-1}A^Tx.$$

Poznámka. V učebnicích se často uvádí pouze tento jednodušší, ale méně obecný vzorec, který nevyžaduje znalost pseudoinverzní matice.

Důkaz. Výsledek plyne ihned z předchozí věty využijeme-li toho, že pro matici A s lineárně nezávislými sloupci je $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ (str. 46). □

5.4 Pozitivně (semi)definitní matice a Choleského rozklad

5.4.1 Terminologie

Definice. Matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nazýváme horní trojúhelníkovou, jestliže $A_{ij} = 0$ jakmile $j < i$, tj. jestliže všechny prvky ležící pod hlavní diagonálou jsou nulové, a nazýváme ji dolní trojúhelníkovou, jestliže A^T je horní trojúhelníková. Matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nazýváme diagonální, jestliže $A_{ij} = 0$ jakmile $i \neq j$.

5.4.2 Pozitivně (semi)definitní matice

Definice. Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá pozitivně semidefinitní, jestliže $x^TAx \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, a pozitivně definitní, jestliže $x^TAx > 0$ pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Povšimněte si, že pozitivní (semi)definitnost definujeme jen pro symetrickou matici. Matice A je tedy pozitivně definitní, jestliže je pozitivně semidefinitní a z $x^TAx = 0$ plyne $x = 0$. Tento obrat je použit v důkazech následujících čtyř vět.

Věta 86. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je A^TA pozitivně semidefinitní. Jsou-li sloupce A lineárně nezávislé, je A^TA pozitivně definitní.*

Důkaz. A^TA je symetrická podle věty 4. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^TA^TAx = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$, tedy A je pozitivně semidefinitní. Jsou-li sloupce A lineárně nezávislé, potom z $x^TA^TAx = 0$ plyne $\|Ax\|_2 = 0$ a tedy $Ax = 0$, což znamená, že $x = 0$, tj. A^TA je pozitivně definitní. □

Věta 87. *Je-li A pozitivně definitní, potom je regulární a A^{-1} je opět pozitivně definitní.*

Důkaz. Z $Ax = 0$ plyne $x^T Ax = 0$ a tedy $x = 0$, což dává regularitu, A^{-1} je symetrická protože $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, a nakonec pro každé $x \neq 0$ je $x^T A^{-1} x = x^T A^{-1} A A^{-1} x = (A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) = y^T A y > 0$, neboť $y = A^{-1}x \neq 0$. □

5.4.3 Rekurentní vlastnost pozitivní definitnosti

Věta 88. *Matice*

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní právě když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní.

Poznámka. Věta ukazuje, jak lze při vyšetřování pozitivní definitnosti snížit řád matice a tak postupovat až k $n = 1$. Důmyslným využitím této myšlenky lze však dojít k ještě efektivnější metodě (viz dále).

Důkaz. Je-li A pozitivně definitní, potom $\alpha = e_1^T A e_1 > 0$ a pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n-1}$ platí

$$x^T(\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha} a a^T)x = x^T \tilde{A} x - \tfrac{1}{\alpha}(a^T x)^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} a^T x \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} a^T x \\ x \end{pmatrix} > 0,$$

takže $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní. Naopak, je-li $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní, potom pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, píšeme-li ho ve tvaru $x = (\xi, x'^T)^T$, kde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, platí

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{pmatrix} \xi \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ x' \end{pmatrix} = \alpha \xi^2 + 2\xi a^T x' + x'^T \tilde{A} x' \\ &= (\sqrt{\alpha}\xi + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} a^T x')^2 + x'^T(\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha} a a^T)x' \geq 0, \end{aligned}$$

takže A je pozitivně semidefinitní a $x^T A x = 0$ implikuje $x' = 0$ a $\xi = 0$, tedy A je pozitivně definitní. □

5.4.4 Choleského rozklad

Věta 89. *Ke každé pozitivně definitní matici A existuje právě jedna dolní trojúhelníková matice L s kladnými diagonálními prvky taková, že platí*

$$A = LL^T$$

(Choleského rozklad). Naopak, existuje-li k matici A matice L těchto vlastností, potom A je pozitivně definitní.

Důkaz. Je-li $A = LL^T$, potom pro každé x je $x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T (L^T x) = \|L^T x\|_2^2 \geq 0$, přičemž $x^T A x = 0$ implikuje $L^T x = 0$ a vzhledem ke kladnosti diagonálních koeficientů dostáváme zpětnou substitucí $x = 0$, takže A je pozitivně definitní. Důkaz opačné implikace provedeme indukcí podle řádu matice n. Pro $n = 1$ je $a_{11} > 0$, takže $L = (\sqrt{a_{11}})$. Nechť tedy tvrzení platí až do řádu $n - 1 \geq 1$ a nechť

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

je pozitivně definitní. Potom podle věty 88 je $\alpha > 0$ a matice $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ je pozitivně definitní, proto podle indukčního předpokladu existuje dolní trojúhelníková matice $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ s kladnými diagonálními prvky taková, že $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Položme nyní

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix},$$

potom L je dolní trojúhelníková s kladnými diagonálními prvky a platí

$$LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a^T \\ 0 & \tilde{L}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = A,$$

což je hledaný rozklad. Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že $A = L_1L_1^T$ pro jistou dolní trojúhelníkovou matici

$$L_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0^T \\ \ell & \hat{L} \end{pmatrix}$$

s kladnými diagonálními prvky. Potom z rovnosti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = L_1L_1^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\ell^T \\ \lambda\ell & \ell\ell^T + \hat{L}\hat{L}^T \end{pmatrix}$$

plyne $\lambda = \sqrt{\alpha}$, $\ell = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$ a $\hat{L}\hat{L}^T = \tilde{A} - \ell\ell^T = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$, takže podle indukčního předpokladu je $\hat{L} = \tilde{L}$ a tedy $L_1 = L$. Tím je důkaz indukcí proveden. □

5.4.5 Algoritmus (Choleského rozklad)

Výpočet Choleského rozkladu symetrické matice $A = (a_{ij})$ provádíme porovnáváním k-tých sloupců obou stran v rovnosti $A = LL^T$ pro $k = 1, \ldots, n$. Dostáváme tak tento algoritmus:

0. Dána: symetrická matice A.
1. Polož $L = (\ell_{ij}) := 0$ a $k := 1$.
2. Je-li $a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \leq 0$, ukonči: A není pozitivně definitní.
3. Jinak vypočti

$$\begin{aligned} \ell_{kk} &:= \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2} \\ \ell_{ik} &:= \frac{1}{\ell_{kk}}\Big(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj}\Big) \qquad (i = k+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

4. Polož $k := k + 1$. Je-li $k \leq n$, jdi na krok 2. Jinak ukonči: A je pozitivně definitní a platí $A = LL^T$.

5.4.6 Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

5.4.7 Choleského metoda pro řešení $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A

0. Dána: soustava $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A.
1. Nalezni Choleského rozklad $A = LL^T$ předchozím algoritmem.
2. Vyřeš soustavu $Ly = b$ (s dolní trojúhelníkovou maticí L) zpětnou substitucí.
3. Vyřeš soustavu $L^T x = y$ (s horní trojúhelníkovou maticí L^T) zpětnou substitucí.
4. Ukonči: x je řešením $Ax = b$.

Poznámka. Tato metoda se používá v praktických úlohách, které vyžadují řešení většího počtu soustav $Ax = b$ se stejnou pozitivně definitní maticí A a s různými pravými stranami b. Rozklad $A = LL^T$ je třeba najít pouze jednou, a každou soustavu pak vyřešíme snadno dvěma zpětnými substitucemi.

5.4.8 Choleského rozklad pro pozitivně semidefinitní matice

Choleského rozklad existuje i pro obecné pozitivně *semi*definitní matice, avšak v tomto případě už není zaručena jeho jednoznačnost ani kladnost diagonálních prvků. Navíc důkaz jeho existence, ačkoliv krátký, se opírá o dvě netriviální věty a probereme ho proto později (část 7.6.10).

Věta 90. *Symetrická matice A je pozitivně semidefinitní právě když existuje dolní trojúhelníková matice L s nezápornými diagonálními prvky taková, že $A = LL^T$.*

5.4.9 Energetické normy

Věta 91. *Zobrazení $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je skalární součin[3] v $\mathbb{R}^n$ právě když má tvar*

$$\langle x, y\rangle = x^T Ay \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

pro jistou pozitivně definitní matici A.

Důkaz. (a) Nechť $\langle x, y\rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Potom pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\langle x, y\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j A_{ij} = x^T Ay, \tag{5.5}$$

kde jsme označili $A = (\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j=1}^n$. Matice A je symetrická vzhledem ke komutativnosti skalárního součinu a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je podle (5.5) $x^T Ax = \langle x, x\rangle \geq 0$, přičemž $x^T Ax = 0$ implikuje $\langle x, x\rangle = 0$ a tedy $x = 0$, takže A je pozitivně definitní.

[3] Ve smyslu definice na str. 69.

(b) Naopak, nechť A je pozitivně definitní a nechť $\langle x,y\rangle = x^TAy$ pro $x,y \in \mathbb{R}^n$. Potom $\langle x,y\rangle$ je skalární součin podle definice (str. 69): vlastnost 1) skalárního součinu plyne z pozitivní definitnosti A, vlastnosti 2) a 3) z linearity výrazu x^TAy v x, a nakonec

$$\langle x,y\rangle = x^TAy = (x^TAy)^T = y^TAx = \langle y,x\rangle$$

dává komutativnost, tj. vlastnost 4). □

Věta 92. *Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je*

$$\|x\|_A = \sqrt{x^TAx} \tag{5.6}$$

vektorová norma v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. V souvislosti s aplikacemi, v nichž se normy typu (5.6) vyskytují, se jim říká energetické. Pro $A = I$ dostáváme $\|x\|_I = \sqrt{x^Tx} = \|x\|_2$, tj. eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Podle věty 91 je $\langle x,y\rangle = x^TAy$ skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a $\|x\|_A = \sqrt{x^TAx} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ je jím indukovaná norma, která má podle věty 51 tři vlastnosti, kterými je definovaná vektorová norma v $\mathbb{R}^n$ (viz část 5.1.1). □

5.5 Metoda sdružených gradientů

5.5.1 Metoda sdružených gradientů: úvod

Hestenes a Stiefel publikovali v r. 1952 algoritmus zcela nového typu pro řešení soustavy $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A. Především je to algoritmus iterační, který konstruuje vektorové iterace x_i, $i = 0, 1, \ldots$. Z jeho popisu v části 5.5.2 není nijak patrné, že počet iterací je konečný a nepřevyšuje řád matice; to je dokázáno poměrně složitou indukcí v části 5.5.3. Ze vzorců odvozených k tomuto účelu je pak v části 5.5.4 dokázáno, že algoritmus v každém kroku volí iteraci optimálně ve smyslu normy $\|\cdot\|_A$. Finální uživatelská verze algoritmu je potom uvedena v části 5.5.5.

5.5.2 Algoritmus metody sdružených gradientů I

0. Dána: soustava $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A. Zvol x_0 libovolně a polož $g_0 := Ax_0 - b$, $d_0 := -g_0$, $i := 0$.
1. Je-li $g_i = 0$, ukonči: x_i je řešením $Ax = b$.
2. Jinak vypočti

$$\begin{aligned}
\alpha_i &:= -\frac{d_i^T g_i}{d_i^T A d_i},\\
x_{i+1} &:= x_i + \alpha_i d_i,\\
g_{i+1} &:= Ax_{i+1} - b,\\
\beta_i &:= \frac{g_{i+1}^T g_{i+1}}{g_i^T g_i},\\
d_{i+1} &:= -g_{i+1} + \beta_i d_i.
\end{aligned}$$

3. Polož $i := i + 1$ a jdi na krok 1.

5.5.3 Konvergence v konečně mnoha iteracích

Věta 93. *Nechť A je pozitivně definitní. Potom pro každé $i \geq 0$ takové, že $g_i \neq 0$, je krok 2 proveditelný (tj. nedochází k dělení nulou) a platí*

$$\begin{aligned} g_{i+1}^T d_i &= 0, && (5.7)\\ g_{i+1}^T(d_{i+1} + g_{i+1}) &= 0, && (5.8)\\ g_{i+1}^T g_j &= 0 \qquad (0 \leq j < i+1), && (5.9)\\ d_{i+1}^T A d_j &= 0 \qquad (0 \leq j < i+1). && (5.10) \end{aligned}$$

Důkaz. Využijeme častěji faktu, že z kroku 2 algoritmu vyplývá $g_{i+1} - g_i = A(x_{i+1} - x_i) = \alpha_i A d_i$, tedy

$$g_{i+1} = g_i + \alpha_i A d_i \tag{5.11}$$

pro každé $i \geq 0$.

Důkaz se provádí indukcí podle i. Pro $i = 0$ máme dokázat

$$\begin{aligned} g_1^T d_0 &= 0, && (5.12)\\ g_1^T(d_1 + g_1) &= 0, && (5.13)\\ g_1^T g_0 &= 0, && (5.14)\\ d_1^T A d_0 &= 0. && (5.15) \end{aligned}$$

Je-li $g_0 \neq 0$, potom $d_0 = -g_0 \neq 0$, takže $d_0^T A d_0 > 0$, čili ve vztazích pro α_0, β_0 je jmenovatel různý od nuly a krok 2 je proveditelný.

1. Z $\alpha_0 = -\frac{d_0^T g_0}{d_0^T A d_0}$ plyne $\alpha_0 > 0$ a $0 = d_0^T(g_0 + \alpha_0 A d_0) = d_0^T g_1 = g_1^T d_0$ podle (5.11), což je (5.12).
2. Vztah (5.13) plyne z toho, že $g_1^T(d_1 + g_1) = g_1^T \beta_0 d_0 = 0$ podle definice d_1 a (5.12).
3. Dále je $g_1^T g_0 = g_1^T(-d_0) = 0$ podle (5.12), což je (5.14).
4. $d_1^T A d_0 = (-g_1 + \beta_0 d_0)^T \frac{1}{\alpha_0}(g_1 - g_0) = \frac{1}{\alpha_0}(-g_1^T g_1 - \beta_0 d_0^T g_0) = \frac{1}{\alpha_0}(-g_1^T g_1 + \beta_0 g_0^T g_0) = 0$ podle definice d_1, (5.11), (5.12), (5.14) a definice β_0, což je (5.15).

Nechť tedy vzorce (5.7)–(5.10) platí pro $i - 1 \geq 0$, tj.

$$\begin{aligned} g_i^T d_{i-1} &= 0, && (5.16)\\ g_i^T(d_i + g_i) &= 0, && (5.17)\\ g_i^T g_j &= 0 \qquad (0 \leq j < i), && (5.18)\\ d_i^T A d_j &= 0 \qquad (0 \leq j < i), && (5.19) \end{aligned}$$

a nechť $g_i \neq 0$. Potom pro $d_i = 0$ by z $d_i = -g_i + \beta_{i-1} d_{i-1}$ (definice d_i) plynulo $g_i = \beta_{i-1} d_{i-1}$ a $g_i^T g_i = \beta_{i-1} g_i^T d_{i-1} = 0$ podle (5.16), tedy $g_i = 0$, spor. Proto $d_i \neq 0$, takže krok 2 je proveditelný.

1. Z $\alpha_i = -\frac{d_i^T g_i}{d_i^T A d_i}$ plyne opět $\alpha_i > 0$ (neboť $-d_i^T g_i = g_i^T g_i > 0$ podle (5.17) a $d_i^T A d_i > 0$ z pozitivní definitnosti) a přenásobením $0 = d_i^T g_i + \alpha_i d_i^T A d_i = d_i^T(g_i + \alpha_i A d_i) = d_i^T g_{i+1} = g_{i+1}^T d_i$ podle (5.11), což je (5.7).

2. Dále $g_{i+1}^T(d_{i+1} + g_{i+1}) = g_{i+1}^T \beta_i d_i = 0$ podle definice d_{i+1} a (5.7), což dává (5.8).
3. Dokážeme (5.9) rozborem tří případů:
   a) Je-li $j = 0$, potom z (5.11) plyne $g_{i+1}^T g_0 = (g_i + \alpha_i A d_i)^T g_0 = g_i^T g_0 + \alpha_i d_i^T A g_0 = g_i^T g_0 - \alpha_i d_i^T A d_0 = 0$ podle (5.18), (5.19).
   b) Je-li $0 < j < i$, je $g_{i+1}^T g_j = (g_i + \alpha_i A d_i)^T g_j = \alpha_i d_i^T A g_j = \alpha_i d_i^T A(-d_j + \beta_{j-1} d_{j-1}) = -\alpha_i d_i^T A d_j + \alpha_i \beta_{j-1} d_i^T A d_{j-1} = 0$ podle (5.11), (5.18), definice d_j a (5.19).
   c) Nakonec pro $j = i$ je $g_{i+1}^T g_i = (g_i + \alpha_i A d_i)^T g_i = g_i^T g_i + \alpha_i d_i^T A(-d_i + \beta_{i-1} d_{i-1}) = -d_i^T g_i - \alpha_i d_i^T A d_i + \alpha_i \beta_{i-1} d_i^T A d_{i-1} = \alpha_i \beta_{i-1} d_i^T A d_{i-1} = 0$ podle (5.11), definice d_i, (5.17), definice α_i a (5.19), čímž jsme indukcí dokázali (5.9).
4. Dokážeme (5.10) rozborem dvou možných případů:
   a) Pro $0 \le j < i$ je $d_{i+1}^T A d_j = (-g_{i+1} + \beta_i d_i)^T A d_j = -g_{i+1}^T A d_j = -g_{i+1}^T \frac{1}{\alpha_j}(g_{j+1} - g_j) = 0$ podle definice d_{i+1}, (5.19), (5.11) a (5.9).
   b) Pro $j = i$ je $d_{i+1}^T A d_i = (-g_{i+1} + \beta_i d_i)^T \frac{1}{\alpha_i}(g_{i+1} - g_i) = \frac{1}{\alpha_i}(-g_{i+1}^T g_{i+1} + g_{i+1}^T g_i + \beta_i d_i^T g_{i+1} - \beta_i d_i^T g_i) = \frac{1}{\alpha_i}(-g_{i+1}^T g_{i+1} + \beta_i g_i^T g_i) = 0$ podle definice d_{i+1}, (5.11), (5.9), (5.7), (5.17) a definice β_i, což dává (5.10). □

Věta 94. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní. Potom při libovolné volbě x_0 v kroku 0 existuje $m \le n$ tak, že $g_m = 0$, tj. x_m je řešením $Ax = b$.*

Důkaz. Jestliže $g_m = 0$ pro jisté $0 \le m \le n-1$, je tvrzení dokázáno. Předpokládejme tedy, že $g_0 \ne 0, \dots, g_{n-1} \ne 0$. Dokážeme, že potom $g_n = 0$. Vektory $g_0, \dots, g_{n-1}$ jsou nenulové ortogonální a tedy jsou lineárně nezávislé, takže tvoří bázi a g_n lze psát ve tvaru $g_n = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j g_j$ a odtud podle (5.9) je $g_n^T g_n = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j (g_n^T g_j) = 0$, tedy $g_n = 0$. □

5.5.4 Optimalita iterací

Věta 95. *V průběhu algoritmu pro každé $k \ge 1$ platí*

$$\|x - x_k\|_A = \min\{\|x - (x_0 + y)\|_A \,;\, y \in [d_0, \dots, d_{k-1}]\},$$

kde x je řešení soustavy $Ax = b$ a $\|\cdot\|_A$ je energetická norma definovaná v (5.6).

Důkaz. Ze vzorce (5.11) indukcí dostáváme $g_{i+1} = g_0 + \sum_{j=0}^{i} \alpha_j A d_j$ a odtud ze vztahu (5.10) $d_{i+1}^T g_{i+1} = d_{i+1}^T g_0 + \sum_{j=0}^{i} \alpha_j d_{i+1}^T A d_j = d_{i+1}^T g_0$. Díky tomu můžeme vzorec pro α_i upravit do tvaru

$$\alpha_i = -\frac{d_i^T g_i}{d_i^T A d_i} = -\frac{d_i^T g_0}{d_i^T A d_i} = -\frac{d_i^T (A x_0 - b)}{d_i^T A d_i} = -\frac{d_i^T A(x_0 - x)}{d_i^T A d_i} = \frac{(x - x_0)^T A d_i}{d_i^T A d_i} = \frac{\langle x - x_0, d_i \rangle_A}{\|d_i\|_A^2}.$$

Ze vzorce $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$ potom indukcí plyne

$$x_k - x_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d_i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle x - x_0, d_i \rangle_A}{\|d_i\|_A^2} d_i = \sum_{i=0}^{k-1} \left\langle x - x_0, \tfrac{1}{\|d_i\|_A} d_i \right\rangle \tfrac{1}{\|d_i\|_A} d_i. \tag{5.20}$$

Podle (5.10) tvoří vektory $(1/\|d_i\|_A) d_i$, $i = 0, \dots, k-1$, ve skalárním součinu $\langle x, y \rangle = x^T A y$ ortonormální systém. Ve světle věty 61 potom vzorec (5.20) neříká nic jiného, než že $x_k - x_0$

je ortogonální projekce vektoru $x - x_0$ na podprostor generovaný těmito vektory. Podle definice ortogonální projekce (str. 76) je potom

$$\|x - x_0 - (x_k - x_0)\|_A = \min\{\|x - x_0 - y\|_A\,;\, y \in [\tfrac{1}{\|d_0\|_A}d_0, \ldots, \tfrac{1}{\|d_{k-1}\|_A}d_{k-1}]\}$$

a tedy

$$\|x - x_k\|_A = \min\{\|x - (x_0 + y)\|_A\,;\, y \in [d_0, \ldots, d_{k-1}]\}. \qquad \square$$

Poznámka. Tato věta říká důležitý fakt, že totiž iterace x_k nejsou „náhodné”, nýbrž optimalizované: v k-té iteraci volí algoritmus za x_k vektor, který je nejbližší (v normě $\|\cdot\|_A$) řešení x v množině všech vektorů tvaru $x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$, kde $d_0, \ldots, d_{k-1}$ jsou už nalezené „směry hledání”. Ve skutečnosti toto byla původní myšlenka, která vedla autory ke konstrukci algoritmu. Neobyčejně pozoruhodné ovšem je, že složitý optimalizační proces je skryt za jednoduchými vzorci výsledné formulace.

5.5.5 Algoritmus metody sdružených gradientů II

Přepíšeme-li algoritmus bez použití indexů a s využitím vztahu (5.11) pro aktualizaci g, dostáváme tuto konečnou verzi, ve které se v běžném kroku algoritmu provádí pouze jedno násobení matice vektorem a dále vesměs jen „levné” operace. V této verzi je algoritmus vhodný pro řešení úloh velkých dimenzí:

% Dána: soustava $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A.
zvol x;
$g = Ax - b$;
$d = -g$;
$\delta = g^T g$;
while $g \neq 0$
  $f = Ad$;
  $\gamma = \delta$;
  $\alpha = \gamma/(d^T f)$;
  $x = x + \alpha d$;
  $g = g + \alpha f$;
  $\delta = g^T g$;
  $\beta = \delta/\gamma$;
  $d = -g + \beta d$;
end
% x je řešením $Ax = b$.

5.6 Ortogonální matice

5.6.1 Ortogonální matice

Definice. Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá ortogonální, jestliže

$$Q^T Q = I.$$

Poznámka. Tato jednoduchá formulace, jejíž vektorovou podstatu odkrývá následující věta, popisuje velmi důležitou třídu matic.

5.6.2 Ekvivalentní vyjádření

Věta 96. *Následující tvrzení pro matici $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ekvivalentní:*
(i) *Q je ortogonální,*
(ii) *Q je regulární a $Q^{-1} = Q^T$,*
(iii) *$QQ^T = I$,*
(iv) *Q^T je ortogonální,*
(v) *řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,*
(vi) *sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.*

Poznámka. Tvrzení (v), (vi) ukazují, že mnohem vhodnější by bylo říkat „ortonormální matice”. Přidržujeme se však historicky vzniklého a běžně používaného názvu.

Poznámka. Povšimněte si odlišného číslování (malými římskými číslicemi), charakteristického pro anglicky psanou literaturu.

Důkaz. Dokážeme[4] (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i), (vi)⇔(i)⇔(v).

(i)⇒(ii): Z $Q^TQ = I$ plyne $Q^{-1} = Q^T$ a tedy Q je regulární.

(ii)⇒(iii): Protože $Q^{-1} = Q^T$, je $QQ^T = QQ^{-1} = I$.

(iii)⇒(iv): Protože $(Q^T)^TQ^T = QQ^T = I$, je Q^T ortogonální.

(iv)⇒(i): Z $QQ^T = I$ plyne $Q^T = Q^{-1}$ a tedy $Q^TQ = Q^{-1}Q = I$.

(i)⇔(vi): Q je ortogonální právě když $(Q^TQ)_{ij} = (Q_{\bullet i})^TQ_{\bullet j} = \langle Q_{\bullet i}, Q_{\bullet j}\rangle = I_{ij}$ pro všechna i, j, což je ekvivalentní tomu, že sloupce Q tvoří ortonormální systém; protože je jich n, tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

(i)⇔(v) je přepisem ekvivalence (i)⇔(vi) pro matici Q^T. □

5.6.3 Vlastnosti ortogonálních matic

Věta 97. *Je-li $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální, potom:*
(i) $\|Q_{i\bullet}\|_2 = \|Q_{\bullet i}\|_2 = 1$ *pro každé* i,
(ii) $|Q_{ij}| \le 1$ *a* $|(Q^{-1})_{ij}| \le 1$ *pro každé* i, j,
(iii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^n$,
(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ *je ortogonální.*

Důkaz. Z $Q^TQ = I$ plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|Qx\|_2^2 = x^TQ^TQx = x^Tx = \|x\|_2^2$, což dokazuje tvrzení (iii). Pro $i, j = 1, \dots, n$ odsud plyne $|Q_{ij}| \le \|Q_{\bullet i}\|_2 = \|Qe_i\|_2 = \|e_i\|_2 = 1$, a aplikací tohoto výsledku na $Q^T = Q^{-1}$ dostáváme zbývající dvě tvrzení v (i), (ii). (iv) plyne přímo z toho, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q^TQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$ □

Poznámka. Z numerického hlediska je důležitá vlastnost (ii), která zaručuje, že prvky inverzní matice nemohou během výpočtu nekontrolovatelně narůstat. To je jeden z důvodů, proč mají ortogonální matice rozsáhlé aplikace v numerické lineární algebře. Tvrzení (iv) se často používá v důkazech indukcí.

[4] Z řetězce implikací (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i) vyplývá, že každé z tvrzení (i), (ii), (iii), (iv) implikuje každé jiné a že tedy jsou všechna navzájem ekvivalentní.

Věta 98. *Jsou-li $Q_1, \dots, Q_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální, $q \geq 1$, je i $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_q$ ortogonální.*

Důkaz. Jsou-li Q_1, Q_2 ortogonální, potom $(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^TQ_2 = I$, takže Q_1Q_2 je ortogonální. Dále indukcí. □

Poznámka. Povšimněte si analogie s větou 6 pro regulární matice.

5.6.4 Givensovy matice

Pro každé $i < j$ a každé c, s splňující $c^2 + s^2 = 1$ je matice

$$G(i,j,c,s) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(která vznikne z jednotkové matice I posloupností příkazů $I_{ii} := c$, $I_{jj} := c$, $I_{ij} := s$, $I_{ji} := -s$) ortogonální, protože její sloupce (resp. řádky) tvoří ortonormální systém. Říká se jí Givensova matice nebo Givensova rotace. Tyto matice použijeme později v Jacobiho metodě 7.6.5–7.6.6.

5.6.5 Invariantnost norem vůči ortogonální transformaci

Věta 99. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a jsou-li $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální matice, potom*

$$\|PAQ\|_2 = \|A\|_2, \tag{5.21}$$
$$\|PAQ\|_F = \|A\|_F. \tag{5.22}$$

Důkaz. V důkazu obou tvrzení použijeme vlastnost (iii) z věty 97. Pro normu $\|A\|_2$ platí

$$\|PAQ\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|PAQx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|AQx\|_2 = \max_{\|Qx\|_2=1} \|AQx\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2 = \|A\|_2,$$

což je (5.21). Dále s využitím toho, že pro normu $\|A\|_F$ platí $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^n \|A_{\bullet j}\|_2^2}$ a $\|A^T\|_F = \|A\|_F$, dostáváme

$$\begin{aligned} \|PAQ\|_F^2 &= \sum_{j=1}^n \|P(AQ)_{\bullet j}\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|(AQ)_{\bullet j}\|_2^2 = \|AQ\|_F^2 = \|Q^TA^T\|_F^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \|Q^T(A^T)_{\bullet j}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \|(A^T)_{\bullet j}\|_2^2 = \|A^T\|_F^2 = \|A\|_F^2, \end{aligned}$$

což je (5.22). □

Poznámka. Povšimněte si analogie s větou 82 o invariantnosti hodnosti vůči regulární transformaci.

5.7 Householderova transformace a její použití

5.7.1 Householderova transformace

Následující věta ukazuje, že je možno se proslavit i jednoduchou větou s jednoduchým důkazem (její význam se projevuje v jejích aplikacích):

Věta 100. (Householder 1958) *Pro každý vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ je matice*

$$H(x) = I - 2\frac{xx^T}{x^Tx}$$

symetrická a ortogonální.

Důkaz. $H(x)$ je symetrická protože $H(x)^T = I - 2\frac{xx^T}{x^Tx} = H(x)$. Dále je

$$H(x)^T H(x) = \left(I - 2\frac{xx^T}{x^Tx}\right)^2 = I - 4\frac{xx^T}{x^Tx} + 4\frac{x(x^Tx)x^T}{(x^Tx)^2} = I - 4\frac{xx^T}{x^Tx} + 4\frac{xx^T}{x^Tx} = I,$$

takže $H(x)$ je ortogonální. □

5.7.2 Použití Householderovy transformace I

Věta 101. *Pro každé dva vektory $y, z \in \mathbb{R}^n$ takové, že $y \neq z$ a $\|y\|_2 = \|z\|_2$ platí*

$$y = H(y-z)z,$$

jinými slovy každé dva různé vektory o stejné normě lze převést jeden na druhý Householderovou transformací.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} H(y-z)z &= \left(I - 2\tfrac{(y-z)(y-z)^T}{\|y-z\|_2^2}\right)z = z - \tfrac{2(y^Tz-\|z\|_2^2)}{\|y-z\|_2^2}(y-z) \\ &= z + \tfrac{\|y\|_2^2+\|z\|_2^2-2y^Tz}{\|y-z\|_2^2}(y-z) = z + \tfrac{\|y-z\|_2^2}{\|y-z\|_2^2}(y-z) = y. \end{aligned}$$

□

Důsledek. *Jsou-li y, z dva vektory o stejné normě, potom existuje ortogonální matice Q taková, že $y = Qz$ (pro $y \neq z$ stačí vzít $Q = H(y-z)$, jinak $Q = I$).*

5.7.3 Použití Householderovy transformace II

Věta 102. *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je*

$$H = \begin{cases} H(x - \|x\|_2 e_1) & \text{pro } x_1 \neq \|x\|_2, \\ I & \text{pro } x_1 = \|x\|_2 \end{cases}$$

ortogonální matice s vlastností

$$Hx = \|x\|_2 e_1.$$

Důkaz. Je-li $x_1 = \|x\|_2$, potom z $x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ plyne $x_2 = \ldots = x_n = 0$ a tedy $x = x_1 e_1 = \|x\|_2 e_1 = Ix = Hx$. Je-li $x_1 \neq \|x\|_2$, potom $x - \|x\|_2 e_1 \neq 0$, takže vektory $y = \|x\|_2 e_1$ a $z = x$ jsou různé a platí pro ně $\|y\|_2 = \|x\|_2 = \|z\|_2$, tedy podle věty 101 je

$$y = \|x\|_2 e_1 = H(y-z)z = H(z-y)z = H(x - \|x\|_2 e_1)x.$$

□

Komentář. Věta 102 ukazuje možná překvapující fakt, že totiž nulování prvků pod diagonálou lze provést i *jinak* než Gaussovou eliminací. Navíc tato metoda je numericky stabilnější a nevyžaduje výběr pivota. Je použita dále v algoritmu 5.8.2 a její aplikace na řešení soustav rovnic a metodu nejmenších čtverců jsou uvedeny v částech 5.8.6 a 5.8.7.

5.7.4 Použití Householderovy transformace III

Věta 103. *Pro každé x, $\|x\|_2 = 1$, je*

$$H = \begin{cases} H(x - e_1) & \text{pro } x \neq e_1, \\ I & \text{pro } x = e_1 \end{cases}$$

ortogonální matice, jejímž prvním sloupcem je x.

Důkaz. Případ $x = e_1$ je zřejmý. Nechť $x \neq e_1$. Protože $\|x\|_2 = 1 = \|e_1\|_2$, je podle věty 101 $x = H(x - e_1)e_1 = He_1 = H_{\bullet 1}$, což je tvrzení věty. □

Poznámka. Podle věty 56 lze vektor o jednotkové normě rozšířit na ortonormální bázi. Věta 103 uvádí konstruktivní postup, jak toto rozšíření provést.

5.8 QR rozklad

5.8.1 Obecný QR rozklad

Věta 104. (QR rozklad) *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existuje ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a horní trojúhelníková matice $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s nezápornými diagonálními prvky tak, že platí*

$$A = QR. \tag{5.23}$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Je-li $n = 1$, potom podle věty 102 existuje ortogonální matice H taková, že $HA = HA_{\bullet 1} = \varrho e_1$, kde $\varrho = \|A_{\bullet 1}\|_2 \geq 0$. Potom $A = H^T \varrho e_1$, takže stačí položit $Q = H^T$ a $R = \varrho e_1$. Nechť tedy tvrzení platí až do $n - 1 \geq 1$ a nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Podle téže věty 102 existuje ortogonální matice H taková, že $(HA)_{\bullet 1} = HA_{\bullet 1} = \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1$, tj. HA je tvaru

$$HA = \begin{pmatrix} \varrho & r^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$ a $\varrho = \|A_{\bullet 1}\|_2 \geq 0$. Podle indukčního předpokladu existuje ortogonální matice $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ a horní trojúhelníková matice $\tilde{R}$ s nezápornými diagonálními prvky tak, že $\tilde{A} = \tilde{Q}\tilde{R}$. Potom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}^T \end{pmatrix} HA = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho & r^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho & r^T \\ 0 & \tilde{Q}^T\tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho & r^T \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix},$$

takže matice

$$Q = H^T \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

je podle vět 96, (iv), 97, (iv) a 98 ortogonální,

$$R = \begin{pmatrix} \varrho & r^T \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$$

je horní trojúhelníková matice s nezápornými diagonálními prvky, a platí $A = QR$, čímž je tvrzení indukcí dokázáno. □

5.8.2 Householderův algoritmus pro obecný QR rozklad

Konstruktivní verzi důkazu (nulování prvků pod diagonálou založené na větě 102) podává tento algoritmus (ohledně „dvojtečkového značení" viz část 1.6.15):

% Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
$Q = I_m$; $R = A$;
for $j = 1 : \min\{m, n\}$
  $x = R(j : m, j)$;
  if $x_1 \neq \|x\|_2$
    $x_1 = x_1 - \|x\|_2$;
    $H(x) = I_{m-j+1} - 2\frac{xx^T}{x^T x}$;
    $H = \begin{pmatrix} I_{j-1} & 0 \\ 0 & H(x) \end{pmatrix}$;
    $R = HR$;
    $Q = HQ$;
  end
end
$Q = Q^T$;
% $A = QR$, kde Q je ortogonální a R horní trojúhelníková
% matice s nezápornými diagonálními prvky.

5.8.3 Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1690 & 0.8971 & -0.4082 \\ 0.5071 & 0.2760 & 0.8165 \\ 0.8452 & -0.3450 & -0.4082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.9161 & 7.4374 \\ 0 & 0.8281 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = QR.$$

5.8.4 QR rozklad matice s lineárně nezávislými sloupci

Věta 105. *Jsou-li sloupce matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lineárně nezávislé, potom v rozkladu (5.23) jsou matice R a prvních n sloupců matice Q určeny jednoznačně, přičemž všechny diagonální prvky R jsou kladné.*

Důkaz. Protože sloupce A jsou lineárně nezávislé, je $m \geq n$. Vzhledem k tomu, že R je horní trojúhelníková, musí být její řádky počínaje $(n+1)$-ním nulové, takže označíme-li $\hat{R}$ čtvercovou matici sestávající z prvních n řádků R a $\hat{Q}$ matici sestávající z prvních n sloupců Q, platí opět

$$A = \hat{Q}\hat{R}. \tag{5.24}$$

Přitom $\hat{Q}$ obecně není čtvercová, ale stále splňuje $\hat{Q}^T\hat{Q} = I$, takže z (5.24) plyne

$$A^TA = \hat{R}^T\hat{Q}^T\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^T\hat{R}.$$

Jelikož A má lineárně nezávislé sloupce, je A^TA pozitivně definitní (věta 86) a tedy regulární, z čehož plyne že $\hat{R}$ je regulární, takže její diagonální prvky jsou kladné. Položíme-li nyní $L = \hat{R}^T$, potom L je dolní trojúhelníková s kladnými diagonálními prvky a splňuje

$$A^TA = LL^T,$$

což je Choleského rozklad matice A^TA, takže podle věty 89 je matice L určena jednoznačně, tedy i $\hat{R}$ je určena jednoznačně stejně tak jako $\hat{Q} = \hat{R}^{-1}A$. □

Poznámka. Matice $\hat{Q}$ v rozkladu (5.24) tedy splňuje $\hat{Q}^T\hat{Q} = I$, ale v obecně to není ortogonální matice, protože nemusí být čtvercová. Jednoznačnost je zaručena požadavkem kladnosti diagonálních prvků R (jinak by např. $A = (-\hat{Q})(-\hat{R})$ byl rovněž rozklad toho typu). Dostáváme tak tuto reformulaci věty 105:

Věta 106. *Každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lineárně nezávislými sloupci lze rozložit právě jedním způsobem ve tvaru*

$$A = \hat{Q}\hat{R},$$

kde $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ortonormální sloupce a $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je horní trojúhelníková s kladnými diagonálními prvky.

5.8.5 Příklad

Pro příklad z části 5.8.3 dostáváme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1690 & 0.8971 \\ 0.5071 & 0.2760 \\ 0.8452 & -0.3450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.9161 & 7.4374 \\ 0 & 0.8281 \end{pmatrix} = \hat{Q}\hat{R}.$$

5.8.6 Použití QR rozkladu k řešení soustav lineárních rovnic

Mějme soustavu

$$Ax = b$$

s regulární (tj. čtvercovou) maticí A. Je-li

$$A = QR$$

její QR rozklad vypočtený Householderovým algoritmem 5.8.2, potom soustavu je možno přepsat ve tvaru

$$QRx = b$$

resp.

$$Rx = Q^T b,$$

kde R je horní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou, a její řešení lze nalézt zpětnou substitucí. To ukazuje způsob, jak řešit soustavy rovnic bez použití Gaussovy eliminace.

5.8.7 Použití QR rozkladu pro metodu nejmenších čtverců

Mějme soustavu

$$Ax = b, \tag{5.25}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má lineárně nezávislé sloupce. Je-li

$$A = QR$$

její QR rozklad podle věty 106, potom soustava (5.25) má jediné řešení metodou nejmenších čtverců (věta 32)

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T b = R^{-1} Q^T b,$$

které je tedy řešením soustavy

$$Rx = Q^T b$$

se čtvercovou horní trojúhelníkovou maticí R s kladnými diagonálními prvky a dá se z ní snadno vypočíst zpětnou substitucí. Tím se vyhneme výpočtu jak matice $A^T A$, tak i její inverze.

5.9 SVD rozklad

5.9.1 SVD rozklad: úvod

Dospíváme nyní k větě, která je podle mínění odborníků nejdůležitější větou numerické lineární algebry, k tzv. SVD rozkladu[5] matice. Vzhledem k jejím teoretickým i praktickým důsledkům by bylo žádoucí probírat ji co nejdříve, to však naráží na problém jejího důkazu, který je netriviální.

Autorství. SVD rozklad byl objeven nezávisle na sobě několika autory, kteří podali různé formulace i důkazy: Beltrami 1873, Jordan 1874 (!), Sylvester 1889, Autonne 1915, Eckart a Young 1939. Význam SVD rozkladu pro numerickou matematiku byl rozpoznán a od 50. let 20. století široce popularizován Golubem.

5.9.2 SVD rozklad: formulace

Věta 107. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $q = \min\{m, n\}$. Potom existuje diagonální matice $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ splňující $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{qq} \geq 0$ a ortogonální matice $X \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že platí*

$$A = X\Sigma Y^T.$$

Poznámka. Přepíšeme-li rovnost $A = X\Sigma Y^T$ ve tvaru $X^T A Y = \Sigma$, vidíme, že věta říká, že *každou matici lze vynásobením zleva a zprava vhodnými ortogonálními maticemi převést na diagonální matici stejného typu, na jejíž diagonále stojí sestupně seřazená nezáporná čísla.*

[5] Z angl. „singular value decomposition” – rozklad na singulární čísla.

Poznámka. Kdybychom položili $Y := Y^T$, mohli bychom psát $A = X\Sigma Y$, kde Y je opět ortogonální. Tradičně se však dává přednost uvedenému tvaru kvůli jednodušší formulaci důsledků.

Pro lepší pochopení důkazu uvádíme nejprve jeho myšlenku.

Myšlenka důkazu SVD rozkladu (podle Jordana). Číslo

$$\sigma = \|A\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2$$

se podle Weierstrassovy věty (o nabývání maxima funkce spojité na kompaktní množině) nabývá pro jisté $\tilde{y}$, tj. $\sigma = \|A\tilde{y}\|_2$, $\|\tilde{y}\|_2 = 1$. Položme $\tilde{x} = \frac{1}{\sigma} A\tilde{y}$, potom $\|\tilde{x}\|_2 = 1$, takže $\tilde{x}$ lze rozšířit na ortogonální matici $X_1 = (\tilde{x}\ \tilde{X})$ a podobně $\tilde{y}$ lze rozšířit na ortogonální matici $Y_1 = (\tilde{y}\ \tilde{Y})$. Potom platí

$$X_1^T A Y_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & \tilde{X}^T A \tilde{Y} \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli první krok diagonalizace. Dále pokračujeme stejným způsobem s maticí $\tilde{X}^T A\tilde{Y}$ (jde tedy o důkaz indukcí). Jednotlivé kroky je nutno podrobněji zdůvodnit; zejména jde o nulovost pravého horního bloku a o to, že takto definovaná σ tvoří nerostoucí posloupnost.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n, přičemž navíc dokážeme, že Σ lze volit tak, aby

$$\sigma_{11} = \|A\|_2.$$

Pro $n = 1$ sestává A z jediného sloupce a podle věty 104 má QR rozklad $A = Qr$. Položme $X = Q$, $\Sigma = r$, $Y = I_1$ (matice 1×1). Potom $A = X\Sigma Y^T$, X, Y jsou ortogonální, r je diagonální a podle věty 97, tvrzení (iii), je $\|A\|_2 = \|r\|_2 = |r_1| = r_1$, takže $\sigma_{11} = r_1 = \|A\|_2$.

Nechť tvrzení platí pro $n - 1 \geq 1$ a nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Je-li $A = 0$, potom tvrzení platí pro $\Sigma = 0$, $X = I_m$, $Y = I_n$. Nechť tedy $A \neq 0$; položme

$$\sigma = \|A\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2,$$

potom $\sigma > 0$ a podle Weierstrassovy věty o nabývání maxima spojité funkce na kompaktní množině existuje vektor $\tilde{y}$, $\|\tilde{y}\|_2 = 1$, pro který $\sigma = \|A\tilde{y}\|_2$. Položme $\tilde{x} = \frac{1}{\sigma} A\tilde{y}$. Potom $\|\tilde{x}\|_2 = \|\tilde{y}\|_2 = 1$, takže $\tilde{x}$ lze doplnit na ortogonální matici $X_1 = (\tilde{x}\ \tilde{X})$ a podobně $\tilde{y}$ lze doplnit na ortogonální matici $Y_1 = (\tilde{y}\ \tilde{Y})$ (věta 103). Potom platí

$$X_1^T A Y_1 = \begin{pmatrix} \tilde{x}^T \\ \tilde{X}^T \end{pmatrix} A(\tilde{y}\ \ \tilde{Y}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}^T A\tilde{y} & \tilde{x}^T A\tilde{Y} \\ \tilde{X}^T A\tilde{y} & \tilde{X}^T A\tilde{Y} \end{pmatrix},$$

přičemž

$$\tilde{x}^T A\tilde{y} = \tfrac{1}{\sigma}\|A\tilde{y}\|_2^2 = \tfrac{1}{\sigma}\sigma^2 = \sigma$$

a z ortogonality X_1 plyne $\tilde{X}^T A\tilde{y} = \sigma\tilde{X}^T\tilde{x} = 0$, takže $X_1^T AY_1$ má tvar

$$X_1^T A Y_1 = \begin{pmatrix} \sigma & z^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

kde $z^T = \tilde{x}^T A\tilde{Y}$ a $A_1 = \tilde{X}^T A\tilde{Y}$. Dokážeme, že $z = 0$. Volme $x = \begin{pmatrix} \sigma \\ z \end{pmatrix}$, potom podle věty 99 o invariantnosti normy $\|\cdot\|_2$ vůči ortogonální transformaci dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \|A\|_2^2 = \|X_1^T AY_1\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma & z^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \geq \left\| \begin{pmatrix} \sigma & z^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|_2} x \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|_2^2} \left\| \begin{pmatrix} \|x\|_2^2 \\ A_1 z \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \frac{1}{\|x\|_2^2}(\|x\|_2^4 + \|A_1 z\|_2^2) \geq \|x\|_2^2 = \sigma^2 + \|z\|_2^2 \geq \sigma^2, \end{aligned}$$

takže všude platí rovnost a tedy $\|z\|_2 = 0$ a $z = 0$, což dává

$$X_1^T A Y_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Protože matice A_1 je typu $(m-1) \times (n-1)$, platí podle indukčního předpokladu

$$A_1 = \hat{X} \Sigma' \hat{Y}^T,$$

kde $\hat{X} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ a $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ jsou ortogonální, $\Sigma' = (\sigma'_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$ je diagonální a splňuje $\sigma'_{11} \geq \ldots \geq \sigma'_{q-1,q-1} \geq 0$, přičemž

$$\sigma'_{11} = \|A_1\|_2.$$

Položíme-li nyní

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{Y} \end{pmatrix},$$

potom X_2 i Y_2 jsou ortogonální (věta 97, (iv)) a platí

$$\begin{aligned} X_2^T X_1^T A Y_1 Y_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{Y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & \hat{X}^T A_1 \hat{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & \Sigma' \end{pmatrix} = \Sigma. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$A = X \Sigma Y^T,$$

kde $X = X_1 X_2$ a $Y = Y_1 Y_2$ jsou ortogonální, Σ je diagonální a platí $\sigma'_{11} \geq \ldots \geq \sigma'_{q-1,q-1}$. K dokončení důkazu je proto potřeba dokázat, že $\sigma \geq \sigma'_{11}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\|x\|_2 = 1$, platí

$$\|A_1 x\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| X_1^T A Y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \|X_1^T A Y_1\|_2 = \|A\|_2,$$

z čehož plyne

$$\sigma'_{11} = \|A_1\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|A_1 x\|_2 \leq \|A\|_2 = \sigma,$$

čímž je indukční krok proveden. □

Poznámka. Algoritmus pro výpočet SVD rozkladu uvedeme později v části 7.7.3.

5.9.3 Příklad

Platí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = X \Sigma Y^T,$$

kde

$$X = \begin{pmatrix} -0.1409 & 0.8247 & 0.5456 & -0.0478 \\ -0.3439 & 0.4263 & -0.6919 & 0.4704 \\ -0.5470 & 0.0278 & -0.2531 & -0.7975 \\ -0.7501 & -0.3706 & 0.3994 & 0.3748 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 25.4624 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -0.5045 & -0.7608 & -0.4082 \\ -0.5745 & -0.0571 & 0.8165 \\ -0.6445 & 0.6465 & -0.4082 \end{pmatrix}$$

(zaokrouhleno na 4 desetinná místa).

5.9.4 Singulární čísla, jejich jednoznačnost a význam

Věta 108. *Nechť $A = X\Sigma Y^T$ je libovolný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a nechť r je počet kladných koeficientů na diagonále Σ. Potom platí:*

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{rank}(A), \\ \sigma_{11} &= \|A\|_2, \\ \sigma_{ii} &= \min\{\|A-B\|_2\,;\, \operatorname{rank}(B) < i\} \qquad (i = 2, \ldots, r). \end{aligned}$$

Důkaz. 1) Protože ortogonální matice X, Y jsou regulární, plyne z věty 82 o invariantnosti hodnosti vůči regulární transformaci, že

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(X\Sigma Y^T) = \operatorname{rank}(\Sigma) = r,$$

jelikož matice Σ je v odstupňovaném tvaru a její hodnost je proto rovna počtu r jejích nenulových řádků.

2) Podobně z věty 99 o invariantnosti normy $\|\cdot\|_2$ vůči ortogonální transformaci a z věty 79 plyne

$$\|A\|_2 = \|X\Sigma Y^T\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max_i \sigma_{ii} = \sigma_{11}.$$

3) Nechť $2 \le i \le r$ a nechť $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(B) < i$. Dokážeme, že $\|A-B\|_2 \ge \sigma_{ii}$. Podprostor $\mathcal{N}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, Bx = 0\}$ má podle věty 83, tvrzení 5), dimenzi $n - \operatorname{rank}(B) > n - i$ a podprostor $[Y_{\bullet 1}, \ldots, Y_{\bullet i}]$ má dimenzi i, takže součet dimenzí obou podprostorů je větší než n a proto podle věty 46 existuje vektor $0 \ne z \in \mathcal{N}(B) \cap [Y_{\bullet 1}, \ldots, Y_{\bullet i}]$, který můžeme rovnou volit tak, aby $\|z\|_2 = 1$. Pro tento vektor z potom platí $Bz = 0$ a $z = Yy$ pro jisté $y = (y_1, \ldots, y_i, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, takže $\|y\|_2 = \|Y^T z\|_2 = \|z\|_2 = 1$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \|A-B\|_2^2 &= \big(\max_{\|x\|_2=1} \|(A-B)x\|_2\big)^2 \ge \|(A-B)z\|_2^2 = \|Az\|_2^2 = \|X\Sigma Y^T z\|_2^2 \\ &= \|\Sigma y\|_2^2 = \sigma_{11}^2 y_1^2 + \ldots + \sigma_{ii}^2 y_i^2 \ge \sigma_{ii}^2 (y_1^2 + \ldots + y_i^2) = \sigma_{ii}^2 \|y\|_2^2 = \sigma_{ii}^2, \end{aligned}$$

což dává

$$\|A-B\|_2 \ge \sigma_{ii}. \tag{5.26}$$

Volme nyní $\widetilde{B} = X\widetilde{\Sigma} Y^T$, kde $\widetilde{\Sigma}$ vznikne ze Σ nahrazením diagonálních prvků $\sigma_{ii}, \ldots, \sigma_{rr}$ nulami. Potom $\operatorname{rank}(\widetilde{B}) = \operatorname{rank}(\widetilde{\Sigma}) = i - 1$ a platí

$$\|A - \widetilde{B}\|_2 = \|X(\Sigma - \widetilde{\Sigma})Y^T\|_2 = \|\Sigma - \widetilde{\Sigma}\|_2 = \max_{j=i,\ldots,r} \sigma_{jj} = \sigma_{ii} \tag{5.27}$$

podle věty 79. Z (5.26), (5.27) potom plyne

$$\min\{\|A-B\|_2\,;\, \operatorname{rank}(B) < i\} = \sigma_{ii}. \qquad \square$$

Důsledek. Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potom $\sigma_{nn} = \min\{\|A - B\|_2\,;\ B \text{ singulární}\}$. V tomto případě tedy σ_{nn} udává vzdálenost (v normě $\|\cdot\|_2$) matice A od nejbližší singulární matice.

Definice. Čísla σ_{ii}, $i = 1, \ldots, q$ (diagonální prvky matice Σ), která jsou podle věty 108 jednoznačně určena maticí A, nazýváme singulárními čísly matice A a značíme je $\sigma_i(A)$, $i = 1, \ldots, q$.

Poznámka. Důležité je, že jsou číslována podle velikosti v sestupném pořadí, tj.

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_q(A) \geq 0.$$

Naproti tomu matice X, Y nikdy jednoznačně určeny nejsou: je-li

$$A = X\Sigma Y^T$$

SVD rozklad matice A, potom pro ortogonální matice $X_0 = -X$, $Y_0 = -Y$ platí opět

$$A = X_0 \Sigma Y_0^T,$$

přičemž $X_0 \neq X$, $Y_0 \neq Y$.

5.9.5 SVD rozklad: pro a proti

Máme-li k dispozici libovolný SVD rozklad matice A, potom, jak ukážeme na dalších stránkách, lze pomocí něho snadno vyřešit všechny základní problémy, které jsme dosud řešili přímo či zprostředkovaně pomocí Gaussovy eliminace, a navíc i některé jiné, o kterých jsme se zde nezmínili. Vzhledem k použití ortogonálních matic je tento přístup navíc numericky stabilnější (tj. odolnější vůči vlivu zaokrouhlovacích chyb) než Gaussova eliminace.

Na druhé straně algoritmy pro výpočet SVD nejsou obecně konečné, nýbrž iterační (konstruují posloupnosti konvergující k výsledným X, Σ, Y) a nejsou proto vhodné pro ruční počítání.

Při počítání na cvičeních používáme proto algoritmy založené na Gaussově eliminaci, kdežto na počítači dáváme přednost algoritmům využívajícím SVD rozkladu, které jsou v dnešní době neobyčejně detailně rozpracované a zaručují vysokou přesnost výsledku.

5.9.6 Odvozené veličiny

Je-li $A = X\Sigma Y^T$ libovolný SVD rozklad matice A, označme

- r počet kladných prvků na diagonále Σ (z věty 108 víme, že r je rovno hodnosti A),
- $\hat{X}$ matici sestávající z prvních r sloupců matice X,
- $\hat{Y}$ matici sestávající z posledních $n - r$ sloupců matice Y (pozor: nikoliv Y^T !),
- $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde S je matice $r \times r$ s kladnými diagonálními prvky.

5.9.7 Použití SVD I: hodnost a ortonormální báze

Věta 109. *Je-li*

$$A = X\Sigma Y^T$$

libovolný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom:

1) *sloupce matice $\hat{X}$ tvoří ortonormální bázi sloupcového prostoru $\mathcal{R}(A)$,*

2) sloupce matice $\hat{Y}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathcal{N}(A)$.

Důkaz. Matice Σ má v prvních r řádcích kladné diagonální prvky a posledních $m-r$ řádků nulových. Z $A = X\Sigma Y^T$ plyne, že pro každé $j = 1, \ldots, r$ je

$$X_{\bullet j} = \tfrac{1}{\sigma_j(A)} AY_{\bullet j} \in \mathcal{R}(A)$$

a

$$A_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{r} (\Sigma Y^T)_{kj} X_{\bullet k},$$

takže $X_{\bullet 1}, \ldots, X_{\bullet r}$ generují $\mathcal{R}(A)$ a protože jsou lineárně nezávislé, tvoří jeho ortonormální bázi. Protože $A^T = Y\Sigma^T X^T$, tvoří podle právě dokázaného tvrzení vektory $Y_{\bullet 1}, \ldots, Y_{\bullet r}$ ortonormální bázi prostoru $\mathcal{R}(A^T)$, takže vektory $Y_{\bullet r+1}, \ldots, Y_{\bullet n}$ tvoří ortonormální bázi jeho ortogonálního doplňku $\mathcal{R}(A^T)^\perp = \mathcal{N}(A)$ (věta 83). □

5.9.8 Použití SVD II: (pseudo)inverze a ortogonální projekce

Věta 110. *Je-li*

$$A = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

libovolný SVD rozklad matice $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom:

(a) $A^+ = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T,$

(b) je-li A čtvercová regulární, je $A^{-1} = YS^{-1}X^T$,

(c) $AA^+ = \hat{X}\hat{X}^T$ (projekční matice, viz str. 93).

Důkaz. (a) Dokážeme, že matice A^+ definovaná v (a) má vlastnosti 1)-4) z věty 24. Přitom použijeme několikrát faktu, že $X^TX = I$, $Y^TY = I$ a

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$AA^+A = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^TY \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^TX \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = A,$$

$$A^+AA^+ = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^TX \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^TY \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T = A^+,$$

čili A^+ splňuje 1) a 2), dále

$$AA^+ = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^TY \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T = X \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T,$$

tedy AA^+ je symetrická a proto $(AA^+)^T = AA^+$, a nakonec

$$A^+A = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^TX \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = Y \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T,$$

tedy A^+A je rovněž symetrická a proto $(A^+A)^T = A^+A$, takže A^+ má vlastnosti 1)-4) z věty 24 a je to tedy pseudoinverzní matice.

(b) Je-li A čtvercová regulární, potom $(YS^{-1}X^T)A = YS^{-1}X^TXSY^T = I$, takže $YS^{-1}X^T = A^{-1}$.

(c) Je

$$AA^+ = X\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y^TY\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X^T = X\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X^T = \hat{X}\hat{X}^T. \qquad \square$$

5.9.9 Vlastnosti pseudoinverzní matice

Pomocí vzorce pro A^+ z věty 110 můžeme dokázat řadu vlastností pseudoinverzní matice.

Věta 111. *Moore-Penroseova inverze A^+ matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má tyto vlastnosti:*

1) $A^+ = A^{-1}$ *je-li A čtvercová regulární,*
2) $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ *je-li* $\operatorname{rank}(A) = n$,
3) $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ *je-li* $\operatorname{rank}(A) = m$,
4) $(A^+)^+ = A$,
5) $(A^T)^+ = (A^+)^T$,
6) $A^T = A^TAA^+ = A^+AA^T$,
7) $A^+ = (A^TA)^+A^T = A^T(AA^T)^+$,
8) $(A^TA)^+ = A^+(A^T)^+$, $(AA^T)^+ = (A^T)^+A^+$,
9) $(A^TA)^+A^TA = A^+A$, $(AA^T)^+AA^T = AA^+$,
10) $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(A^+A)$,
11) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(AA^+)$,
12) $\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^+A) = \operatorname{rank}(AA^+) = \sum_{j=1}^n (A^+A)_{jj} = \sum_{i=1}^m (AA^+)_{ii}$.

Důkaz. Vlastnosti 1) a 2) dokážeme společně. Je-li $\operatorname{rank}(A) = n$, potom A^TA je regulární a pro matici $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ platí $A^+A = (A^TA)^{-1}A^TA = I$; odtud dostáváme $AA^+A = AI = A$, $A^+AA^+ = IA^+ = A^+$, $(A^+A)^T = I = A^+A$ a $(AA^+)^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = A(A^TA)^{-1}A^T = AA^+$, čímž jsme ověřili, že A^+ má čtyři vlastnosti z definice pseudoinverzní matice a proto platí 2). Je-li A čtvercová regulární, je $\operatorname{rank}(A) = n$ a právě dokázaný výsledek dává $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T = A^{-1}$, což je 1).

3) Je-li $\operatorname{rank}(A) = m$, potom AA^T je regulární a pro matici $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ platí $AA^+ = I$, odtud $AA^+A = IA = A$, $A^+AA^+ = A^+I = A^+$, $(AA^+)^T = I = AA^+$ a $(A^+A)^T = (A^T(AA^T)^{-1}A)^T = A^T(AA^T)^{-1}A = A^+A$, čímž jsme opět ověřili vlastnosti 1)-4) z definice.

Před důkazem dalších tvrzení 4)-12) si povšimněme, že všechna jsou splněna pro $A = 0$ a $A^+ = 0$. Můžeme proto v dalším předpokládat, že $A \neq 0$. V tom případě má A SVD rozklad tvaru

$$A = X\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y^T, \tag{5.28}$$

kde $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $r \geq 1$, je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky a podle věty 110 platí

$$A^+ = Y\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X^T. \tag{5.29}$$

Tohoto explicitního tvaru pseudoinverzní matice použijeme k důkazu dalších tvrzení.

4) Podle (5.28), (5.29) a věty 110 je

$$(A^+)^+ = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = A.$$

5) Podle (5.28) je

$$A^T = Y \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T \tag{5.30}$$

a opět podle věty 110 je

$$(A^T)^+ = X \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = (A^+)^T.$$

6) Platí $A^T AA^+ = A^T(AA^+)^T = (AA^+A)^T = A^T$, $A^+AA^T = (A^+A)^T A^T = (AA^+A)^T = A^T$.
7) Podle (5.28), (5.30) je

$$A^T A = Y \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T \tag{5.31}$$

a tedy

$$(A^T A)^+ A^T = Y \begin{pmatrix} S^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T Y \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T = A^+.$$

Aplikací tohoto výsledku na transponovanou matici dostáváme s použitím tvrzení 5)

$$A^+ = ((A^T)^+)^T = ((AA^T)^+A)^T = A^T((AA^T)^+)^T = A^T((AA^T)^T)^+ = A^T(AA^T)^+.$$

8) S použitím (5.29), (5.30), (5.31) dostáváme

$$A^+(A^T)^+ = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T X \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = Y \begin{pmatrix} S^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = (A^T A)^+,$$

z čehož dosazením $A := A^T$ plyne druhá část tvrzení $(A^T)^+A^+ = (AA^T)^+$.
9) Podle (5.31), (5.29) je

$$(A^T A)^+ A^T A = Y \begin{pmatrix} S^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T Y \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = Y \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T,$$

$$A^+ A = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = Y \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T, \tag{5.32}$$

z čehož plyne rovnost $(A^T A)^+ A^T A = A^+ A$. Druhá rovnost se dostane opět dosazením $A := A^T$.
10) Je-li $y \in \mathcal{R}(A^+)$, potom pro jisté x je $y = A^+x = A^T((AA^T)^+x) \in \mathcal{R}(A^T)$; je-li $y' \in \mathcal{R}(A^T)$, potom $y' = A^T x' = A^+AA^T x' \in \mathcal{R}(A^+A)$; je-li $y'' \in \mathcal{R}(A^+A)$, potom $y'' = A^+Ax'' \in \mathcal{R}(A^+)$ (použili jsme tvrzení 7) a 6)). Dokázali jsme tedy, že $\mathcal{R}(A^+) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(A^+A) \subseteq \mathcal{R}(A^+)$, takže všude platí rovnost.

11) Je-li $x \in \mathcal{N}(A^+)$, potom $A^+x = 0$ a podle 6) je $A^T x = 0$, což dává $\mathcal{N}(A^+) \subseteq \mathcal{N}(A^T)$, podobně 7) dává $\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(A^+) \subseteq \mathcal{N}(AA^+)$, dále opět podle 6) je $\mathcal{N}(AA^+) \subseteq \mathcal{N}(A^T)$ a podle 7) $\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(A^+)$. Tím jsme dokázali $\mathcal{N}(A^+) \subseteq \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(AA^+) \subseteq \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(A^+)$, takže všude platí rovnost.

12) Jelikož hodnost matice je invariantní vůči regulární transformaci, plyne z (5.28), (5.29), že $\operatorname{rank}(A) = r = \operatorname{rank}(A^+)$ a podobně z (5.32) plyne $r = \operatorname{rank}(A^+A)$ a aplikací této rovnosti na $A := A^T$ dostáváme nakonec $r = \operatorname{rank}((A^T)^+A^T) = \operatorname{rank}((AA^+)^T) = \operatorname{rank}(AA^+)$. Protože součet diagonálních prvků čtvercové matice (její tzv. stopa) se nemění při přenásobení této matice zleva libovolnou regulární maticí a zprava její inverzí, dostáváme z (5.32), že stopa A^+A je rovna stopě I, tj. r. Podobně pro stopu AA^+. □

Poznámka. Na rozdíl od inverzní matice obecně *neplatí* $AA^+ = A^+A$, $(AB)^+ = B^+A^+$.

Shrnutím vlastností hodnosti z vět 81, 83 a 111 dostáváme tento řetězec rovností:

Důsledek. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(A^+A) = \operatorname{rank}(AA^+).$$

5.9.10 Použití SVD III: řešení obecných soustav lineárních rovnic

Věta 112. *Nechť $A = X\Sigma Y^T$ je libovolný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a nechť $b \in \mathbb{R}^m$. Potom soustava*

$$Ax = b \tag{5.33}$$

má řešení právě když platí

$$\hat{X}\hat{X}^Tb = b$$

a je-li tato podmínka splněna, má množina řešení soustavy (5.33) popis

$$\Big\{\sum_{j=1}^{r} \tfrac{(b^T\hat{X})_j}{\sigma_j} Y_{\bullet j} + \hat{Y}y\,;\, y \in \mathbb{R}^{n-r}\Big\}.$$

Důkaz. Vyjádříme A^+b a $I - A^+A$ pomocí věty 110 a dosadíme do příslušných vzorců vět 28 a 29. □

5.9.11 Použití SVD IV: polární rozklad

Věta 113. (Autonne 1902) *Ke každé matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existují pozitivně semidefinitní matice P, S a ortogonální matice Q tak, že platí*

$$A = PQ = QS. \tag{5.34}$$

Přitom matice P, S jsou určeny jednoznačně. Je-li A regulární, potom P, S jsou pozitivně definitní a i Q je určena jednoznačně.

Důkaz. Nechť $A = X\Sigma Y^T$ je SVD rozklad matice A. Položme $P = X\Sigma X^T$, $S = Y\Sigma Y^T$, $Q = XY^T$. Potom vzhledem k ortogonalitě X, Y je

$$PQ = X\Sigma X^TXY^T = X\Sigma Y^T = A,$$

$$QS = XY^TY\Sigma Y^T = X\Sigma Y^T = A,$$

což dokazuje (5.34). Dále $Q = XY^T$ je ortogonální a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)(X^T x)_i^2 \geq 0,$$

takže P je pozitivně semidefinitní, a stejným způsobem se totéž dokáže pro S. Přitom platí

$$P^2 = X\Sigma X^T X\Sigma X^T = X\Sigma^2 X^T = X\Sigma Y^T Y\Sigma X^T = AA^T,$$

$$S^2 = Y\Sigma Y^T Y\Sigma Y^T = Y\Sigma^2 Y^T = Y\Sigma X^T X\Sigma Y^T = A^T A.$$

Pro důkaz jednoznačnosti P, S se zde musíme odvolat na větu 164, kterou dokážeme později, podle které ke každé pozitivně semidefinitní matici C existuje právě jedna pozitivně semidefinitní matice B s vlastností $B^2 = C$. Aplikujeme-li tuto větu na rovnosti $P^2 = AA^T$, $S^2 = A^T A$, dostáváme jednoznačnost P a S. Je-li A regulární, potom z (5.34) plyne, že i P, S jsou regulární, tedy pozitivně definitní, a v tom případě je i $Q = P^{-1}A$ určena jednoznačně. □

5.9.12 SVD faktorizace

Je-li

$$A = X\Sigma Y^T = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

SVD rozklad matice A, kde $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je diagonální matice s kladnou diagonálou, potom posledních $m - r$ řádků matice ΣY^T je nulových, takže posledních $m - r$ sloupců matice X nemá vliv na výsledek součinu. Můžeme proto psát

$$A = X_r S Y_r^T, \tag{5.35}$$

kde X_r, Y_r sestávají z prvních r sloupců matic X, Y (a nejsou to už obecně ortogonální matice, protože nejsou čtvercové, ale stále mají ortonormální sloupce, takže splňují $X_r^T X_r = I$, $Y_r^T Y_r = I$). Rozklad (5.35) se nazývá SVD faktorizace, někdy i „tenký SVD rozklad" (angl. „thin SVD").

5.9.13 Použití SVD V: komprese digitálního obrazu

Digitální obraz (pro zjednodušení černobílý) můžeme reprezentovat maticí $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jejíž ij-tý koeficient označuje stupeň šedi ij-tého pixelu. Nechť

$$A = X_r S Y_r^T \tag{5.36}$$

je její SVD faktorizace. Začneme-li ubírat singulární čísla počínaje nejmenším tak, že budeme konstruovat matice

$$A_k = X_k S_k Y_k^T \qquad (k = r-1, \ldots, 1), \tag{5.37}$$

kde X_k, Y_k sestávají z prvních k sloupců X_r, Y_r a S_k z prvních k řádků i sloupců S, dostáváme postupně se zhoršující aproximace matice A, které však „zachovávají její strukturu". Přitom pravá strana (5.36) obsahuje $(m + n + 1)r$ koeficientů, kdežto pravá strana (5.37) $(m + n + 1)k$ koeficientů, takže dochází ke kompresi dat v poměru $\frac{k}{r}$. V praxi často i pro velmi malá k aproximuje obraz, vytvářený maticí A_k, pozoruhodně věrně jeho originál daný maticí A.

5.9.14 Obraz klauna

Obraz klauna je digitálně reprezentován maticí A typu 200×320, jejíž všechna singulární čísla jsou kladná. Z ní jsou postupně vytvořeny a zobrazeny matice

$$A_k = X_k S_k Y_k^T$$

(vzorec (5.37)) pro $k = 200, 50, 25, 12, 6, 3$.

Výpočty byly provedeny v MATLABu (výpočet základního SVD rozkladu matice 200×320 trval asi 2 sec.), odkud pochází i obraz *clown.mat*. Na obrázcích názorně vidíme, jak se s klesajícím k základní obraz rozostřuje.

5.9.15 Originál ($k = 200$)

5.9.16 $k = 50$

5.9.17 $k = 25$

5.9.18 $k = 12$

5.9.19 $k = 6$

5.9.20 $k = 3$

5.9.21 Slide show: $k = 200, 50, 25, 12, 6, 3$

5.9.22 Použití SVD VI: číslo podmíněnosti

Číslo

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

nazýváme číslem podmíněnosti (angl. „condition number") regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pomocí SVD rozkladu můžeme číslo podmíněnosti vyjádřit. Je-li $A = XSY^T$ SVD rozklad regulární matice A, potom $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$ (věta 108) a jelikož $A^{-1} = YS^{-1}X^T$, je

$$\|A^{-1}\|_2 = \sigma_1(A^{-1}) = \max_j \frac{1}{\sigma_j(A)} = \frac{1}{\sigma_n(A)},$$

takže celkem dostáváme

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}.$$

Obecně lze říci, že čím vyšší je číslo podmíněnosti, tím *hůře* se matice chová z numerického hlediska. Hilbertovy matice (str. 37) mají vysoká čísla podmíněnosti; např.

$$\kappa_2(H_{14}) = 4.0746 \cdot 10^{17}.$$

To vysvětluje neuspokojivé výsledky, dosažené při řešení soustav s Hilbertovými maticemi na str. 37-38.

Z SVD rozkladu plyne, že $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2^2(A)$ (neboť z $A = XSY^T$ dostáváme $A^T A = YS^2Y^T$, což je SVD rozklad $A^T A$, takže $A^T A$ má singulární čísla $\sigma_i^2(A)$, $i = 1, \ldots, n$). To znamená, že při přechodu od A k $A^T A$ (např. při přechodu od soustavy $Ax = b$ k soustavě normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$, viz větu 31) se numerické vlastnosti matice mohou silně zhoršit.

Kapitola 6

Determinanty

6.1 Permutace a definice determinantu

6.1.1 Úvod

V této části ukážeme, že každé čtvercové matici A je možno přiřadit číslo $\det(A)$ s jistými specifickými vlastnostmi. Pokud nebude řečeno jinak, uvažujeme pouze čtvercové matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, výsledky však platí i pro komplexní případ.

Definici determinantu předcházejí některá fakta o permutacích.

6.1.2 Permutace a její znaménko

Permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme libovolnou uspořádanou n-tici jejích prvků

$$(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

(bez opakování). Množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ značíme P_n. Jak známo, P_n má $n!$ prvků.

Definice. Znaménkem permutace $p = (p_1, \dots, p_n)$ nazýváme číslo

$$\sigma(p) = (-1)^s,$$

kde s je počet prvků množiny

$$\{(i, j)\,;\, i < j,\, p_i > p_j\}$$

(tzv. inverzí).

Příklad. $\sigma(4, 1, 3, 2) = (-1)^4 = 1$, $\sigma(4, 3, 1, 2) = (-1)^5 = -1$.

6.1.3 Vliv transpozice na znaménko

Věta 114. *Pro permutace*

$$p = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_\ell, \dots, p_n),$$
$$p' = (p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_k, \dots, p_n)$$

(z nichž jedna vznikne z druhé přehozením dvou prvků, tzv. transpozicí) platí

$$\sigma(p') = -\sigma(p).$$

Důkaz. Dokážeme větu nejprve pro případ $\ell = k+1$ (tzv. elementární transpozice). Pro $i = 1,\dots,n-1$ označme s_i počet prvků množiny $\{j\,;\, i<j,\, p_i > p_j\}$, a podobně s'_i pro permutaci p'. Potom $\sigma(p) = (-1)^s$, $\sigma(p') = (-1)^{s'}$, kde $s = \sum_{i=1}^{n-1} s_i$, $s' = \sum_{i=1}^{n-1} s'_i$, a zřejmě $s_i = s'_i$ pro $i \le k-1$ a $i \ge k+2$. Rozlišíme dva případy. (a) Je-li $p_k < p_{k+1}$, potom je $s_k = s'_{k+1}$ a $s'_k = s_{k+1}+1$, tedy $s_k + s_{k+1} = s'_k + s'_{k+1} - 1$, takže $s = s'-1$ a $\sigma(p) = (-1)^s = (-1)(-1)^{s'} = -\sigma(p')$. (b) Je-li $p_k > p_{k+1}$, potom je $s_k = s'_{k+1}+1$ a $s'_k = s_{k+1}$, tedy $s_k + s_{k+1} = s'_k + s'_{k+1} + 1$, takže $s = s'+1$ a opět $\sigma(p) = (-1)^s = (-1)(-1)^{s'} = -\sigma(p')$.

Je-li $\ell \ge k+2$, potom prohodíme-li postupně prvky na místech $k, k+1; k+1, k+2; \dots; \ell-1, \ell$, je to celkem $\ell - k$ elementárních transpozic a jako výsledek dostaneme permutaci

$$(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_\ell, p_k, p_{\ell+1}, \dots, p_n).$$

Posunujeme-li nyní obdobně p_ℓ zpět tak, aby se dostalo na k-té místo, potřebujeme k tomu $\ell - k - 1$ elementárních transpozic, celkem tedy k provedení transpozice p_k a p_ℓ potřebujeme $2(\ell-k)-1$, tj. lichý počet, elementárních transpozic a dostáváme tak $\sigma(p') = (-1)^{2(\ell-k)-1}\sigma(p) = -\sigma(p)$. □

Důsledek. *Převedeme-li permutaci* $(p_1,\dots,p_n)$ q *transpozicemi na permutaci* $(1,\dots,n)$, *potom* $\sigma(p) = (-1)^q$, *takže* q *je buď vždy sudé, nebo vždy liché.*

6.1.4 Definice determinantu

Definice. Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme předpisem

$$\det(A) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}.$$

Poznámka. Součet se provádí přes všechny permutace množiny $\{1,\dots,n\}$ a sestává tedy z $n!$ sčítanců. Je zřejmé, že ačkoliv číslo $\det(A)$ je dobře definováno, nelze ho pro vyšší řády tímto způsobem počítat; později uvedeme efektivní způsob jeho výpočtu založený na Gaussově eliminaci. Místo $\det(A)$ píšeme rovněž $|A|$, zvláště vypisujeme-li celou matici.

6.1.5 Příklady

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sigma(1,2)a_{11}a_{22} + \sigma(2,1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále),

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sigma(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + \sigma(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} + \sigma(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + \sigma(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

atd.

6.2 Vlastnosti determinantu

6.2.1 Determinant transponované matice

Věta 115. *Pro každou čtvercovou matici A platí*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Důkaz. Podle definice je

$$\det(A^T) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p)(A^T)_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (A^T)_{np_n} = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{p_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{p_n n}.$$

Provedením q vhodných transpozic dostáváme

$$a_{p_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{p_n n} = a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n}.$$

Přitom permutace $p = (p_1, \ldots, p_n)$ přešla na permutaci $(1, \ldots, n)$ a ta naopak přešla na permutaci $r = (r_1, \ldots, r_n)$, takže $\sigma(p) = (-1)^q = \sigma(r)$ a tedy

$$\det(A^T) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{p_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{p_n n} = \sum_{r \in P_n} \sigma(r) a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n} = \det(A). \qquad \square$$

Poznámka. Hlavní smysl této věty spočívá v tom, že tvrzení o determinantech dokázaná pro řádky platí analogicky i pro sloupce (aplikujeme-li je na transponovanou matici).

6.2.2 Řádková linearita determinantu

Věta 116. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Potom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí*

$$\det(A + e_i b) = \det(A) + \det(A + e_i(b - A_{i\bullet})). \tag{6.1}$$

Poznámka. Vzorec (6.1) se stane názornějším po rozepsání

$$\det \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ A_{i\bullet} + b \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ A_{i\bullet} \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ b \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}.$$

Linearita platí pouze v této řádkové (analogicky, sloupcové) formě; $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ obecně neplatí.

Důkaz. Přímo z definice, protože

$$\det(A + e_i b) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (a_{ip_i} + b_{p_i}) \cdot \ldots \cdot a_{np_n} = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot a_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

$$+ \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot b_{p_i} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} = \det(A) + \det(A + e_i(b - A_{i\bullet})). \qquad \square$$

6.2.3 Determinant matice se dvěma stejnými řádky

Věta 117. *Má-li matice dva stejné řádky, potom její determinant je roven nule.*

Důkaz. Nechť $A_{i\bullet} = A_{k\bullet}$ pro jisté $i \neq k$. Potom

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{p\in P_n} \sigma(p_1,\dots,p_i,\dots,p_k,\dots,p_n) a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot a_{ip_i}\cdot\ldots\cdot a_{kp_k}\cdot\ldots\cdot a_{np_n} \\
&= \sum_{p\in P_n} \sigma(p_1,\dots,p_i,\dots,p_k,\dots,p_n) a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot a_{kp_i}\cdot\ldots\cdot a_{ip_k}\cdot\ldots\cdot a_{np_n} \\
&= \sum_{p\in P_n} \sigma(p_1,\dots,p_i,\dots,p_k,\dots,p_n) a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot a_{ip_k}\cdot\ldots\cdot a_{kp_i}\cdot\ldots\cdot a_{np_n} \\
&= -\sum_{p\in P_n} \sigma(p_1,\dots,p_k,\dots,p_i,\dots,p_n) a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot a_{ip_k}\cdot\ldots\cdot a_{kp_i}\cdot\ldots\cdot a_{np_n} \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

a tedy $\det(A) = 0$. □

6.2.4 Elementární operace a determinant

Věta 118. *Pro matici $\widetilde{A}$ vzniklou z matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ provedením*

1) *elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ platí $\det(\widetilde{A}) = \alpha\det(A)$,*
2) *elementární operace $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ platí $\det(\widetilde{A}) = \det(A)$,*
3) *elementární operace $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ platí $\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$.*

Důkaz. 1) $\det(\widetilde{A}) = \sum_{p\in P_n} \sigma(p_1,\dots,p_n) a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot(\alpha a_{ip_i})\cdot\ldots\cdot a_{np_n} = \alpha\sum_{p\in P_n}\sigma(p_1,\dots,p_n)a_{1p_1}\cdot\ldots\cdot a_{np_n} = \alpha\det(A)$.

2) Podle vět 116, 117 a části 1) platí

$$\det(\widetilde{A}) = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha\det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det(A) + \alpha\cdot 0 = \det(A).$$

3) Podle části 1.3.4 lze výměnu dvou řádků složit ze tří elementárních operací typu 2) a jedné elementární operace typu 1) s $\alpha = -1$. S využitím předchozích dvou částí důkazu tak dostáváme $\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$. □

Důsledek. *Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.*

Důsledek. *Obsahuje-li matice nulový řádek (sloupec), je její determinant roven nule.*

6.2.5 Výpočet determinantu

Věta 119. *Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu jejích diagonálních prvků.*

Důkaz. Je-li A horní trojúhelníková, potom $a_{np_n} = 0$ pro $p_n < n$. V definičním součtu stačí tedy uvažovat jen permutace s $p_n = n$. Tím dostáváme

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{p \in P_n} \sigma(p_1, \ldots, p_{n-1}, n) a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn} \\ &= a_{nn} \sum_{p \in P_{n-1}} \sigma(p_1, \ldots, p_{n-1}) a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,p_{n-1}} = a_{nn} \det(A'), \end{aligned}$$

kde A' je matice sestavená z prvních $n-1$ řádků a sloupců matice A a je tedy opět horní trojúhelníková. Opakováním tohoto postupu (tj. indukcí) dostaneme

$$\det(A) = a_{nn} a_{n-1,n-1} \cdot \ldots \cdot a_{11}.$$

Aplikací tohoto výsledku na transponovanou matici dostáváme tvrzení pro dolní trojúhelníkovou matici. □

Poznámka. Odsud vyplývá metoda pro výpočet determinantu: Gaussovou eliminací (s přihlédnutím k tomu, že elementární operace 1), 3) mění jeho hodnotu) upravíme matici na horní trojúhelníkový tvar a determinant výsledné matice vypočteme podle věty 119. V případě, že se Gaussova eliminace zastaví z důvodu nemožnosti nalezení pivota (tj. $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$ v termínech popisu algoritmu v části 1.3.9), je determinant nulový a výpočet je možno ukončit.

Důsledek. $\det(I) = 1$.

6.2.6 Příklad

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 22 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -3 \cdot 66 = -198$$

(povšimněte si použití všech tří elementárních operací).

6.3 Multiplikativnost determinantu

6.3.1 Determinant blokově trojúhelníkové matice

Věta 120. *Jsou-li A, B čtvercové matice (ne nutně stejného řádu), potom*

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Důkaz. Upravíme-li každou z matic A, B v matici $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ elementárními operacemi na horní trojúhelníkový tvar T^1 resp. T^2, dostáváme

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} &= (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_p)(\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_q) \det \begin{pmatrix} T^1 & F \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_p)(\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_q)(T^1_{11} \cdot \ldots \cdot T^1_{nn})(T^2_{11} \cdot \ldots \cdot T^2_{mm}) \\
&= [(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_p)(T^1_{11} \cdot \ldots \cdot T^1_{nn})][(\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_q)(T^2_{11} \cdot \ldots \cdot T^2_{mm})] \\
&= \det(A)\det(B)
\end{aligned}$$

(kde α_i resp. β_j jsou koeficienty vytknuté před determinant při použití elementárních operací 1) a 3) na matici A resp. B). Dále s využitím právě dokázaného vztahu podle věty 115

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}^T = \det \begin{pmatrix} A^T & D^T \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \det(A^T)\det(B^T) = \det(A)\det(B).$$

□

6.3.2 Multiplikativnost: nejdůležitější vlastnost determinantu

Věta 121. *Pro každé matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Poznámka. Této větě se rovněž říká „věta o násobení determinantů".

Důkaz. Vyjděme z matice

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

typu $2n \times 2n$ a upravujme ji následujícím způsobem. Nejprve vynásobíme $(n+1)$-ní řádek číslem $-A_{11}$, $(n+2)$-hý řádek číslem $-A_{12}$, …, až $2n$-tý řádek číslem $-A_{1n}$ a přičteme takto vynásobené řádky k prvnímu řádku. Tím se první řádek matice (6.2) upraví do tvaru

$$0, \ldots, 0, -(AB)_{11}, \ldots, -(AB)_{1n}.$$

Opakováním tohoto postupu s dalšími řádky upravíme matici (6.2) na tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

přičemž jsme vícenásobně použili pouze 2. elementární operaci, takže obě matice (6.2) a (6.3) mají stejný determinant. Vyměníme-li v matici (6.3) sloupce 1 a $n+1$, 2 a $n+2$, …, n a $2n$, vznikne matice

$$\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix},$$

jejíž determinant je $(-1)^n$-násobkem determinantu matice (6.3). Potom dvojnásobnou aplikací věty 120 dostáváme

$$\det(A)\det(B) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \det(-AB) = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB).$$

□

6.3.3 Důsledky

Věta 122. *Pro každou regulární matici A platí*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Důkaz. $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$ □

Věta 123. *Pro každou ortogonální matici Q platí*

$$|\det(Q)| = 1.$$

Důkaz. $(\det(Q))^2 = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q^TQ) = \det(I) = 1.$ □

6.3.4 Kritérium regularity (singularity)

Věta 124. *Čtvercová matice A je regulární právě když* $\det(A) \neq 0$.

Důkaz. Je-li A regulární, potom má inverzní matici a z věty 122 plyne $\det(A) \neq 0$. Je-li A singulární, potom některý její řádek je lineární kombinací ostatních a matici lze vícenásobnou aplikací 2. elementární operace, která nemění determinant, převést na matici s nulovým řádkem, jejíž determinant je roven nule (str. 126). Tedy pro A singulární je $\det(A) = 0$. □

Věta 125. *Čtvercová matice A je singulární právě když* $\det(A) = 0$.

Poznámka. Toto tvrzení, která vznikne jednoduše negací obou stran ekvivalence ve větě 124, je hlavním spojovacím článkem ke kapitole 7 o vlastních číslech (věta 131), proto ho zde uvádíme jako samostatnou větu.

6.3.5 Věta Sherman-Morrisonova typu pro determinanty

V části 1.4.8 jsme uvedli vzorec pro $(A + bc^T)^{-1}$. Ukazuje se, že podobný vzorec platí i pro $\det(A + bc^T)$. Nejprve uvedeme pomocnou větu:

Věta 126. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Potom*

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Důkaz. Jelikož

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

platí podle věty o násobení determinantů (s ohledem na to, že $\det(I_m) = \det(I_n) = 1$)

$$\begin{aligned}\det(I_n + BA) &= \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m + AB).\end{aligned}$$

□

Věta 127. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a jsou-li $b, c \in \mathbb{R}^n$, potom*

$$\det(A + bc^T) = (1 + c^T A^{-1} b)\det(A).$$

Důkaz. S použitím vět 121 a 126 dostáváme

$$\begin{aligned}\det(A + bc^T) &= \det((I_n + bc^T A^{-1})A) = \det(I_n + b(c^T A^{-1}))\det(A) \\ &= \det(I_1 + c^T A^{-1} b)\det(A) = (1 + c^T A^{-1} b)\det(A).\end{aligned}$$

□

6.4 Laplaceův rozvoj

6.4.1 Subdeterminant a algebraický doplněk

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a nechť $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Matici vzniklou *vyškrtnutím* i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A značíme A^{ij}, její determinant

$$\det(A^{ij})$$

nazýváme subdeterminantem ij-tého prvku a číslo

$$(-1)^{i+j}\det(A^{ij})$$

nazýváme algebraickým doplňkem ij-tého prvku v matici A.

Příklad. Pro $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ je $A^{21} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $(-1)^{2+1}\det(A^{21}) = -93$.

6.4.2 Laplaceův rozvoj

Věta 128. *Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A^{ij})$$

(Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku).

Poznámka. Analogicky při daném j dostáváme podle věty o determinantu transponované matice

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

(Laplaceův rozvoj determinantu podle j-tého sloupce).

Důkaz. Je-li $A_{n\bullet} = e_n^T$, potom stejnou úvahou jako v důkazu věty 119 dostáváme $\det(A) = \det(A^{nn})$.

Je-li $A_{i\bullet} = e_j^T$ pro jistá i, j, potom převedeme-li prvek na pozici (i, j) s použitím $(n-i)+(n-j) = 2n-(i+j)$ *elementárních* transpozic řádků a sloupců na pozici (n, n), je podle předchozího $\det(A) = (-1)^{2n-(i+j)} \det(A^{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$.

Nakonec pro obecnou matici, píšeme-li i-tý řádek ve tvaru $A_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^T$, dostáváme s použitím věty 116 a právě dokázaného tvrzení, že $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$. □

6.4.3 Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 6 \cdot (-6) = 0$$

(Laplaceův rozvoj podle 2. řádku).

6.4.4 Důsledek: jiná definice determinantu

Laplaceův rozvoj ukazuje možnost i jiné, rekurentní definice determinantu matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1) je-li $n = 1$, je $\det(A) = a_{11}$,
2) je-li $n \geq 2$, je $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^{1j})$

(na pravé straně ve 2) jsou vesměs determinanty matic řádu $n-1$, které už jsou rekurentně definovány). Tento přístup obchází nutnost použití permutací a je snad názornější, ale nevede ke zjednodušení důkazů.

6.5 Cramerovo pravidlo a vzorec pro inverzní matici

6.5.1 Cramerovo pravidlo

Věta 129. *Je-li A regulární, potom pro řešení x soustavy $Ax = b$ platí*

$$x_j = \frac{\det(A + (b - A_{\bullet j})e_j^T)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Poznámka. $A + (b - A_{\bullet j})e_j^T$ je jednoduše *matice vzniklá nahrazením j-tého sloupce matice A sloupcem pravých stran b.* Toto „pravidlo" má dnes už jen teoretický význam, v době svého vzniku v 18. století se však stalo rázem populární a rozšířilo se ještě za autorova života[1] do škol po celé Evropě (Gaussova eliminace byla objevena až o více než půl století později).

Důkaz. Nechť x je řešením $Ax = b$. Označme X matici vzniklou z jednotkové matice I nahrazením jejího j-tého sloupce vektorem x. Potom platí

$$A + (b - A_{\bullet j})e_j^T = (A_{\bullet 1}, \ldots, b, \ldots, A_{\bullet n}) = (Ae_1, \ldots, Ax, \ldots, Ae_n) = AX \tag{6.4}$$

a podle věty o násobení determinantů

$$\det(A + (b - A_{\bullet j})e_j^T) = \det(A)\det(X) = \det(A)x_j,$$

neboť $\det(X) = (-1)^{j+j}x_j \det(I_{n-1}) = x_j$ Laplaceovým rozvojem podle j-tého řádku, což dává hledaný vzorec pro x_j. □

6.5.2 Adjungovaná matice

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme adjungovanou[2] matici $\mathrm{adj}\,(A)$ předpisem

$$(\mathrm{adj}\,(A))_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Poznámka. Je to tedy matice sestavená z algebraických doplňků. Povšimněte si přehozených indexů v definici, což vede k častým chybám při výpočtu. Je proto lepší počítat podle vzorce

$$((\mathrm{adj}\,(A))^T)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij}),$$

ve kterém jdou indexy ve stejném pořadí, a teprve na konec přejít transpozicí od $(\mathrm{adj}\,(A))^T$ k $\mathrm{adj}\,(A)$.

6.5.3 Vzorec pro inverzní matici

Věta 130. *Pro každou regulární matici A platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}\,(A).$$

Poznámka. Jinými slovy, pro každé j, i je

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{i+j}\det(A^{ij})}{\det(A)}.$$

To dává explicitní vzorec pro prvky inverzní matice. Podobně jako Cramerovo pravidlo má dnes tento vzorec už jen teoretický význam, pro praktický výpočet je vhodnější metoda založená na Gauss-Jordanově eliminaci popsaná v části 1 (str. 35).

[1]G. Cramer, 1704–1752.
[2]Z angl. „adjoint".

Důkaz. Pro každé j, i je $(A^{-1})_{ji} = x_j$, kde x je řešením $Ax = e_i$. Podle Cramerova pravidla je potom

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{\det(A + (e_i - A_{\bullet j})e_j^T)}{\det(A)} = \frac{(-1)^{i+j}\det(A^{ij})}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{adj}\,(A))_{ji}$$

(kde jsme použili Laplaceův rozvoj determinantu $\det(A + (e_i - A_{\bullet j})e_j^T)$ podle j-tého sloupce), což dává

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}\,(A).$$ □

Důsledek. *Pro každou čtvercovou matici A platí $A \cdot \mathrm{adj}\,(A) = (\det(A))I$.*

Důkaz. Pro $\det(A) \neq 0$ plyne tato rovnost ihned z věty 130, pro $\det(A) = 0$ plyne nulovost každého prvku matice $A \cdot \mathrm{adj}\,(A)$ z Laplaceova rozvoje. □

Kapitola 7

Vlastní čísla

Až dosud vedly výpočty s reálnými maticemi vždy k reálným výsledkům. To však přestává platit u vlastních čísel, která mohou i pro reálné matice být komplexní. Studium pouze reálných matic zde proto ztrácí smysl. To je důvod, proč v této kapitole přecházíme ke komplexním maticím.

7.1 Definice a základní vlastnosti

7.1.1 Definice vlastních čísel

Definice. Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Jestliže platí

$$Ax = \lambda x$$

pro jisté $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, potom číslo λ nazýváme vlastním číslem matice A a vektor x vlastním vektorem příslušným k tomuto vlastnímu číslu.

Poznámka. Podmínka „$x \neq 0$" v definici je nezbytná: kdybychom připustili i $x = 0$, potom by každé $\lambda \in \mathbb{C}$ bylo vlastním číslem matice A a definice by ztratila smysl.

Poznámka. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně: je-li x vlastním vektorem, potom pro každé $\alpha \neq 0$ je i αx vlastním vektorem příslušejícím ke stejnému vlastnímu číslu.

7.1.2 Charakterizace vlastních čísel

Věta 131. *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A právě když platí*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Důkaz. $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A právě když $(A - \lambda I)x = 0$ pro jisté $x \neq 0$, tj. právě když $A - \lambda I$ je singulární, což je podle věty 125 ekvivalentní tomu, že $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

7.1.3 Konečný počet vlastních čísel

Z definice determinantu plyne, že

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0,$$

je to tedy polynom n-tého stupně v λ, kterému se říká charakteristický polynom matice A, a vlastní čísla jsou podle předchozí věty jeho kořeny. Podle základní věty algebry[1] má tento polynom právě n (obecně komplexních) kořenů, počítáme-li každý kořen v jeho násobnosti. Dostáváme tak tento výsledek:

Věta 132. *Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má právě n vlastních čísel, počítáme-li každé v jeho násobnosti (jakožto kořenu charakteristického polynomu).*

Definice. Množina všech vlastních čísel matice A se nazývá spektrum matice A.

7.1.4 Příklad

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a charakteristický polynom má kořeny $\pm i$. Vidíme tedy, že reálná matice nemusí mít reálná vlastní čísla.

7.1.5 Souvislost determinantu s vlastními čísly

Věta 133. *Determinant čtvercové matice je roven součinu jejích vlastních čísel.*

Důkaz. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n),$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A (tj. kořeny charakteristického polynomu). Dosazením $\lambda = 0$ dostáváme

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

□

7.1.6 Vlastní čísla trojúhelníkové matice

Věta 134. *Vlastními čísly horní (dolní) trojúhelníkové matice jsou právě všechny její diagonální prvky.*

Důkaz. Protože $A - \lambda I$ je opět horní (dolní) trojúhelníková, platí podle věty 119

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda),$$

takže kořeny charakteristického polynomu jsou právě čísla $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. □

[1] Základní věta algebry (Gauss 1799) říká, že každý polynom $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ stupně $n \geq 1$ lze psát ve tvaru $p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ pro jistá komplexní čísla λ_j ($j = 1, \ldots, n$), což jsou právě všechny kořeny polynomu p. Polynom stupně $n \geq 1$ má tedy právě n komplexních kořenů, počítáme-li každý v jeho násobnosti.

7.1.7 Vlastní čísla blokově trojúhelníkové matice

Věta 135. *Nechť B, C jsou čtvercové matice (ne nutně stejného řádu). Potom $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice*

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$$

právě když je buď vlastním číslem B, nebo vlastním číslem C.

Důkaz. Podle věty 120 je pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\det(C - \lambda I),$$

takže $\det(A - \lambda I) = 0$ právě když buď $\det(B - \lambda I) = 0$, nebo $\det(C - \lambda I) = 0$. □

7.1.8 Podobné matice mají stejná vlastní čísla

Definice. Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývají podobné, jestliže platí $A = SBS^{-1}$ pro jistou regulární matici $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Věta 136. *Podobné matice mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Je-li $A = SBS^{-1}$, potom

$$A - \lambda I = SBS^{-1} - \lambda I = S(B - \lambda I)S^{-1}$$

a tedy

$$\det(A - \lambda I) = \det(S) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I)$$

(viz větu 122), takže matice A a B mají stejný charakteristický polynom a proto i stejná vlastní čísla. □

Poznámka. Tato nenápadná věta hraje v teorii vlastních čísel mimořádně důležitou úlohu. Protože vlastní čísla se při podobnostní transformaci $A \mapsto SAS^{-1}$ nemění, ukazuje tato věta na možnost redukce matice na jednodušší tvar při zachování původních vlastních čísel.

7.1.9 AB a BA mají stejná vlastní čísla

Věta 137. *Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, potom AB a BA mají stejná vlastní čísla.*

Poznámka. To je velmi netriviální tvrzení protože, jak víme, obecně $AB \neq BA$.

Důkaz. Platí

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

kde všechny matice jsou z $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Protože matice

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

je regulární (její determinant je podle věty 120 roven jedné), dostáváme

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1},$$

takže matice

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

jsou podobné a proto mají stejná vlastní čísla. Vlastní čísla první z nich jsou vlastní čísla AB plus n nul (věta 135), vlastní čísla druhé z nich jsou vlastní čísla BA plus n nul. Z toho plyne tvrzení věty. □

Poznámka. Je-li jedna z matic, např. A, regulární, lze důkaz provést mnohem jednodušeji: protože $AB = A(BA)A^{-1}$, jsou matice AB a BA podobné a proto mají stejná vlastní čísla.

7.1.10 Je-li $AB = BA$, potom A a B mají společný vlastní vektor

Věta 138. *Nechť pro matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí $AB = BA$. Potom ke každému vlastnímu číslu A existuje vlastní vektor, který je rovněž vlastním vektorem B (příslušejícím obecně k jinému vlastnímu číslu).*

Důkaz. Nechť $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$. Uvažujme posloupnost vektorů $x, Bx, B^2x, \ldots$. Jelikož prostor $\mathbb{C}^n$ je n-rozměrný, musí existovat nejmenší $k \leq n$ takové, že B^kx je lineární kombinací vektorů $x, Bx, B^2x, \ldots, B^{k-1}x$, tj.

$$B^kx = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j B^j x.$$

Potom platí

$$BX = XC, \tag{7.1}$$

kde X je matice o sloupcích $x, Bx, \ldots, B^{k-1}x$ a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \beta_{k-1} \end{pmatrix},$$

tj. $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ a $C \in \mathbb{C}^{k\times k}$. Nechť $\mu \in \mathbb{C}$ je libovolné vlastní číslo matice C a $y \in \mathbb{C}^n$ jemu odpovídající vlastní vektor. Z (7.1) potom plyne

$$BXy = XCy = X\mu y = \mu Xy,$$

takže $z = Xy$ je vlastní vektor B (sloupce X jsou podle konstrukce k lineárně nezávislé a $y \neq 0$, takže $Xy \neq 0$) a platí pro něj

$$z = \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} B^j x.$$

Nyní, z $AB = BA$ plyne $AB^j = B^j A$ pro každé $j \geq 1$. Pro $j = 1$ je to předpoklad věty, a dále indukcí: z $AB^{j-1} = B^{j-1}A$ plyne $AB^j = AB^{j-1}B = B^{j-1}AB = B^{j-1}BA = B^j A$. Tedy

$$Az = \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} AB^j x = \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} B^j Ax = \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} B^j \lambda x = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} B^j x = \lambda z,$$

takže z je vlastním vektorem jak A, tak B. □

7.1.11 Cayley-Hamiltonova věta

Věta 139. (Cayley-Hamilton) *Je-li*

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

charakteristický polynom matice A, potom platí

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Jinými slovy, každá matice je „kořenem” svého charakteristického polynomu.

Důkaz. Podle důsledku věty 130 platí pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(A - \lambda I) \cdot \mathrm{adj}(A - \lambda I) = (\det(A - \lambda I))I. \tag{7.2}$$

Protože každý prvek matice $\mathrm{adj}(A - \lambda I)$ je polynom v λ stupně nejvýše $n - 1$, lze tuto matici psát ve tvaru

$$\mathrm{adj}(A - \lambda I) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0$$

pro jisté matice $B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 0, \ldots, n - 1$. Z rovnosti (7.2) potom dostáváme

$$(A - \lambda I)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0) = ((-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)I$$

a rozepsáním

$$\begin{aligned} -\lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \ldots + \lambda(AB_1 - B_0) + AB_0 \\ = (-1)^n \lambda^n I + a_{n-1}\lambda^{n-1} I + \ldots + a_1 \lambda I + a_0 I. \end{aligned}$$

Jelikož tato rovnost platí pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, musí se rovnat matice u stejných mocnin λ na obou stranách, což dává

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= (-1)^n I, && (7.3) \\ AB_j - B_{j-1} &= a_j I \qquad (j = n-1, \ldots, 1), && (7.4) \\ AB_0 &= a_0 I. \end{aligned}$$

Přenásobením rovnice (7.3) zleva maticí A^n a každé z rovnic (7.4) zleva maticí A^j ($j = n-1, \ldots, 1$) a sečtením všech rovnic dostáváme

$$-A^n B_{n-1} + (A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2}) + (A^{n-1} B_{n-2} - A^{n-2} B_{n-3}) + \ldots + A^2 B_1 - AB_0 + AB_0$$

$$= 0 = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I,$$

což je tvrzení věty. □

7.1.12 Odhad vlastních čísel pomocí normy

Věta 140. *Pro libovolnou normu $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty] \cup \{F\}$, platí*

$$|\lambda| \leq \|A\|_p$$

pro každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Důkaz. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice A a $x \neq 0$ k němu příslušející vlastní vektor, potom z $Ax = \lambda x$ dostáváme

$$|\lambda| \cdot \|x\|_p = \|\lambda x\|_p = \|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

podle (5.2) a odsud $|\lambda| \leq \|A\|_p$. □

7.2 Jordanova normální forma matice

7.2.1 Jordanova normální forma: úvod

Věta 136 navozuje možnost upravit matici na jednodušší tvar při zachování vlastních čísel. Ideálně jednoduchou maticí by byla diagonální matice. Ukazuje se však, že ne každou matici lze podobnostní transformací upravit na diagonální tvar. Kdyby byla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podobná diagonální matici D, tj. $A = SDS^{-1}$, potom by D musela musela mít stejná vlastní čísla jako A, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, a byla by proto rovna jednotkové matici I. Z toho by plynulo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = SIS^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což je spor. Tedy A není podobná žádné diagonální matici.

Nejjednodušší tvar, na který je možno podobnostní transformací převést *každou* matici, je tzv. Jordanova normální forma.

7.2.2 Jordanův blok

Definice. Matici tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$ a k je řád matice, nazýváme Jordanovým blokem.

Poznámka. Lze rovněž psát $J_k(\lambda) = \lambda I_k + e_1 e_2^T + \ldots + e_{k-1} e_k^T$.

7.2.3 Jordanova normální forma

Definice. Říkáme, že matice J je v Jordanově normální formě, jestliže je tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

kde $J_{k_i}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$, jsou Jordanovy bloky. Přitom čísla k_i ani λ_i nemusí být navzájem různá (tj. některá se mohou opakovat).

7.2.4 Jordanova věta o normální formě

Věta 141. (Jordan[2]) *Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná jisté matici J v Jordanově normální formě, tj. $A = SJS^{-1}$ pro jistou regulární matici $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Přitom matice J je určena jednoznačně až na pořadí diagonálních bloků, a na její diagonále stojí právě všechna vlastní čísla matice A. Má-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ všechna vlastní čísla reálná, potom J je reálná a i S lze volit reálnou.*

Definice. Matici J nazýváme Jordanovou normální formou matice A.

Poznámka. Důkaz této věty neuvádíme, protože je značně obtížný. Lze ho nalézt např. v knihách Halmos [11] (důkaz přes vektorové prostory) nebo Horn a Johnson [12] (důkaz maticovými prostředky).

7.2.5 Zvláštnost Jordanovy normální formy

Ve formulaci Jordanovy věty je skryt fakt, který lze snadno přehlédnout a který je na první pohled těžko pochopitelný: témuž vlastnímu číslu λ může v matici J odpovídat několik Jordanových bloků (takže řada jedniček na vedlejší diagonále je „přetržena”, viz definici 7.2.3), z nichž některé navíc mohou mít stejnou velikost, a *nelze* je spojit v jediný Jordanův blok.

[2] M. E. C. Jordan (1838-1922), francouzský matematik; není spoluautorem Gauss-Jordanovy eliminace, tím je německý geodet W. Jordan (1842-1899).

7.2.6 Příklad

Matice

$$\begin{pmatrix} -60 & 1 & 42 & -3 & -10 & 4 \\ 133 & 0 & -92 & 6 & 23 & -8 \\ -186 & 3 & 128 & -9 & -30 & 12 \\ 252 & -4 & -171 & 14 & 41 & -16 \\ -310 & 5 & 210 & -15 & -48 & 20 \\ 372 & -6 & -252 & 18 & 60 & -22 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(\lambda) = (\lambda - 2)^6$ a má tedy šestinásobné vlastní číslo $\lambda = 2$. Její Jordanova normální forma má tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a sestává ze tří Jordanových bloků řádů 3, 2 a 1. Vysvětlení tohoto faktu podává následující věta.

7.2.7 Jednoznačnost

Věta 142. *Nechť platí $A = SJS^{-1}$, kde J je v Jordanově normální formě. Potom počet $d_k(\lambda)$ Jordanových bloků $J_k(\lambda)$ odpovídajících vlastnímu číslu λ matice A v matici J je dán vzorcem*

$$d_k(\lambda) = \operatorname{rank}((A - \lambda I)^{k-1}) - 2\operatorname{rank}((A - \lambda I)^k) + \operatorname{rank}((A - \lambda I)^{k+1}). \tag{7.5}$$

Důkaz. Viz Horn a Johnson [12]. □

Poznámka. Věta ukazuje, že velikosti a počty Jordanových bloků v Jordanově normální formě jsou jednoznačně určeny maticí A (povšimněte si, že pravá strana (7.5) nezávisí na S). Struktura Jordanovy normální formy je proto plně určena maticí A a bloky odpovídající stejnému vlastnímu číslu nelze spojit do jednoho bloku.

7.2.8 Konstrukce Jordanovy normální formy

Z předchozího plyne, že pouhá znalost vlastních čísel matice A nestačí ke konstrukci její Jordanovy normální formy. K výpočtu velikostí a počtů Jordanových bloků je potřebná dodatečná znalost čísel $\operatorname{rank}((A - \lambda_j I)^k)$, $j, k = 1, 2, \ldots$, ve smyslu vzorce (7.5).

7.2.9 Nestabilita Jordanovy normální formy

Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a je rovna svojí normální formě. Pro libovolné $\varepsilon \neq 0$ má matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$ a Jordanovu normální formu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že pro libovolně malé $\varepsilon \neq 0$ se prvek a_{12} v Jordanově normální formě změní z 1 na 0. Jordanova normální forma matice je tedy vysoce nestabilní. Vzhledem k tomu se zřídka používá v numerických výpočtech, je to však důležitý teoretický nástroj.

7.3 Schurova triangularizační věta

7.3.1 Konjugovaná matice

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definujeme konjugovanou[3] matici $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ předpisem

$$A^* = \overline{A}^T,$$

kde $\overline{A}$ sestává z komplexně sdružených koeficientů matice A.

Poznámka. To znamená, že $(A^*)_{ji} = \overline{A_{ij}}$ pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom $A^* = A^T$, takže konjugovaná matice je zobecněním transponované matice na komplexní případ.

7.3.2 Příklady

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 5-6i \\ 3-4i & 7-8i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1+2i & 5+6i \\ 3+4i & 7+8i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

7.3.3 Vlastnosti konjugované matice

Věta 143. *Pro komplexní matice platí:*

1) $(A^*)^* = A$,
2) *jsou-li* A, B *stejného typu, je* $(A + B)^* = A^* + B^*$,
3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$,
4) *je-li součin* AB *definován, je i* B^*A^* *definován a platí* $(AB)^* = B^*A^*$.

Poznámka. Věta je úplnou analogií věty 3 o vlastnostech transpozice a dokazuje se stejným způsobem, proto její důkaz vynecháváme.

[3] Z angl. „conjugate transpose" – „komplexně sdružená transpozice".

7.3.4 Unitární matice

Definice. Matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá unitární, jestliže $U^*U = I$.

Poznámka. Unitární matice jsou zobecněním ortogonálních matic na komplexní případ a mají stejné vlastnosti. Speciálně pro unitární matici U je $U^* = U^{-1}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & U \end{pmatrix}$ je rovněž unitární a součin unitárních matic je unitární matice.

7.3.5 Schurova triangularizační věta, obecný tvar

Následující větu lze považovat za centrální výsledek o vlastních číslech, a to jak z teoretického, tak z praktického hlediska.

Věta 144. (Schurova triangularizační věta) *Ke každé matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a horní trojúhelníková matice $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tak, že*

$$A = UTU^*, \tag{7.6}$$

přičemž diagonálu matice T tvoří právě všechna vlastní čísla matice A v libovolném předem daném pořadí. Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a jsou-li všechna vlastní čísla matice A reálná, potom U lze zvolit reálnou ortogonální a T reálnou.

Poznámka. Zde i u dalších obdobných rozkladů je důležité si uvědomit, že pro unitární matici U je $U^* = U^{-1}$, takže (7.6) má tvar $A = UTU^{-1}$, což znamená, že matice A a T jsou podobné a mají stejná vlastní čísla (věta 136).

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ stačí položit $U = I_1$, $T = A$. Nechť tedy tvrzení platí až do $n - 1 \geq 1$ a nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A ve zvoleném pořadí a nechť x je vlastní vektor příslušný k λ_1, $\|x\|_2 = 1$. Doplňme x na unitární matici $U_1 = (x\ X)$, kde $X \in \mathbb{C}^{n\times(n-1)}$ (věta 56), takže $X^*x = 0$. Potom

$$\begin{aligned} U_1^*AU_1 &= \begin{pmatrix} x^* \\ X^* \end{pmatrix} A(x\ X) = \begin{pmatrix} x^*Ax & x^*AX \\ X^*Ax & X^*AX \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX \\ \lambda_1 X^*x & X^*AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX \\ 0 & X^*AX \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Protože U_1 je unitární, je výsledná matice podobná A, takže má stejná vlastní čísla, proto matice X^*AX musí mít zbylá vlastní čísla $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. K této matici podle indukčního předpokladu existuje unitární matice $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ taková, že $\tilde{U}^*X^*AX\tilde{U} = \tilde{T}$, kde $\tilde{T}$ je horní trojúhelníková matice s diagonálními prvky $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}^* U_1^*AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX \\ 0 & X^*AX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX\tilde{U} \\ 0 & \tilde{U}^*X^*AX\tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX\tilde{U} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

takže položíme-li

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix},$$

je U, jakožto součin unitárních matic, unitární a platí

$$A = UTU^*,$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x^*AX\tilde{U} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

je horní trojúhelníková matice s diagonálními prvky $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Je-li A reálná a má-li reálná vlastní čísla, potom matice U_1 i $\tilde{U}$ lze zvolit reálné ortogonální a tedy i výsledná matice U je reálná ortogonální a $T = U^T AU$ je reálná. □

7.3.6 Simultánní triangularizace

Následující věta hraje pomocnou roli (používá se pouze v důkazu věty 164) a lze ji při prvním čtení vynechat.

Věta 145. *Nechť pro $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí $AB = BA$. Potom existuje unitární matice U a horní trojúhelníkové matice T_1, T_2 tak, že platí*

$$A = UT_1U^*, \tag{7.7}$$

$$B = UT_2U^*. \tag{7.8}$$

Jsou-li A, B reálné a jsou-li všechna jejich vlastní čísla reálná, potom U lze zvolit reálnou ortogonální a T_1, T_2 reálné.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť stačí položit $U = I_1$, $T_1 = A$, $T_2 = B$. Nechť tedy tvrzení platí až do $n - 1 \geq 1$ včetně a nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $AB = BA$. Podle věty 138 mají A a B společný vlastní vektor $x \in \mathbb{C}^n$, tj. platí $Ax = \lambda x$, $Bx = \mu x$, $\|x\|_2 = 1$. Použijeme nyní tento *společný* vlastní vektor tak, jak jsme to učinili v důkazu Schurovy triangularizační věty 144: doplňme x na unitární matici $U_1 = (x\ X)$, potom, jak je ukázáno v důkazu věty 144, platí

$$U_1^*AU_1 = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AX \\ 0 & X^*AX \end{pmatrix},$$

$$U_1^*BU_1 = \begin{pmatrix} \mu & x^*BX \\ 0 & X^*BX \end{pmatrix},$$

přičemž $(X^*AX)(X^*BX) = X^*ABX = X^*BAX = (X^*BX)(X^*AX)$, takže matice X^*AX, X^*BX komutují a podle indukčního předpokladu existuje unitární matice $\tilde{U}$ taková, že

$$\tilde{U}^*X^*AX\tilde{U} = \tilde{T}_1,$$

$$\tilde{U}^*X^*BX\tilde{U} = \tilde{T}_2,$$

kde $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$ jsou horní trojúhelníkové matice. Potom dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}^* U_1^*AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AX\tilde{U} \\ 0 & \tilde{T}_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}^* U_1^* B U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & x^* B X \tilde{U} \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix},$$

takže (7.7), (7.8) platí pro

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \lambda & x^* A X \tilde{U} \\ 0 & \tilde{T}_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \mu & x^* B X \tilde{U} \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Zbývající tvrzení pro reálné matice s reálnými vlastními čísly je zřejmé, protože celou konstrukci lze potom provést v reálných číslech. □

7.3.7 Schurova triangularizační věta, reálná forma

Určitou nevýhodou Schurovy triangularizační věty je skutečnost, že pro reálnou matici A mohou v rozkladu $A = UTU^*$ matice T i U být komplexní. Ukazuje se však, že povolíme-li v matici T výskyt nenulových prvků i na diagonále bezprostředně pod hlavní diagonálou, potom lze rozklad reálné matice provést v reálných číslech.

Věta 146. (Schurova triangularizační věta, reálná forma) *Ke každé matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že*

$$A = QTQ^T,$$

kde $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je blokově diagonální horní trojúhelníková matice, na jejíž diagonále stojí buď bloky 1×1 sestávající z reálných vlastních čísel A, nebo bloky 2×2 jejichž vlastní čísla jsou dvojice komplexně sdružených[4] vlastních čísel A. Přitom Q je možno volit tak, že diagonální bloky mohou být seřazeny v libovolném předem daném pořadí.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ má matice právě jedno reálné vlastní číslo A_{11} a stačí volit $Q = I_1$, $T = A$. Nechť tedy tvrzení platí až do $n - 1 \geq 1$ a nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jestliže první blok ve zvoleném pořadí je matice 1×1 sestávající z reálného vlastního čísla λ_1, postupujeme jako v důkazu věty 144. Jestliže první blok odpovídá dvojici komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_1 \pm \lambda_2 i$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq 0$, zvolme vlastní vektor $x = x_1 + x_2 i \neq 0$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$), potom z $Ax = \lambda x$ plyne

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \tag{7.9}$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2. \tag{7.10}$$

Přitom platí

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(x + \overline{x}), \tag{7.11}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2i}(x - \overline{x}). \tag{7.12}$$

Vektory x, $\overline{x}$ jsou lineárně nezávislé: kdyby byly lineárně závislé, existovalo by $\alpha \neq 0$ tak, že $\overline{x} = \alpha x$, z čehož by plynulo $\alpha\lambda x = \alpha A x = A(\alpha x) = A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x} = \alpha\overline{\lambda} x$ a odtud $\lambda = \overline{\lambda}$ ve sporu s $\lambda_2 \neq 0$. Podle (7.11), (7.12) jsou tedy i x_1, x_2 lineárně nezávislé. Položme $X = (x_1\ x_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$,

[4] Charakteristický polynom $p(\lambda)$ reálné matice A má s každým kořenem λ rovněž komplexně sdružený kořen $\overline{\lambda}$ stejné násobnosti. To plyne z toho, že je-li $p(\lambda) = 0$, potom $p(\overline{\lambda}) = \overline{p(\lambda)} = \overline{0} = 0$.

potom podle věty 106 existuje matice $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ s ortonormálními sloupci a regulární matice $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tak, že $X = \hat{Q}R$. Z (7.9), (7.10) plyne

$$AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$A\hat{Q}R = \hat{Q}R \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

a odtud

$$\hat{Q}^T A\hat{Q} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} R^{-1}. \tag{7.13}$$

Doplníme-li nyní matici $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ na ortogonální matici $\tilde{Q} = (\hat{Q}\ Q_1)$, potom

$$Q_1^T A\hat{Q} = Q_1^T \hat{Q}R \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} R^{-1} = 0$$

(neboť $Q_1^T\hat{Q} = 0$ z ortogonality $\tilde{Q}$) a tedy

$$\tilde{Q}^T A\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \hat{Q}^T \\ Q_1^T \end{pmatrix} A(\hat{Q}\ Q_1) = \begin{pmatrix} \hat{Q}^T A\hat{Q} & \hat{Q}^T AQ_1 \\ Q_1^T A\hat{Q} & Q_1^T AQ_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}^T A\hat{Q} & \hat{Q}^T AQ_1 \\ 0 & Q_1^T AQ_1 \end{pmatrix},$$

přičemž levý horní blok $\hat{Q}^T A\hat{Q}$ je vzhledem k (7.13) podobný matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 \pm \lambda_2 i$. Na pravou dolní matici $Q_1^T AQ_1$ nyní aplikujeme indukční předpoklad tak jako v důkazu věty 144, čímž je tvrzení dokázáno. □

7.3.8 Příklad

Náhodně generovaná reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 9.6689 & 1.3701 & 7.3491 & 1.5561 \\ 6.6493 & 8.1876 & 6.8732 & 1.9112 \\ 8.7038 & 4.3017 & 3.4611 & 4.2245 \\ 0.0993 & 8.9032 & 1.6603 & 8.5598 \end{pmatrix}$$

má Schurův rozklad $A = UTU^*$ (věta 144), kde

$$T = \begin{pmatrix} 20.8938 & 0.6230 - 1.7592i & 0.6226 - 2.1307i & -0.8148 - 2.0939i \\ 0 & -2.4923 & 2.6116 - 0.5456i & 1.2534 - 0.5608i \\ 0 & 0 & 5.7380 + 2.1429i & 5.8070 - 4.3990i \\ 0 & 0 & 0 & 5.7380 - 2.1429i \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.4202 - 0.1713i & -0.3484 + 0.3914i & -0.2421 + 0.1038i & 0.1129 + 0.6613i \\ -0.5297 - 0.2159i & -0.1959 + 0.2201i & 0.0427 + 0.3637i & -0.2466 - 0.6253i \\ -0.4487 - 0.1829i & 0.5307 - 0.5961i & -0.1605 + 0.2420i & -0.0279 + 0.2079i \\ -0.4462 - 0.1818i & 0.0272 - 0.0305i & 0.3387 - 0.7730i & 0.2145 - 0.0895i \end{pmatrix},$$

a má tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 20.8938$, $\lambda_2 = -2.4923$, $\lambda_3 = 5.7380+2.1429i$, $\lambda_4 = 5.7380-2.1429i$. Její reálný Schurův rozklad (věta 146) má tvar $A = QTQ^T$, kde

$$T = \begin{pmatrix} 20.8938 & 1.8662 & -2.2490 & -2.2177 \\ 0 & -2.4923 & -1.2109 & -2.7454 \\ 0 & 0 & 5.7380 & -0.5836 \\ 0 & 0 & 7.8687 & 5.7380 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4538 & 0.5240 & -0.6933 & -0.1972 \\ 0.5720 & 0.2947 & 0.6909 & -0.3296 \\ 0.4845 & -0.7981 & -0.2019 & -0.2959 \\ 0.4818 & -0.0408 & 0.0357 & 0.8746 \end{pmatrix}.$$

Reálná vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A jsou na prvních dvou místech diagonály matice T, a dvojice komplexně sdružených vlastních čísel λ_3, λ_4 je skryta jako dvojice vlastních čísel matice $T(3:4, 3:4)$ v pravém dolním rohu (odkud ji lze v případě potřeby vypočítat např. řešením kvadratické rovnice). Je zřejmé, že reálný Schurův rozklad je mnohem úspornější, nezobrazuje však všechna vlastní čísla explicitně. (Výsledky byly zaokrouhleny na 4 desetinná místa.)

7.3.9 Redukce na horní Hessenbergův resp. třídiagonální tvar

Definice. Říkáme, že matice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je v horním Hessenbergově tvaru, jestliže platí $H_{ij} = 0$ pro $j < i-1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Věta 147. *Ke každé matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice Q a matice H v horním Hessenbergově tvaru tak, že platí*

$$A = QHQ^T. \tag{7.14}$$

Důkaz. Blokově diagonální horní trojúhelníková matice T z věty 146 má na diagonále vesměs bloky 1×1 nebo 2×2 a je proto v horním Hessenbergově tvaru. □

Převedení matice na horní Hessenbergův tvar a nalezení rozkladu (7.14) lze provést pomocí Householderovy transformace podle věty 102. Z algoritmu navíc vyplývá, že Q lze volit tak, aby platilo $Q_{\bullet 1} = Q^T_{1\bullet} = e_1$.

% Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$Q = I_n$; $\widetilde{A} = A$;
for $j = 1 : n-2$
  $x = \widetilde{A}(j+1:n, j)$;
  if $x_1 \neq \|x\|_2$
    $x_1 = x_1 - \|x\|_2$;
    $H(x) = I_{n-j} - 2\frac{xx^T}{x^Tx}$;
    $H = \begin{pmatrix} I_j & 0 \\ 0 & H(x) \end{pmatrix}$;
    $\widetilde{A} = H\widetilde{A}H^T$;
    $Q = HQ$;
  end
end
$H = \widetilde{A}$; $Q = Q^T$;
% Platí $A = QHQ^T$, kde H je v horním Hessenbergově tvaru a Q je ortogonální.

Definice. Říkáme, že matice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je třídiagonální, jestliže platí $H_{ij} = 0$ pro $|i-j| > 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Věta 148. *Ke každé symetrické matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice Q a symetrická třídiagonální matice H tak, že platí*

$$A = QHQ^T. \tag{7.15}$$

Důkaz. Podle věty 147 je $A = QHQ^T$, kde H je v horním Hessenbergově tvaru. Potom $H = Q^T AQ$, takže $H^T = (Q^T AQ)^T = Q^T AQ = H$, tj. H je symetrická a proto je třídiagonální. □

Z důkazu vyplývá, že předchozí algoritmus aplikovaný na symetrickou matici dává její rozklad (7.15) se symetrickou třídiagonální maticí H.

7.4 Diagonalizovatenost a unitární diagonalizovatelnost

7.4.1 Diagonalizovatelnost

Definice. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá diagonalizovatelná, jestliže je podobná diagonální matici.

Poznámka. Příklad z části 7.2.1 ukazuje, že ne každá matice je diagonalizovatelná.

Věta 149. *Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

Důkaz. Je-li A diagonalizovatelná, potom $A = S\Lambda S^{-1}$ pro jistou regulární matici S a diagonální matici Λ. Podle věty 136 sestává diagonála matice Λ právě ze všech vlastních čísel matice A. Ze vztahu $AS = S\Lambda$ dostáváme potom

$$AS_{\bullet j} = \Lambda_{jj} S_{\bullet j},$$

takže $S_{\bullet j}$ je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu Λ_{jj} $(j = 1, \ldots, n)$. Protože S je regulární, jsou její sloupce lineárně nezávislé, takže A má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Naopak, nechť A má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $x_1, \ldots, x_n$ příslušejících vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Je-li Λ diagonální matice s diagonálními prvky $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a je-li S matice sestávající ze sloupců $x_1, \ldots, x_n$, potom S je regulární protože její sloupce jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, a pro $j = 1, \ldots, n$ platí

$$(AS)_{\bullet j} = AS_{\bullet j} = Ax_j = \lambda_j x_j = (S\Lambda)_{\bullet j},$$

tedy $AS = S\Lambda$ a $A = S\Lambda S^{-1}$, takže A je diagonalizovatelná. □

Věta 150. *Jsou-li všechna vlastní čísla matice A navzájem různá, potom A je diagonalizovatelná.*

Důkaz. Každému ze vzájemně různých vlastních čísel matice A odpovídá Jordanův blok velikosti 1×1, takže Jordanova normální forma matice A je diagonální a matice A je podle věty 141 diagonalizovatelná. □

Věta 151. *Ke každé matici* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje diagonalizovatelná matice* $A' \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taková, že*

$$\|A - A'\|_F < \varepsilon.$$

Poznámka. V topologické terminologii to znamená, že množina diagonalizovatelných matic je hustá v $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Důkaz. Podle Schurovy triangularizační věty 144 lze A rozložit ve tvaru $A = UTU^*$, kde U je unitární a T je horní trojúhelníková. Položme

$$\delta = \frac{\min\{\varepsilon, K\}}{2n^2},$$

kde $K = 1$ jsou-li všechny diagonální prvky matice T stejné, a

$$K = \min_{ij}\{|T_{ii} - T_{jj}|\,;\, T_{ii} \neq T_{jj}\}$$

jinak. Nechť Δ je diagonální matice s diagonálními prvky $\Delta_{ii} = i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ukážeme, že matice

$$A' = U(T + \delta\Delta)U^* \tag{7.16}$$

má požadovanou vlastnost. Především všechny diagonální prvky horní trojúhelníkové matice $T + \delta\Delta$ jsou navzájem různé. Kdyby totiž platilo $T_{kk} + \delta k = T_{\ell\ell} + \delta\ell$ pro jistá $k \neq \ell$, potom

$$0 \neq |T_{kk} - T_{\ell\ell}| = |k - \ell|\delta < n\delta < K = \min_{ij}\{|T_{ii} - T_{jj}|; T_{ii} \neq T_{jj}\},$$

což je spor. Proto A', která je podle (7.16) podobná matici $T + \delta\Delta$, má všechna vlastní čísla vzájemně různá a je tedy podle věty 150 diagonalizovatelná. Nakonec

$$\|A - A'\|_F = \|U\delta\Delta U^*\|_F = \delta\|\Delta\|_F = \delta\sqrt{1^2 + \ldots + n^2} \leq \delta n^2 < \varepsilon,$$

čímž je důkaz dokončen. □

7.4.2 Unitární diagonalizovatelnost

Definice. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá normální, jestliže $A^*A = AA^*$.

Poznámka. Třída normálních matic zahrnuje mj. komplexní unitární ($A^* = A^{-1}$), hermitovské ($A^* = A$), antihermitovské ($A^* = -A$) a reálné ortogonální ($A^T = A^{-1}$), symetrické ($A^T = A$) a antisymetrické ($A^T = -A$) matice.

Věta 152. *Normální horní trojúhelníková matice je diagonální.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle řádu n matice. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy tvrzení platí pro $n - 1 \geq 1$ a nechť $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je normální horní trojúhelníková matice. Potom T lze psát ve tvaru

$$T = \begin{pmatrix} \tau & t \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

kde $\tau \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$ a $\tilde{T} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ je horní trojúhelníková. Z (7.17) dostáváme

$$T^*T = \begin{pmatrix} \tau^* & 0^T \\ t^* & \tilde{T}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & t \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\tau|^2 & \tau^* t \\ \tau t^* & t^*t + \tilde{T}^*\tilde{T} \end{pmatrix},$$

$$TT^* = \begin{pmatrix} \tau & t \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^* & 0^T \\ t^* & \tilde{T}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\tau|^2 + \|t\|_2^2 & t\tilde{T}^* \\ \tilde{T}t^* & \tilde{T}\tilde{T}^* \end{pmatrix},$$

a vzhledem k tomu, že obě matice se rovnají, platí $|\tau|^2 = |\tau|^2 + \|t\|_2^2$, z čehož plyne $t = 0^T$, a rovněž $\tilde{T}^*\tilde{T} = \tilde{T}\tilde{T}^*$, tedy horní trojúhelníková matice $\tilde{T} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ je normální a podle indukčního předpokladu je proto diagonální. Z toho plyne, že i matice T ve tvaru (7.17) je diagonální, čímž je tvrzení indukcí dokázáno. $\square$

Definice. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá unitárně diagonalizovatelná, jestliže existuje unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že U^*AU je diagonální matice.

Věta 153. *Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitárně diagonalizovatelná právě když je normální.*

Poznámka. Na rozdíl od diagonalizovatelnosti (věta 149) lze tedy unitární diagonalizovatelnost jednoduše charakterizovat v termínech matice A.

Důkaz. (a) Je-li A unitárně diagonalizovatelná, potom $A = U\Lambda U^*$ pro jistou unitární matici U a diagonální matici Λ. Protože diagonální matice Λ je evidentně normální, platí

$$A^*A = U\Lambda^*U^*U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = (U\Lambda U^*)(U\Lambda^*U^*) = AA^*,$$

takže A je normální.

(b) Naopak, nechť A je normální. Podle Schurovy triangularizační věty 144 má A rozklad

$$A = UTU^*, \tag{7.18}$$

kde U je unitární a T je horní trojúhelníková matice, takže $T = U^*AU$ a z normality A plyne

$$T^*T = U^*A^*AU = U^*AA^*U = TT^*,$$

proto T je normální a tedy podle věty 152 je diagonální. V rozkladu (7.18) je tedy U unitární a T diagonální, takže A je unitárně diagonalizovatelná. $\square$

7.5 Hermitovské matice a komplexní SVD rozklad

7.5.1 Hermitovské matice

Definice. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá hermitovská, jestliže $A^* = A$.

Poznámka. Pro reálnou matici se podmínka redukuje na $A^T = A$. Hermitovské matice jsou tedy zobecněním symetrických matic na komplexní případ.

Věta 154. *Hermitovská matice má všechna vlastní čísla reálná.*

Důkaz. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je libovolné vlastní číslo hermitovské matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nechť $x \in \mathbb{C}^n$ je k němu příslušný vlastní vektor. Potom z rovnice $Ax = \lambda x$ přenásobením vektorem x^* dostáváme

$$x^*Ax = \lambda x^*x,$$

kde $(x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$, takže číslo x^*Ax je reálné stejně tak jako $x^*x = \|x\|_2^2 > 0$, z čehož plyne, že λ je reálné. □

Značení. Vlastní čísla hermitovské matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ značíme $\lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$, a číslujeme je tak, aby platilo

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$$

(tj. ve stejném pořadí jako singulární čísla).

7.5.2 Spektrální věta pro hermitovské matice

Věta 155. *Ke každé hermitovské matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že platí*

$$A = U\Lambda U^*, \tag{7.19}$$

kde Λ je diagonální matice s diagonálními prvky $\Lambda_{ii} = \lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$, a pro každé i je $U_{\bullet i}$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_i(A)$. Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potom U lze volit reálnou ortogonální.

Důkaz. Hermitovská matice A splňuje $A^*A = A^2 = AA^*$, je tedy normální a podle věty 153 má rozklad tvaru (7.19), kde U je unitární a Λ diagonální. Z důkazu téže věty plyne, že (7.19) je Schurův rozklad matice A, ve kterém podle Schurovy triangularizační věty 144 lze dosáhnout seřazení vlastních čísel matice A na diagonále Λ v libovolném předepsaném pořadí, tedy i v pořadí $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$, a v případě, že A je reálná, lze U volit reálnou ortogonální. Z (7.19) plyne $AU = U\Lambda$, tedy $AU_{\bullet i} = \lambda_i(A)U_{\bullet i}$, takže $U_{\bullet i}$ je vlastní vektor příslušející k $\lambda_i(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$. □

7.5.3 Komplexní SVD rozklad

Věta 156. *Pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matice A^*A hermitovská a všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*

Důkaz. A^*A je hermitovská neboť $(A^*A)^* = A^*A$. Je-li λ libovolné její vlastní číslo a x k němu příslušný vlastní vektor, potom z $A^*Ax = \lambda x$ plyne $x^*A^*Ax = \lambda x^*x$, kde $x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$ a $x^*x = \|x\|_2^2 > 0$, takže $\lambda \geq 0$. □

SVD rozklad (věta 107) lze zobecnit na případ komplexních matic. Jediný rozdíl je v tom, že ortogonální matice se nahradí unitárními, singulární čísla zůstávají reálná a nezáporná. V důkazu dvakrát použijeme faktu, že z $F^*F = 0$ plyne $F = 0$ (viz poznámku za důkazem věty 24).

Věta 157. (SVD rozklad pro komplexní matice) *Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a $q = \min\{m, n\}$. Potom existuje diagonální matice $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ splňující $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{qq} \geq 0$ a unitární matice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takové, že platí*

$$A = U\Sigma V^*.$$

Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom U, V lze volit reálné ortogonální.

Důkaz. Matice A^*A je podle věty 156 hermitovská s nezápornými vlastními čísly a má podle věty 155 spektrální rozklad

$$A^*A = V\Lambda V^*, \tag{7.20}$$

kde V je unitární a Λ je diagonální s diagonálními prvky $\lambda_1(A^*A) \geq \ldots \geq \lambda_r(A^*A) > 0 = \lambda_{r+1}(A^*A) = \ldots = \lambda_n(A^*A)$, kde jsme r označili index posledního kladného vlastního čísla. Je-li $r = 0$, potom podle (7.20) je $A^*A = 0$ a tedy $A = 0$ a stačí položit $\Sigma = 0$, $U = I_m$, $V = I_n$. Nechť tedy $r \geq 1$. Nechť $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je diagonální matice s diagonálními prvky $\sqrt{\lambda_1(A^*A)}, \ldots, \sqrt{\lambda_r(A^*A)}$, potom S je regulární a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Píšeme-li V ve tvaru $V = (V_1\ V_2)$, kde $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ a $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}$, potom z (7.20) plyne

$$V^*A^*AV = \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} A^*A(V_1\ V_2) = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \Lambda = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Porovnáním bloků na místech $(2,2)$ dostáváme

$$(AV_2)^*AV_2 = V_2^*A^*AV_2 = 0,$$

z čehož plyne

$$AV_2 = 0, \tag{7.21}$$

a porovnáním bloků $(1,1)$ dostáváme

$$V_1^*A^*AV_1 = S^2$$

a odsud

$$(AV_1S^{-1})^*(AV_1S^{-1}) = S^{-1}V_1^*A^*AV_1S^{-1} = I. \tag{7.22}$$

Tedy matice

$$U_1 = AV_1S^{-1} \in \mathbb{C}^{m\times r}$$

má ortonormální sloupce. Doplníme-li ji na unitární matici $U = (U_1\ U_2) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, potom

$$U_2^*AV_1 = U_2^*U_1S = 0 \tag{7.23}$$

a podle (7.21), (7.22), (7.23) platí

$$U^*AV = \begin{pmatrix} U_1^*AV_1 & U_1^*AV_2 \\ U_2^*AV_1 & U_2^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma,$$

tedy

$$A = U\Sigma V^*,$$

což je hledaný rozklad. Je-li A reálná, potom podle věty 155 lze matici V v rozkladu (7.20) volit reálnou ortogonální, potom i U_1 je reálná a lze ji doplnit na reálnou ortogonální matici U. □

7.6 Vlastní čísla symetrických matic

7.6.1 Spektrální věta pro symetrické matice

Věta 158. *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má všechna vlastní čísla reálná.*

Důkaz. Symetrická matice je hermitovská a proto pro ni platí věta 154. □

Nejdůležitější výsledek týkající se symetrických matic je obsažen v této větě:

Věta 159. *Ke každé symetrické matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice X taková, že platí*

$$A = X\Lambda X^T,$$

kde Λ je diagonální matice s diagonálními prvky $\Lambda_{ii} = \lambda_i(A)$, $i = 1,\dots,n$, a pro každé i je $X_{\bullet i}$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_i(A)$.

Poznámka. Diagonální prvky matice Λ tedy splňují $\Lambda_{11} \geq \Lambda_{22} \geq \ldots \geq \Lambda_{nn}$ (viz str. 152).

Důkaz. Symetrická matice je hermitovská, takže pro ni platí věta 155 v její reálné formě. □

7.6.2 Courant-Fischerova minimaxová věta

Věta 160. (Courant-Fischer) *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí*

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim W = k} \min_{0\neq x\in W} \frac{x^TAx}{x^Tx} = \max_{\dim W=k} \min_{\substack{x\in W\\ \|x\|_2=1}} x^TAx \tag{7.24}$$

$(k = 1,\dots,n)$, kde maximum se bere přes všechny podprostory $\mathbb{R}^n$ dimenze k.

Důkaz. Podle věty 159 má A spektrální rozklad

$$A = X\Lambda X^T, \tag{7.25}$$

kde X je ortogonální a Λ je diagonální s diagonálními prvky $\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A)$. Z (7.25) plyne

$$AX_{\bullet j} = \lambda_j(A)X_{\bullet j} \tag{7.26}$$

pro každé j. Uvažujme nyní libovolné $k \in \{1,\dots,n\}$, a nechť $\hat{W}$ je podprostor generovaný sloupci $X_{\bullet 1},\dots,X_{\bullet k}$. Potom $\dim \hat{W} = k$ a každý vektor $0 \neq x \in \hat{W}$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j X_{\bullet j}$, takže s využitím ortogonality X a vztahu (7.26) dostáváme

$$\begin{aligned} x^TAx &= (\sum_{j=1}^k \alpha_j X_{\bullet j})^T A(\sum_{j=1}^k \alpha_j X_{\bullet j}) = (\sum_{j=1}^k \alpha_j X_{\bullet j})^T(\sum_{j=1}^k \alpha_j\lambda_j(A)X_{\bullet j}) \qquad (7.27)\\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j^2\lambda_j(A) \geq (\min_{j=1,\dots,k}\lambda_j(A))\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = \lambda_k(A)(x^Tx), \end{aligned}$$

což dává

$$\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_k(A)$$

pro každé $0 \neq x \in \hat{W}$ a tedy

$$\min_{0 \neq x \in \hat{W}} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_k(A),$$

z čehož plyne

$$\max_{\dim W = k} \min_{0 \neq x \in W} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_k(A). \tag{7.28}$$

Pro důkaz opačné nerovnosti zvolme libovolný podprostor W prostoru $\mathbb{R}^n$ dimenze k. Protože podprostor $\tilde{W}$ generovaný sloupci $X_{\bullet k}, \ldots, X_{\bullet n}$ má dimenzi $n-k+1$, je součet dimenzí obou podprostorů roven $n+1 > n$, z čehož podle věty 46 plyne $\dim(W \cap \tilde{W}) \geq 1$ a existuje tedy vektor $0 \neq x \in W \cap \tilde{W}$ pro který, píšeme-li ho ve tvaru $x = \sum_{j=k}^n \alpha_j X_{\bullet j}$, podobně jako v (7.27) dostáváme

$$\begin{aligned} x^T A x &= (\sum_{j=k}^n \alpha_j X_{\bullet j})^T A (\sum_{j=k}^n \alpha_j X_{\bullet j}) = (\sum_{j=k}^n \alpha_j X_{\bullet j})^T (\sum_{j=k}^n \alpha_j \lambda_j(A) X_{\bullet j}) \\ &= \sum_{j=k}^n \alpha_j^2 \lambda_j(A) \leq (\max_{j=k,\ldots,n} \lambda_j(A)) \sum_{j=k}^n \alpha_j^2 = \lambda_k(A)(x^T x), \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_k(A)$$

a proto

$$\min_{0 \neq x \in W} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_k(A).$$

Jelikož W byl libovolný podprostor dimenze k, dostáváme odsud

$$\max_{\dim W = k} \min_{0 \neq x \in W} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_k(A), \tag{7.29}$$

což je opačná nerovnost, takže z (7.28) a (7.29) plyne první rovnost v (7.24). Druhou rovnost v (7.24) dostaneme z toho, že pro každé $x \neq 0$ lze psát

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)^T A \left(\frac{x}{\|x\|_2}\right).$$

□

Důsledek. *Pro největší a nejmenší vlastní číslo symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí*

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &= \max_{\|x\|_2 = 1} x^T A x, \\ \lambda_n(A) &= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T A x. \end{aligned}$$

7.6.3 Wielandt-Hoffmanova věta

Věta 161. (Wielandt-Hoffman) *Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické matice, potom pro každé $k = 1, \ldots, n$ platí*

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \|A - B\|_p$$

pro libovolnou normu $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty] \cup \{F\}$.

Poznámka. Tato věta ukazuje, že vlastní čísla symetrických matic jsou „perfektně podmíněná”: malé změny koeficientů (při zachování symetrie) vedou k malým změnám vlastních čísel.

Důkaz. Nechť $k \in \{1, \ldots, n\}$ a nechť W je podprostor $\mathbb{R}^n$ dimenze k. Potom pro každé $x \in W$, $\|x\|_2 = 1$, platí

$$x^T Ax = x^T Bx + x^T(A - B)x \geq \min_{\substack{y\in W\\ \|y\|_2=1}} y^T By + \min_{\|z\|_2=1} z^T(A - B)z = \min_{\substack{y\in W\\ \|y\|_2=1}} y^T By + \lambda_n(A - B)$$

(viz vzorec pro λ_n v důsledku Courant-Fischerovy věty), takže

$$\min_{\substack{x\in W\\ \|x\|_2=1}} x^T Ax \geq \min_{\substack{y\in W\\ \|y\|_2=1}} y^T By + \lambda_n(A - B)$$

a tedy

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim W=k} \min_{\substack{x\in W\\ \|x\|_2=1}} x^T Ax \geq \max_{\dim W=k} \min_{\substack{y\in W\\ \|y\|_2=1}} y^T By + \lambda_n(A - B) = \lambda_k(B) + \lambda_n(A - B).$$

Tím jsme dokázali, že

$$\lambda_k(B) - \lambda_k(A) \leq -\lambda_n(A - B).$$

Vyměníme-li role A a B, dostáváme odsud

$$\lambda_k(A) - \lambda_k(B) \leq -\lambda_n(B - A) = \lambda_1(A - B),$$

což dohromady dává

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \max\{|\lambda_1(A - B)|, |\lambda_n(A - B)|\} \leq \|A - B\|_p$$

pro libovolné $p \in [1, \infty] \cup \{F\}$ vzhledem k větě 140. □

7.6.4 Výpočet vlastních čísel symetrické matice: úvod

Jacobiho metoda (z r. 1846) pro výpočet vlastních čísel symetrické matice, uvedená dále, je založena na myšlence postupného snižování veličiny

$$\mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_i \sum_{j\neq i} a_{ij}^2}$$

(tj. odmocniny ze součtu čtverců *nediagonálních* prvků) ortogonálními transformacemi typu $A := G^T AG$, kde G je Givensova matice, které nemění vlastní čísla. Konstrukce Givensových matic (které se liší od jednotkové matice jen na čtyřech místech) zaručuje, že $\mathrm{off}(A) \to 0$, takže po konečně mnoha krocích $\mathrm{off}(A)$ klesne pod stanovenou mez ε. Výsledná matice je „téměř diagonální” a její diagonální prvky aproximují vlastní čísla původní matice s přesností $< \varepsilon$.

7.6.5 Odvození Jacobiho metody

Hledejme Givensovu matici $G = G(p,q,c,s)$ (viz část 5.6.4) takovou, aby pro matici $B = G^TAG$ platilo $\mathrm{off}(B) < \mathrm{off}(A)$. Podle věty 99 je $\|B\|_F = \|G^TAG\|_F = \|A\|_F$ a z toho úpravami dojdeme k

$$\mathrm{off}^2(B) = \mathrm{off}^2(A) + 2b_{pq}^2 - 2a_{pq}^2.$$

Odsud plyne, že největšího poklesu $\mathrm{off}(B)$ dosáhneme, bude-li $b_{pq} = 0$ a

$$|a_{pq}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}| = \max_{i<j} |a_{ij}| \tag{7.30}$$

(lze volit $i < j$ neboť A je symetrická). Rovnost (7.30) dává vzorec pro p a q. Pro určení c a s vyjdeme z toho, že má být

$$b_{pq} = (G^TAG)_{pq} = cs(a_{pp} - a_{qq}) + (c^2 - s^2)a_{pq} = 0,$$

tj.

$$\frac{c}{s} - \frac{s}{c} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{a_{pq}}. \tag{7.31}$$

Položíme-li

$$t = \frac{s}{c}, \quad \tau = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}},$$

přechází (7.31) v kvadratickou rovnici

$$t^2 + 2\tau t - 1 = 0,$$

která má kořeny

$$t_{1,2} = \begin{cases} -\tau + \sqrt{1+\tau^2} = \frac{1}{\tau + \sqrt{1+\tau^2}}, \\ -\tau - \sqrt{1+\tau^2} = \frac{-1}{-\tau + \sqrt{1+\tau^2}}. \end{cases}$$

Z numerického hlediska se jeví jako vhodné použití toho z obou kořenů, pro který je jmenovatel vzdálenější od nuly, tedy prvního pro $\tau \geq 0$ a druhého pro $\tau < 0$. Pro takto vypočtené t potom

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s = tc = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

splňují $c^2 + s^2 = 1$ a platí pro ně $b_{pq} = 0$. Tím jsme sestrojili hledanou Givensovu matici $G = G(p,q,c,s)$ takovou, že pro $B = G^TAG$ je

$$\mathrm{off}^2(B) = \mathrm{off}^2(A) - 2a_{pq}^2 < \mathrm{off}^2(A). \tag{7.32}$$

Pro účely důkazu konečnosti upravíme tuto nerovnost ještě do jiného tvaru. Z (7.30) plyne, že $|a_{pq}| \geq |a_{ij}|$ pro každé $i \neq j$, tedy

$$n(n-1)a_{pq}^2 \geq \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 = \mathrm{off}^2(A).$$

Z (7.32) potom dostáváme

$$\mathrm{off}^2(B) \leq \mathrm{off}^2(A) - \tfrac{2}{n(n-1)}\mathrm{off}^2(A) = (1 - \tfrac{2}{n(n-1)}) \cdot \mathrm{off}^2(A)$$

a nakonec

$$\mathrm{off}(B) \leq \sqrt{1 - \tfrac{2}{n(n-1)}} \cdot \mathrm{off}(A). \tag{7.33}$$

Docházíme tak k následujícímu popisu algoritmu. Průběžná matice je v něm značena L (místo A) a matice P slouží na konci algoritmu k seřazení diagonálních prvků podle velikosti.

7.6.6 Jacobiho metoda

% Dána: symetrická matice A.
$L = A$; $X = I$;
while off$(L) \geq \varepsilon$
  nalezni $p < q$, pro které $|\ell_{pq}| = \max_{i<j} |\ell_{ij}|$;
  $\tau = (\ell_{qq} - \ell_{pp})/(2\ell_{pq})$;
  if $\tau \geq 0$, $t = 1/(\tau + \sqrt{1+\tau^2})$;
  else $t = -1/(-\tau + \sqrt{1+\tau^2})$;
  end
  $c = 1/\sqrt{1+t^2}$; $s = tc$;
  $G = I$; $G_{pp} = c$; $G_{qq} = c$; $G_{pq} = s$; $G_{qp} = -s$;
  $L = G^T LG$; $X = XG$;
end
seřaď diagonální prvky L podle velikosti: $\ell_{k_1k_1} \geq \ldots \geq \ell_{k_nk_n}$;
nechť P je matice pro kterou $P_{\bullet i} = e_{k_i}$ pro každé i;
$L = P^T LP$;
$X = XP$;
% platí $A = XLX^T$, kde X je ortogonální a off$(L) < \varepsilon$,
% L má diagonální prvky $\ell_{11} \geq \ldots \geq \ell_{nn}$
% a platí $|\lambda_i(A) - \ell_{ii}| < \varepsilon$ pro každé i.

Poznámka. Nerovnost $|\lambda_i(A) - \ell_{ii}| < \varepsilon$ plyne z Wielandt-Hoffmanovy věty (s normou $\|\cdot\|_F$).

7.6.7 Konečnost algoritmu

Konečnost algoritmu plyne z následující věty:

Věta 162. *Pro každé $\varepsilon > 0$ algoritmus po konečně mnoha krocích nalezne matici L pro kterou off$(L) < \varepsilon$ (a zastaví se).*

Důkaz. Nechť $L^{(0)} = A$, $L^{(1)}$, $L^{(2)}, \ldots$ jsou matice sestrojené v průběhu algoritmu. Podle (7.33) platí pro každé $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{off}(L^{(k)}) \leq q \cdot \mathrm{off}(L^{(k-1)}),$$

kde

$$q = \sqrt{1 - \tfrac{2}{n(n-1)}} < 1,$$

a indukcí

$$\mathrm{off}(L^{(k)}) \leq q^k \cdot \mathrm{off}(A).$$

Jelikož $q < 1$, je $q^k \to 0$, takže pro libovolné dané $\varepsilon > 0$ existuje k, pro které $q^k \cdot \mathrm{off}(A) < \varepsilon$, tedy off$(L^{(k)}) < \varepsilon$ a algoritmus se zastaví. □

Poznámka. off$(L) < \varepsilon$ znamená, že $\sum_{i \neq j} \ell_{ij}^2 < \varepsilon^2$ a tedy speciálně $|\ell_{ij}| < \varepsilon$ pro každé $i \neq j$.

7.6.8 Příklad

Pro symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

z části 5.4.6 dostáváme Jacobiho metodou s $\varepsilon = 10^{-6}\|A\|_F = 2.0372 \cdot 10^{-5}$ po 16 iteracích

$$L = \begin{pmatrix} 18.6944 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 7.8346 & 0.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.9727 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.4984 \end{pmatrix},$$

což dává

$$\lambda_1 = 18.6944,\ \lambda_2 = 7.8346,\ \lambda_3 = 1.9727,\ \lambda_4 = 0.4984$$

(zaokrouhleno na 4 desetinná místa).

7.6.9 Pozitivní (semi)definitnost a vlastní čísla

Věta 163. *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně semidefinitní (definitní) právě když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná (kladná).*

Důkaz. Pozitivně semidefinitní matice A má reálná vlastní čísla podle věty 158. Je-li λ libovolné její vlastní číslo a x příslušný reálný vlastní vektor, potom z $Ax = \lambda x$ plyne $x^T Ax = \lambda x^T x$, kde $x^T Ax \geq 0$ a $x^T x > 0$, takže $\lambda \geq 0$. Naopak, jsou-li všechna vlastní čísla A nezáporná, potom ze spektrálního rozkladu $A = X\Lambda X^T$ plyne pro každé x

$$x^T Ax = (X^T x)^T \Lambda (X^T x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)(X^T x)_i^2 \geq 0,$$

takže A je pozitivně semidefinitní. Analogicky pro pozitivní definitnost. □

7.6.10 Odmocnina z matice

Věta 164. *Ke každé pozitivně semidefinitní matici A a ke každému přirozenému číslu $k \geq 2$ existuje právě jedna pozitivně semidefinitní matice B taková, že*

$$B^k = A. \tag{7.34}$$

Důkaz. A má spektrální rozklad $A = X\Lambda X^T$, kde na diagonále Λ stojí její nezáporná vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť $\Lambda^{1/k}$ je diagonální matice s diagonálními prvky $\sqrt[k]{\lambda_i(A)}$, $i = 1, \ldots, n$. Potom pro matici $B = X\Lambda^{1/k}X^T$ platí

$$B^k = X\Lambda^{1/k}X^T \cdot X\Lambda^{1/k}X^T \cdot \ldots \cdot X\Lambda^{1/k}X^T = X(\Lambda^{1/k})^k X^T = X\Lambda X^T = A,$$

a B je pozitivně semidefinitní protože je symetrická a je podobná matici $\Lambda^{1/k}$, takže všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že pozitivně semidefinitní matice C splňuje $C^k = A$. Sestrojme Lagrangeův interpolační polynom s uzly $\lambda_i = \lambda_i(A)$ a hodnotami $\sqrt[k]{\lambda_i}$, pro který tedy platí $p(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$ pro $i = 1, \ldots, n$, potom

$$p(A) = p(X\Lambda X^T) = Xp(\Lambda)X^T = X\Lambda^{1/k}X^T = B,$$

tedy $B = p(A) = p(C^k)$ a odtud $BC = p(C^k)C = Cp(C^k) = CB$. Tedy $BC = CB$ a obě matice mají nezáporná (tj. reálná) vlastní čísla, proto podle reálné části věty 145 existuje ortogonální matice $\tilde{X}$ taková, že matice

$$T_1 = \tilde{X}^T B\tilde{X},$$
$$T_2 = \tilde{X}^T C\tilde{X}$$

jsou horní trojúhelníkové. Přitom ze symetrie B plyne $T_1^T = \tilde{X}^T B^T\tilde{X} = \tilde{X}^T B\tilde{X} = T_1$ a podobně $T_2^T = T_2$, takže obě matice T_1, T_2 jsou diagonální a platí

$$T_1^k = \tilde{X}^T B^k\tilde{X} = \tilde{X}^T A\tilde{X} = \tilde{X}^T C^k\tilde{X} = T_2^k, \tag{7.35}$$

přičemž diagonální prvky matic T_1, T_2 jsou tvořeny nezápornými vlastními čísly pozitivně semidefinitních matic B a C, takže (7.35) implikuje $T_1 = T_2$ a odtud

$$B = \tilde{X}T_1\tilde{X}^T = \tilde{X}T_2\tilde{X}^T = C.$$

Tím jsme dokázali, že pozitivně semidefinitní matice B s vlastností (7.34) je určena jednoznačně. □

Definice. Matici B z věty 164 nazýváme k-tou odmocninou z matice A a značíme ji $A^{1/k}$.

Poznámka. K dané pozitivně semidefinitní matici A a danému $k \geq 2$ může obecně existovat více matic s vlastností $B^k = A$, ale jen jedna z nich je pozitivně semidefinitní. Např. pro

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je $B^2 = I$, ale B není nejen pozitivně semidefinitní ($e_1^T Be_1 < 0$), ale ani symetrická. Odmocninou je $I^{1/2} = I$.

Vrátíme se nyní k důkazu existence Choleského rozkladu pro pozitivně semidefinitní matice (věta 90, str. 97):

Důkaz. Je-li A pozitivně semidefinitní, potom má odmocninu $B = A^{1/2}$. Ta má podle věty 104 QR rozklad $B = QR$, kde Q je ortogonální a R je horní trojúhelníková s nezápornými diagonálními prvky. Potom $A = B^2 = B^TB = R^TQ^TQR = R^TR$, takže matice $L = R^T$ je dolní trojúhelníková s nezápornými diagonálními prvky a $A = LL^T$. Naopak, platí-li $A = LL^T$, potom pro každé x je $x^TAx = (L^Tx)^T(L^Tx) = \|L^Tx\|_2^2 \geq 0$, čili A je pozitivně semidefinitní. □

7.6.11 Algoritmus pro výpočet k-té odmocniny z matice

0. Dána: pozitivně semidefinitní matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
1. Nalezni spektrální rozklad $A = X\Lambda X^T$ Jacobiho metodou 7.6.6.
2. Polož $\Lambda_{ii} := \sqrt[k]{\Lambda_{ii}}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
3. Polož $B := X\Lambda X^T$ a ukonči: $B = A^{1/k}$.

7.6.12 Sylvesterova věta o setrvačnosti

Definice. Setrvačností symetrické matice A nazýváme uspořádanou trojici (p_+, p_0, p_-), kde p_+ je počet kladných, p_0 nulových a p_- záporných vlastních čísel matice A.

Definice. Symetrické matice A', A se nazývají kongruentní, jestliže platí $A' = XAX^T$ pro jistou regulární matici X.

Věta 165. **(Sylvester[5])** *Kongruentní symetrické matice mají stejnou setrvačnost.*

Poznámka. I když se při přechodu od symetrické matice A k symetrické matici XAX^T vlastní čísla mohou změnit, setrvačnost (tj. počet kladných, nulových a záporných vlastních čísel) zůstává stejná.

Důkaz. Nechť symetrické matice A', A jsou kongruentní, tj. $A' = XAX^T$ pro jistou regulární matici X. Nechť $A' = Q'\Lambda'Q'^T$, $A = Q\Lambda Q^T$ jsou jejich spektrální rozklady, potom z $A' = XAX^T$ plyne $\Lambda' = R^T\Lambda R$, kde $R = Q^TX^TQ'$ je regulární, a tedy

$$x^T\Lambda'x = (Rx)^T\Lambda(Rx) \tag{7.36}$$

pro každé x. Předpokládejme pro spor, že ${p'}_+ > p_+$, kde ${p'}_+$ a p_+ jsou počty kladných vlastních čísel matice A' resp. A. Je-li ${p'}_+ = 1$, potom $p_+ = 0$ a dosazením $x = e_1$ do (7.36) dostáváme

$$0 < \lambda_1(A') = e_1^T\Lambda'e_1 = (Re_1)^T\Lambda(Re_1) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)(Re_1)_i^2 \leq 0,$$

což je spor. Je-li ${p'}_+ > 1$, označme $\hat{R}$ matici sestávající z prvních ${p'}_+ - 1$ řádků a prvních ${p'}_+$ sloupců matice R. Potom homogenní soustava $\hat{R}\hat{x} = 0$, která má více sloupců než řádků, má netriviální řešení $\hat{x}$ (viz str. 49). Nechť x vznikne doplněním $\hat{x}$ nulami na n-rozměrný vektor. Potom z (7.36) dostáváme

$$0 < \sum_{i=1}^{{p'}_+}\lambda_i(A')x_i^2 = x^T\Lambda'x = (Rx)^T\Lambda(Rx) = \sum_{i={p'}_+}^{n}\lambda_i(A)(Rx)_i^2 \leq 0$$

(neboť $\lambda_1(A') \geq \ldots \geq \lambda_{{p'}_+}(A') > 0 \geq \lambda_{{p'}_+}(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$ a $(Rx)_1 = \ldots = (Rx)_{{p'}_+-1} = 0$), což je opět spor. V obou případech jsme z předpokladu ${p'}_+ > p_+$ dospěli ke sporu, tedy platí ${p'}_+ \leq p_+$. Jelikož $A' = XAX^T$ implikuje $A = X^{-1}A'(X^{-1})^T$, plyne z právě dokázaného, že $p_+ \leq {p'}_+$, celkem tedy ${p'}_+ = p_+$. Protože počet záporných vlastních čísel matic A', A je roven počtu kladných vlastních čísel matic $-A'$, $-A$ a protože $-A' = X(-A)X^T$, plyne z předchozího, že ${p'}_- = p_-$ a tedy i ${p'}_0 = n - {p'}_+ - {p'}_- = n - p_+ - p_- = p_0$. Tím jsme dokázali, že $({p'}_+, {p'}_0, {p'}_-) = (p_+, p_0, p_-)$, tj. že matice A' a A mají stejnou setrvačnost. □

7.7 Vlastní čísla a SVD rozklad

7.7.1 Vztah mezi singulárními a vlastními čísly

Singulární čísla jsme definovali pro obecné matice, kdežto vlastní čísla jen pro čtvercové matice. Singulární čísla jsou vždy nezáporná, kdežto vlastní čísla jsou obecně komplexní. Existuje nějaký

[5] „Sylvesterův zákon setrvačnosti"; J. J. Sylvester (1814-1897), spolu s A. Cayleym (viz str. 84) zakladatel teorie matic.

vztah mezi těmito veličinami?

Je-li $A = X\Sigma Y^T$ SVD rozklad matice A, potom

$$A^TA = Y\Sigma^T X^T X\Sigma Y^T = Y(\Sigma^T\Sigma)Y^T,$$

takže matice A^TA (která je pozitivně semidefinitní a má nezáporná vlastní čísla) je podobná matici $\Sigma^T\Sigma$, která má na diagonále čísla $\sigma_i^2(A)$ a případné další nuly. Z toho dostáváme, že kladná singulární čísla jsou odmocniny z kladných vlastních čísel matice A^TA. Dokázali jsme tak tuto větu:

Věta 166. *Má-li matice A^TA právě r kladných vlastních čísel, potom singulárními čísly matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou čísla $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$, $i = 1, \ldots, r$, a $\sigma_i(A) = 0$ pro $i = r+1, \ldots, q$, kde $q = \min\{m, n\}$.*

Důsledek. *Pro symetrickou matici A platí $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$, $i = 1, \ldots, n$.*

7.7.2 Výpočet SVD rozkladu

Věta 167. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Je-li*

$$A^TA = Y\Lambda Y^T$$

spektrální rozklad matice A^TA a je-li

$$AY = QR$$

QR rozklad matice AY (věta 104), potom R je diagonální, Q, Y jsou ortogonální a

$$A = QRY^T$$

je SVD rozklad matice A.

Důkaz. Z konstrukce (spektrální rozklad resp. QR rozklad) plyne, že Y a Q jsou ortogonální. Dále platí

$$R^TR = R^TQ^TQR = (QR)^T(QR) = (AY)^T(AY) = Y^TA^TAY = \Lambda,$$

kde Λ je diagonální matice. Jelikož $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je horní trojúhelníková a $m \geq n$, plyne z toho, že R je diagonální a $R_{jj}^2 = \Lambda_{jj}$ pro $j = 1, \ldots, n$. Protože R má nezáporné diagonální prvky, je $R_{jj} = \sqrt{\Lambda_{jj}}$ pro $j = 1, \ldots, n$ a vzhledem k tomu, že nezáporná čísla Λ_{jj} na diagonále Λ jsou uspořádaná podle velikosti, je $R_{11} \geq \ldots \geq R_{nn} \geq 0$. Z $AY = QR$ tedy plyne, že $A = QRY^T$ je SVD rozklad matice A. □

Poznámka. Věta platí jen pro matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s $m \geq n$. Je-li $m < n$, potom A^T splňuje předpoklady věty a je-li

$$A^T = QRY^T$$

SVD rozklad matice A^T vypočtený podle této věty, potom

$$A = YR^TQ^T$$

je SVD rozklad matice A.

7.7.3 Algoritmus pro výpočet SVD rozkladu

0. Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.
1. Vypočti spektrální rozklad $A^T A = Y \Lambda Y^T$ matice $A^T A$ Jacobiho metodou 7.6.6.
2. Vypočti QR rozklad $AY = QR$ matice AY Householderovým algoritmem 5.8.2.
3. Ukonči: $A = QRY^T$ je SVD rozklad matice A.

7.8 Vlastní čísla nezáporných matic

7.8.1 Spektrální poloměr

Definice. Číslo
$$\varrho(A) = \max\{|\lambda|\,;\, \lambda \text{ je vlastní číslo } A\}$$
nazýváme spektrálním poloměrem matice A.

Poznámka. Spektrální poloměr je tedy vždy nezáporné (reálné) číslo a podle věty 140 je $\varrho(A) \leq \|A\|_p$ pro každé $p \in [1, \infty] \cup \{F\}$. Z předposledního řádku důkazu Wielandt-Hoffmanovy věty plyne, že její tvrzení lze formulovat ve tvaru
$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \varrho(A - B),$$
tím se pravá strana stane nezávislou na výběru normy.

7.8.2 Matice s $\varrho(A) < 1$

Věta 168. *Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) $\varrho(A) < 1$,

2) $A^j \to 0$ *pro* $j \to \infty$,

3) $I - A$ *je regulární,* $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ *konverguje a* $(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$.

Poznámka. Konvergencí maticové posloupnosti resp. řady se rozumí konvergence v každém koeficientu. Řadě $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ se říká Neumannova řada. Povšimněte si analogie s geometrickou řadou $(1 - q)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j$, která konverguje pro $|q| < 1$. Důkaz lze nalézt v [16] nebo v [12].

7.8.3 Maticové nerovnosti

Definice. Pro matice A, B stejného typu definujeme $A \leq B$ jestliže platí $A_{ij} \leq B_{ij}$ pro každé i, j, a $A < B$ jestliže $A_{ij} < B_{ij}$ pro každé i, j.

Poznámka. Místo $A \leq B$, $A < B$ píšeme rovněž ekvivalentně $B \geq A$, $B > A$. Stejně zavádíme nerovnosti mezi vektory jakožto zvláštními případy matic.

Definice. Matice A se nazývá nezáporná jestliže $A \geq 0$, a kladná jestliže $A > 0$.

Poznámka. Je-li $A \leq B$, $C \geq 0$, a je-li součin CA definován, potom $CA \leq CB$.

7.8.4 Perronova věta

Věta 169. *Pro nezápornou čtvercovou matici A platí*

$$Ax = \varrho(A)x$$

pro jisté $x \geq 0$, $x \neq 0$.

Poznámka. To znamená, že $\varrho(A)$ je vlastním číslem nezáporné matice A, a přísluší k němu nezáporný vlastní vektor. Je-li A kladná, lze tvrzení podstatně zesílit:

Věta 170. (Perron 1907) *Pro kladnou čtvercovou matici A je $\varrho(A) > 0$ a platí*

$$Ax = \varrho(A)x$$

pro jisté $x > 0$. Navíc v tomto případě je $\varrho(A)$ jednoduchým[6] *kořenem charakteristického polynomu, platí $|\lambda| < \varrho(A)$ pro každé vlastní číslo $\lambda \neq \varrho(A)$, a kladný vlastní vektor x příslušející k $\varrho(A)$ je dodatečnou podmínkou $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ určen jednoznačně. Žádnému jinému vlastnímu číslu matice A už nepřísluší nezáporný vlastní vektor*[7]*.*

Poznámka. Jinými slovy můžeme říci, že nezáporná (kladná) matice má nezáporné (kladné) vlastní číslo a k němu příslušející nezáporný (kladný) vlastní vektor. Toto tvrzení není tak triviální jak by se snad na první pohled mohlo zdát, a jeho důkaz je poměrně obtížný. Lze ho nalézt např. v monografiích Fiedler [6] nebo Horn a Johnson [12].

7.8.5 Příklad

Kladná matice

$$A = \begin{pmatrix} 9.6689 & 1.3701 & 7.3491 & 1.5561 \\ 6.6493 & 8.1876 & 6.8732 & 1.9112 \\ 8.7038 & 4.3017 & 3.4611 & 4.2245 \\ 0.0993 & 8.9032 & 1.6603 & 8.5598 \end{pmatrix}$$

má, jak jsme viděli v části 7.3.8, jediné kladné vlastní číslo $\lambda_1 = T_{11} = 20.8938$. Z rozkladu $A = QTQ^T$ uvedeného v 7.3.8 dostáváme jemu odpovídající kladný vlastní vektor

$$x = Q_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} 0.4538 \\ 0.5720 \\ 0.4845 \\ 0.4818 \end{pmatrix}.$$

Perronova věta zaručuje pro kladnou matici existenci aspoň jednoho kladného vlastního čísla; tento příklad ukazuje, že může existovat právě jedno.

[6] Tj. jednonásobným.

[7] Kladný vlastní vektor matice webu ($a_{ij} = 1$ jestliže j-tá webová stránka odkazuje na i-tou, $a_{ij} = \varepsilon$ jinak, kde ε je malé kladné číslo, aby se matice stala kladnou) je používán vyhledávačem Google k uspořádání webových stránek podle důležitosti (čím větší x_i, tím důležitější stránka).

Kapitola 8

Lineární programování

8.1 Úloha lineárního programování

8.1.1 Formulace problému

Základní problém:

$$\min\{c^T x\,; Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{P}$$

Předpokládáme, že $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kde $m \leq n$ (není na újmu obecnosti)[1], potom $b \in \mathbb{R}^m$ a $c, x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Jde tedy o nalezení nejmenší hodnoty lineární funkce $c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (zvané účelová nebo cílová funkce) na množině nezáporných řešení soustavy $Ax = b$.

Poznámka. Příbuzné úlohy, jako maximalizační místo minimalizační, se soustavou omezení tvaru $Ax \leq b$ resp. $Ax \geq b$, bez požadavku nezápornosti vektoru x nebo s požadavkem nezápornosti jenom některých jeho složek, se dají převést na základní úlohu (P). V dalším se proto zabýváme řešením úlohy lineárního programování v tomto standardním tvaru.

8.1.2 Základní pojmy

Definice. Vektor x, který splňuje $Ax = b$, $x \geq 0$, se nazývá přípustné řešení úlohy (P).

Definice. Přípustné řešení x^* se nazývá optimálním řešením[2] úlohy (P), jestliže platí

$$c^T x^* \leq c^T x$$

pro každé přípustné řešení (P); hodnotu $c^T x^*$ nazýváme optimální hodnotou úlohy (P).

Poznámka. Optimální hodnota je určena jednoznačně, kdežto optimálních řešení může být více: je-li x^* optimální řešení a platí-li $c^T x^* = c^T \hat{x}$ pro jisté přípustné řešení $\hat{x}$, potom $\hat{x}$ je rovněž optimálním řešením.

Poznámka. Povšimněte si, že – poněkud paradoxně – se nezavádí pojem „řešení“, ale pouze „přípustné řešení“ a „optimální řešení“.

[1] Později ukážeme (část 8.2.14), že na začátku algoritmu se k matici A přidává jednotková matice $m \times m$, tím se počet řádků stane menším než počet sloupců.

[2] V teorii optimalizace je zvykem značit optimální řešení symbolem x^* (resp. y^* atp.); hvězdička zde má tedy jiný smysl než v kapitole 7 (viz 7.3.1).

8.1.3 B-značení

Nechť A je matice typu $m \times n$, $m \le n$, a nechť $B = (B_1, \ldots, B_m)$ je uspořádaná m-tice vzájemně různých čísel z $\{1, \ldots, n\}$. Potom symbolem A_B značíme *čtvercovou* matici o sloupcích $A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}$, tj.

$$(A_B)_{\bullet j} = A_{\bullet B_j}$$

pro $j = 1, \ldots, m$.

Podobně pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme $x_B = (x_{B_1}, \ldots, x_{B_m})^T$, tj. $(x_B)_j = x_{B_j}$ pro $j = 1, \ldots, m$; analogicky c_B.

Poznámka. Povšimněte si, že čísla B_j nemusí být uspořádaná podle velikosti, takže v matici A_B mohou jít sloupce matice A ve zpřeházeném pořadí.

8.2 Simplexová metoda

8.2.1 Další postup

Simplexová metoda, k jejímuž popisu směřujeme, pracuje tak, že v každém kroku udržuje jistou indexovou množinu $B = (B_1, \ldots, B_m)$ (ve smyslu předchozího značení), k níž jsou jednoznačně přiřazeny průběžné veličiny $\overline{A}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{h}$.

Věta 171 uvádí, jak při daném B mohou tyto veličiny být vypočteny posloupností elementárních operací, a rovněž vzorce pro ně. To ukazuje, že výpočty mohou být prováděny v tabulce obsahující bloky B, $\overline{A}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ a $\overline{h}$. Věty 172 až 174 uvádějí význam jednotlivých bloků z hlediska fungování algoritmu (dvojí možnost zastavení, výpočet optimálního řešení), věta 175 ukazuje jak provést běžný krok algoritmu změnou jednoho prvku indexové množiny B, a věta 177 zaručuje konečnost algoritmu při libovolných vstupních datech. Věta 179 popisuje množinu optimálních řešení a věta 180 ukazuje, jak lze přímo z tabulky ověřit, že vypočtené optimální řešení je jediné.

8.2.2 Transformace na tabulkový tvar

Věta 171. *Nechť matice*

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$$

je prvními dvěma elementárními operacemi[3] s pivoty jen v části A převedena na tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix},$$

kde $\overline{A}_B = I$ a $\overline{c}_B^T = 0^T$ pro jisté B (tj. v B_j-tém sloupci vznikne j-tý sloupec jednotkové matice $(j = 1, \ldots, m)$). Potom pro výslednou matici platí

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A_B^{-1} A, \\ \overline{b} &= A_B^{-1} b, \\ \overline{c}^T &= c^T - c_B^T A_B^{-1} A, \\ \overline{h} &= -c_B^T A_B^{-1} b. \end{aligned}$$

[3] Viz 1.3.3; třetí elementární operace, výměna řádků, se v této kapitole nepoužívá.

Důkaz. Podle věty 8 a jejího důkazu je

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix},$$

kde $Q = Q_q \cdot \ldots \cdot Q_1$ a matice Q_j, $j = 1, \ldots, q$, odpovídají jednotlivým elementárním operacím. Jelikož pivot se nikdy nevybírá v posledním řádku, stojí v posledním sloupci každé matice Q_j poslední sloupec e_{m+1} jednotkové matice I (viz větu 7), a totéž tedy platí (indukcí) i pro matici Q. To znamená, že Q je tvaru

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix}$$

pro jistou matici $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a jistý vektor $y \in \mathbb{R}^m$. Tedy upravená matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & Pb \\ y^T A + c^T & y^T b \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\overline{A} = PA$ a podle předpokladu je

$$I_{\bullet j} = (\overline{A}_B)_{\bullet j} = \overline{A}_{\bullet B_j} = (PA)_{\bullet B_j} = PA_{\bullet B_j} = P(A_B)_{\bullet j} = (PA_B)_{\bullet j}$$

pro každé j, tedy $PA_B = I$ a $P = A_B^{-1}$ (věta 14). Podobně $\overline{c}^T = y^T A + c^T$ a podle předpokladu

$$0 = \overline{c}_{B_j} = (y^T A + c^T)_{B_j} = y^T A_{\bullet B_j} + c_{B_j} = (y^T A_B)_j + (c_B^T)_j = (y^T A_B + c_B^T)_j$$

pro každé j, což znamená, že $y^T A_B + c_B^T = 0^T$, tedy $y^T = -c_B^T A_B^{-1}$, takže výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} A & A_B^{-1} b \\ c^T - c_B^T A_B^{-1} A & -c_B^T A_B^{-1} b \end{pmatrix}.$$

□

8.2.3 Tabulka

Místo s maticí

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix}$$

budeme dále pracovat s tabulkou

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline B & \quad \overline{A} \quad & \overline{b} \\ \hline & \overline{c}^T & \overline{h} \\ \hline \end{array}, \tag{T}$$

která navíc obsahuje první sloupec s indexovou množinou B, kterou budeme nazývat bází. Je zřejmé, že tohoto sloupce se eliminace netýká.

8.2.4 Bázická řešení

Věta 172. *Jestliže v tabulce (T) je $\overline{b} \geq 0$, potom vektor x^B definovaný předpisem*

$$\begin{aligned} (x^B)_{B_j} &= \overline{b}_j \qquad (j = 1, \ldots, m), \\ (x^B)_j &= 0 \qquad (j \notin B) \end{aligned}$$

je přípustným řešením úlohy (P) a platí $\overline{h} = -c^T x^B$.

Důkaz. Z definice x^B plyne, že $x^B \geq 0$ a podle věty 171 je $x^B_B = (x^B)_B = \overline{b} = A_B^{-1}b$, tedy $A_B x^B_B = b$, což znamená, že

$$Ax^B = \sum_{j=1}^{n} A_{\bullet j}(x^B)_j = \sum_{j \in B} A_{\bullet j}(x^B)_j = \sum_{j=1}^{m} A_{B_j}(x^B)_{B_j} = A_B x^B_B = b.$$

Tedy x^B je přípustným řešením (P) a $\overline{h} = -c_B^T A_B^{-1} b = -c_B^T x_B^B = -c^T x^B$. □

Definice. Jestliže v tabulce (T) je $\overline{b} \geq 0$, nazýváme ji simplexovou tabulkou a x^B nazýváme bázickým přípustným řešením s bází B.

Poznámka. Výrazným rysem simplexové tabulky je, že obsahuje v bloku $\overline{A}$ všechny sloupce jednotkové matice (obecně ve zpřeházeném pořadí), pod nimi nuly, a že blok $\overline{b}$ sestává vesměs z nezáporných čísel.

8.2.5 Příklad

2	0	1	-0.5738	0	0.7424	0.0682
4	0	0	-0.5303	1	1.1970	0.4773
1	1	0	1.8182	0	-1.8293	2.8636
	0	0	2.1836	0	-6.3182	-3.6136

Toto je simplexová tabulka, která ukazuje bázické přípustné řešení $x_2 = 0.0682$, $x_4 = 0.4773$, $x_1 = 2.8636$, $x_3 = x_5 = 0$, tj.

$$x^B = (2.8636, 0.0682, 0, 0.4773, 0)^T,$$

kde $B = (2, 4, 1)$. Odpovídající hodnota účelové funkce je

$$c^T x^B = +3.6136.$$

Povšimněte si, že poloha sloupců jednotkové matice je určena blokem B („v B_j-tém sloupci je j-tý sloupec jednotkové matice ($j = 1, \ldots, m$)", viz text věty 171); zde např. $B_1 = 2$, takže ve druhém sloupci bloku $\overline{A}$ je první sloupec jednotkové matice, atd.

8.2.6 Kritérium optimality

Věta 173. *Jestliže v simplexové tabulce (T) platí*

$$\overline{c} \geq 0,$$

potom x^B je optimální řešení úlohy (P).

Poznámka. Z hlediska tabulky je adekvátnější zápis $\overline{c}^T \geq 0^T$, neboť v ní pracujeme s vektorem $\overline{c}^T$. Slovně, tabulka ukazuje optimální řešení, jestliže všechny prvky kriteriálního řádku $\overline{c}^T$ jsou nezáporné.

Důkaz. Nechť x je libovolné přípustné řešení úlohy (P). Potom z $\overline{c} \geq 0$ podle věty 171 plyne

$$c^T \geq c_B^T A_B^{-1} A$$

a přenásobením nezáporným vektorem x

$$c^T x \geq c_B^T A_B^{-1} A x = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B^B = c^T x^B,$$

tedy x^B je optimální řešení podle definice. $\square$

8.2.7 Kritérium neomezenosti

Věta 174. *Nechť v simplexové tabulce (T) existuje s tak, že $\overline{c}_s < 0$ a $\overline{A}_{\bullet s} \leq 0$ (tj. $\overline{a}_{js} \leq 0$ pro každé j)[4]. Potom*

$$\inf\{c^T x\,;\, Ax = b,\, x \geq 0\} = -\infty,$$

tj. hodnota účelové funkce není na množině přípustných řešení zdola omezená (a tedy úloha nemá optimální řešení).

Poznámka. Jak vysvítá z důkazu, v tomto případě množina přípustných řešení obsahuje polopřímku, podél níž účelová funkce klesá do $-\infty$.

Důkaz. Protože $\overline{c}_s < 0$, je $s \notin B$. Definujme $z \in \mathbb{R}^n$ předpisem $z_B = -\overline{A}_{\bullet s}$ (tj. $z_{B_j} = -\overline{a}_{js}$ pro $j = 1, \ldots, m$), $z_s = 1$, $z_j = 0$ jinak. Potom $z \geq 0$ a podle věty 171 je

$$Az = A_B z_B + A_{\bullet s} = -A_B (A_B^{-1} A)_{\bullet s} + A_{\bullet s} = -A_{\bullet s} + A_{\bullet s} = 0$$

a dále

$$c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s + \sum_{j \notin B,\, j \neq s} c_j z_j = c_s - c_B^T A_B^{-1} A_{\bullet s} = (c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_s = \overline{c}_s < 0.$$

Z toho plyne, že každý bod tvaru $x^B + \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ je přípustným řešením (P) (neboť $x^B + \alpha z \geq 0$ a $A(x^B + \alpha z) = Ax^B + \alpha \cdot 0 = Ax^B = b$) a platí

$$\lim_{\alpha \to \infty} c^T (x^B + \alpha z) = \lim_{\alpha \to \infty} (c^T x^B + \alpha \overline{c}_s) = -\infty,$$

což znamená, že

$$\inf\{c^T x\,;\, Ax = b, x \geq 0\} = -\infty.$$

$\square$

8.2.8 Běžný krok algoritmu

Věta 175. *Nechť v simplexové tabulce (T) není splněno kritérium optimality ani kritérium neomezenosti. Potom určíme-li indexy s, r ze vzorců*

$$s = \min\{j\,;\, \overline{c}_j < 0\}, \tag{8.1}$$

$$B_r = \min\left\{ B_k\,;\, \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ks}} = \min\left\{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}\,;\, \overline{a}_{js} > 0 \right\},\ \overline{a}_{ks} > 0 \right\} \tag{8.2}$$

[4] Nikoliv $\overline{A}_{\bullet s} < 0$ (častá chyba u zkoušek); potom by v případě že $\overline{A}_{\bullet s} \leq 0$ a $\overline{A}_{\bullet s} \not< 0$ došlo k selhání algoritmu protože by nebylo možno vybrat pivota, viz věta 175 dále.

(tzv. Blandovo pravidlo)[5]*, provedeme-li eliminaci s pivotem* $\overline{a}_{rs}$ *a položíme-li* $B_r := s$*, dostáváme opět simplexovou tabulku*

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B' & \overline{A}' & \overline{b}' \\
\hline
 & \overline{c}'^T & \overline{h}' \\
\hline
\end{array}$$

(tj. $\overline{b}' \geq 0$*) a nové bázické přípustné řešení* $x^{B'}$ *splňuje* $c^T x^{B'} \leq c^T x^B$*. Je-li navíc* $\overline{b}_r > 0$*, potom* $c^T x^{B'} < c^T x^B$*.*

Důkaz. Jelikož v tabulce (T) není splněno kritérium optimality, je $\overline{c}_j < 0$ pro jisté j, takže s je vzorcem (8.1) dobře definováno. Rovněž, jelikož není splněno kritérium neomezenosti, existuje j pro které $\overline{a}_{js} > 0$, takže množina $\left\{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}; \overline{a}_{js} > 0 \right\}$ je neprázdná a tedy i r je vzorcem (8.2) dobře definováno. Navíc $\overline{a}_{rs} > 0$, takže $\overline{a}_{rs}$ lze vybrat za pivota.

V tabulce (T) byl v B_j-tém sloupci j-tý sloupec jednotkové matice, $j = 1, \ldots, m$ (věta 171). Při eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ se vytvoří r-tý sloupec jednotkové matice v s-tém sloupci tabulky, přičemž žádný z ostatních sloupců jednotkové matice se nezmění (ty mají v r-tém řádku nuly, takže eliminace se jich nedotkne). To znamená, že nová tabulka odpovídá indexové množině

$$B' = (B_1, \ldots, B_{r-1}, s, B_{r+1}, \ldots, B_m).$$

Eliminací v původní tabulce

$$\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_r & \ldots & \ldots & \overline{a}_{rs} & \ldots & \ldots & \overline{b}_r \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_j & \ldots & \ldots & \overline{a}_{js} & \ldots & \ldots & \overline{b}_j \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \overline{c}_s & \ldots & \ldots & \overline{h} \\
\hline
\end{array}$$

s pivotem $\overline{a}_{rs}$ dostaneme tabulku

$$\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
s & \ldots & \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_j & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \overline{h} - \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\hline
\end{array}$$

tj. $\overline{b}'_r = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ a $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ pro $j \neq r$. Dokážeme, že $\overline{b}' \geq 0$. Protože $\overline{b}_r \geq 0$ a $\overline{a}_{rs} > 0$, je $\overline{b}'_r \geq 0$. Je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} \leq 0$, potom $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq \overline{b}_j \geq 0$. Nakonec, je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} > 0$, potom ze vzorce (8.2) vyplývá

$$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}; \overline{a}_{js} > 0 \right\} \leq \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}},$$

[5] Chybná formulace pravidla (8.1), (8.2) je nejčastější chybou u zkoušek z lineárního programování.

z čehož plyne $\bar{b}_j - \bar{a}_{js}\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \geq 0$, čili $\bar{b}'_j \geq 0$. Tím jsme dokázali, že $\bar{b}' \geq 0$. Tedy tabulka po provedení eliminace odpovídá bázickému přípustnému řešení $x^{B'}$, pro které podle věty 172 platí

$$c^T x^{B'} = -\bar{h}' = -\bar{h} + \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \leq -\bar{h} = c^T x^B$$

(neboť $\bar{c}_s < 0$, $\bar{b}_r \geq 0$ a $\bar{a}_{rs} > 0$), tedy

$$c^T x^{B'} \leq c^T x^B,$$

a při $\bar{b}_r > 0$ je $\bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} < 0$, takže

$$c^T x^{B'} < c^T x^B.$$

□

8.2.9 Příklad na Blandovo pravidlo

4	0	0.7500	1.5000	1.0000	-0.2500	2.2500
1	1.0000	1.2500	1.5000	0	0.2500	3.7500
0	0	-0.7500	-1.5000	0	1.2500	-2.2500

V této tabulce dává pravidlo (8.1) $s = 2$. Protože oba podíly $\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}}$ a $\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}$ jsou rovny 3, nabývá se vnitřní minimum v pravidle (8.2) v obou řádcích a nelze podle něho rozhodnout. Protože $B_2 = 1 < 4 = B_1$, dává celé pravidlo (8.2) $r = 2$, takže pivotem bude prvek $\bar{a}_{22}$.

8.2.10 Simplexový algoritmus

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme zformulovat tento algoritmus („simplexová metoda"; Dantzig 1947):

sestav výchozí simplexovou tabulku; % (bude probráno dále)
while $\bar{c}_j < 0$ pro jisté j
  $s = \min\{j\,;\, \bar{c}_j < 0\}$;
  if $\bar{A}_{\bullet s} \leq 0$, ukonči: úloha je neomezená
  else
    urči r podle Blandova pravidla (8.2);
    proveď Gauss-Jordanovu eliminaci s pivotem $\bar{a}_{rs}$;
    $B_r = s$;
  end
end
% x^B je optimální řešení.

8.2.11 Cyklus

Cyklem rozumíme konečnou posloupnost kroků simplexového algoritmu, která začíná i končí stejnou bází B (a tedy i stejnou simplexovou tabulkou).

Věta 176. *V průběhu cyklu:*

(i) zůstává poslední sloupec beze změny,

(ii) v každém kroku pro řádek r obsahující pivota platí $\overline{b}_r = 0$.

Důkaz. Jestliže algoritmus konstruuje cyklus $B^1, B^2, \ldots, B^\ell = B^1$, potom podle věty 175 platí

$$c^T x^{B^1} \geq c^T x^{B^2} \geq \ldots \geq c^T x^{B^\ell} = c^T x^{B^1},$$

z čehož plyne

$$c^T x^{B^1} = c^T x^{B^2} = \ldots = c^T x^{B^\ell}.$$

Potom podle věty 175 v každé tabulce cyklu s pivotem $\overline{a}_{rs}$ musí být $\overline{b}_r = 0$ (jinak by účelová funkce klesla). Z toho pak plyne, že při eliminaci se sloupec $\overline{b}$ nemění (viz vzorce pro $\overline{b}_j'$ v důkazu věty 175), stejně tak jako hodnota účelové funkce $\overline{h}$. $\square$

8.2.12 Konečnost algoritmu

Ukážeme, že v uvedené verzi simplexového algoritmu s Blandovým pravidlem pro výběr pivota cyklus nemůže nastat (může však nastat při modifikaci tohoto pravidla, jak bude ukázáno v části 8.2.28).

Věta 177. *Simplexový algoritmus je konečný.*

Důkaz. Dokážeme sporem, že v žádné úloze lineárního programování nemůže nastat cyklus. To znamená, že algoritmus se nemůže vrátit do báze, kterou už jednou prošel, a protože bází je konečně mnoho, bude z toho plynout konečnost algoritmu.

Předpokládejme, že algoritmus se pro jistou úlohu zacyklí. Označme T množinu všech indexů s, vstupujících do báze během cyklu, a nechť $q = \max T$. Z tabulek cyklu zkonstruujeme index $k \in T$ pro který $k > q$, což bude spor. Protože q vstupuje během cyklu do báze, musí z ní během tohoto cyklu i vystoupit. Nechť q vstupuje do báze v tabulce

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B_0 & \cdots & \vdots \\
\hline
 & \cdots \quad y_q < 0 \quad \cdots & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

s kriteriálním řádkem y^T a vystupuje v tabulce

$$\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
q & \cdots & \overline{a}_{rs} & \cdots & \overline{b}_r \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & \cdots & \overline{c}_s < 0 & \cdots & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

s bází B. Definujme $z \in \mathbb{R}^n$ předpisem $z_B = \overline{A}_{\bullet s}$ (tj. $z_{B_j} = \overline{a}_{js}$ pro $j = 1, \ldots, m$), $z_s = -1$, $z_j = 0$ jinak, tedy $z_B = A_B^{-1} A_{\bullet s}$, $Az = A_B z_B + (-1) A_{\bullet s} = 0$, což dává

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k z_k &= y^T z = (c^T - c_{B_0}^T A_{B_0}^{-1} A) z = c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s = c_B^T A_B^{-1} A_{\bullet s} - c_s \\
&= -(c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_s = -\overline{c}_s > 0,
\end{aligned}$$

to znamená, že existuje k takové, že $y_k z_k > 0$. Protože $y_k \neq 0$, je $k \notin B_0$; $z_k \neq 0$ implikuje buď $k \in B$, nebo $k = s$, tj. k je buď v bázi, nebo do ní právě vstupuje, tedy $k \in T$. Dále $y_q z_q = y_q \bar{a}_{rs} < 0$ (neboť pivot je kladný), tedy $k \neq q$. Dokážeme, že $q < k$, to bude spor s volbou q jako maximálního prvku T.

Protože $y_k z_k > 0$, je buď (a) $y_k < 0$, $z_k < 0$, nebo (b) $y_k > 0$, $z_k > 0$.

(a) Je-li $y_k < 0$, potom k připadalo v úvahu pro vstup do báze B_0, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (8.1) je $q < k$.

(b) Je-li $y_k > 0$, $z_k > 0$, potom $z_k = z_{B_p} = \bar{a}_{ps} > 0$ pro jisté p. Protože $y_k > 0$, k nebylo v bázi B_0, ale je v B, tedy muselo v průběhu cyklu vstoupit, což podle věty 176 znamená že $\bar{b}_p = 0$, tj.

$$0 = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{ps}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}};\, \bar{a}_{js} > 0\right\}.$$

Tedy B_p bylo vhodné pro výběr, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (8.2) muselo být $B_r < B_p$, tj. $q < k$.

V obou případech je $q < k$, tedy jsme nalezli $k \in T$, $k > q$, kde $q = \max T$, a to je spor. Proto cyklus nemůže nastat. □

8.2.13 Dvoufázová simplexová metoda: úvod

V popisu simplexového algoritmu na str. 171 bylo v prvním řádku uvedeno „sestav výchozí simplexovou tabulku". To ovšem není tak snadné, protože tabulka musí obsahovat všechny sloupce jednotkové matice, pod nimi nuly, a mít nezápornou pravou stranu (viz str. 168).

K překonání této obtíže se proto simplexový algoritmus používá dvoufázově. V první fázi se aplikuje na uměle sestrojenou pomocnou úlohu, jejíž výchozí tabulka má požadované vlastnosti. Po konečně mnoha krocích (věta 177) se buď zjistí nepřípustnost původní úlohy, nebo se nalezne její bázické přípustné řešení. V tom případě se jemu odpovídající tabulka použije pro začátek druhé fáze, ve které se už řeší původní úloha a po konečně mnoha krocích se buď nalezne optimální řešení, nebo ověří neomezenost.

8.2.14 Fáze I

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b \geq 0$, jinak v soustavě omezení nahradíme každou rovnici $(Ax)_i = b_i$, kde $b_i < 0$, rovnicí $-(Ax)_i = -b_i$. Sestavíme výchozí tabulku

B_0	A	I	b
	0^T	e^T	0

,

kde I je jednotková matice, $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ a $B_0 = (n+1, \ldots, n+m)$, a eliminací s pivoty v bloku I vytvoříme pod tímto blokem nuly. Tím dostaneme simplexovou tabulku

B_0	A	I	b
	$-e^T A$	0^T	$-e^T b$

. (T$_0$)

Z věty 171 plyne, že (T$_0$) je simplexová tabulka pro pomocnou úlohu

$$\min\{0^T x + e^T x' \,;\, Ax + Ix' = b,\, x \geq 0,\, x' \geq 0\} \tag{8.3}$$

s bází $B_0 = (n+1, \dots, n+m)$. Zde je x' vektor tzv. umělých proměnných, které jsme přidali proto, abychom vytvořili tabulku v simplexovém tvaru. Aplikujeme-li na úlohu (8.3) s výchozí tabulkou (T$_0$) simplexový algoritmus (str. 171), dojdeme po konečném počtu kroků k tabulce

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T \geq 0^T$	$\overline{d}^T \geq 0^T$	$-h^*$

(T$_1$)

(neomezenost nemůže nastat, protože účelová funkce $0^T x + e^T x'$ je nezáporná, takže $h^* \geq 0$). Nyní mohou nastat dvě možnosti.

1) Je-li $h^* > 0$, neexistuje přípustné řešení pomocné úlohy (8.3) s $x' = 0$, tedy původní úloha (P) není přípustná a její řešení můžeme ukončit.

2) Je-li $h^* = 0$, potom $e^T x' = 0$ a z nezápornosti x' plyne $x' = 0$, takže x-ová část optimálního řešení pomocné úlohy (8.3) je přípustným řešením (P), a můžeme přejít k fázi II.

8.2.15 Fáze II

I když na konci fáze I je $x' = 0$, může některá z proměnných x'_j být v bázi (s nulovou hodnotou). Na začátku fáze II se proto nejprve snažíme tyto proměnné z báze vyloučit.

Jestliže v tabulce (T$_1$) je $B_j > n$ pro jisté j, nalezneme libovolný prvek $\overline{a}_{js} \neq 0$ a provedeme s ním jako s pivotem obvyklou eliminaci, čímž dostaneme $B_j := s \leq n$ (zde připouštíme i záporného pivota protože $\overline{b}_j = 0$, takže touto úpravou se pravá strana nezmění).

Je-li $\overline{a}_{js} = 0$ pro všechna s, obsahuje celý j-tý řádek bloku $\overline{A}$ tabulky (T$_1$) nuly. V tom případě ponecháme umělou proměnnou v bázi (tato situace indikuje, že soustava $Ax = b$ má lineárně závislé řádky).

V tabulce (T$_1$) dosadíme nyní vektor c^T účelové funkce *původní* úlohy pod blok $\overline{A}$ a nuly do zbytku posledního řádku

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	c^T	0^T	0

a eliminací vynulujeme prvky pod bázickými sloupci:

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T$	$\overline{d}^T$	$\overline{h}$

.

Tím jsme vytvořili simplexovou tabulku pro fázi II a dále pokračujeme simplexovým algoritmem s tím, že za kriteriální řádek považujeme pouze blok $\overline{c}^T$ (blok $\overline{d}^T$ při výběru pivota nebereme v úvahu). Po konečně mnoha krocích buď ověříme neomezenost účelové funkce, nebo dojdeme k tabulce tvaru

$\overline{B}$	$\overline{\overline{A}}$	$\overline{\overline{I}}$	$\overline{\overline{b}}$
	$\overline{\overline{c}}^T \geq 0^T$	$-y^{*T}$	$\overline{\overline{h}}$

,

která dává optimální řešení původní úlohy. Vektor y^* je tzv. duální optimální řešení (viz str. 184).

8.2.16 Tři možnosti ukončení

Věta 178. *Pro každou úlohu (P) nastává právě jedna ze tří možností:*

(i) úloha nemá přípustné řešení,
(ii) úloha má optimální řešení,
(iii) účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená zdola.

Důkaz. Fáze I i II jsou podle věty 177 konečné a proto po konečném počtu kroků dojde k jednomu ze tří možných zastavení. □

V dalším budeme předpokládat, že na konci fáze I nezůstala žádná umělá proměnná v bázi (tj. že platilo $B_j \leq n$ pro $j = 1, \ldots, m$). Potom blok $\overline{\overline{I}}$ poslední tabulky fáze II nehraje žádnou roli a můžeme ho z dalších úvah vypustit.

8.2.17 Množina optimálních řešení

Věta 179. *Nechť v simplexové tabulce (T) je nalezeno optimální řešení (tj. $\overline{c} \geq 0$). Potom množina všech optimálních řešení je popsaná soustavou*

$$\begin{aligned} \overline{A}x^* &= \overline{b}, \\ \overline{c}^T x^* &= 0, \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Je-li x^* optimální řešení, potom je přípustné, tedy z $Ax^* = b$ plyne $\overline{A}x^* = A_B^{-1}Ax^* = A_B^{-1}b = \overline{b}$, a $\overline{c}^T x^* = (c^T - c_B^T A_B^{-1} A)x^* = c^T x^* - c_B^T A_B^{-1} b = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B = 0$. Naopak, z $\overline{A}x^* = \overline{b}$ plyne $Ax^* = b$, tedy x^* je přípustné, a $0 = \overline{c}^T x^* = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B$, takže $c^T x^* = c^T x^B$, kde x^B je optimální řešení, a proto i x^* je optimální řešení. □

8.2.18 Parametrický popis množiny optimálních řešení

Protože $\overline{c} \geq 0$ a $x^* \geq 0$, vyplývá z $\overline{c}^T x^* = \sum_j \overline{c}_j x_j^* = 0$, že $x_j^* = 0$ pro $\overline{c}_j > 0$. Položíme-li $J = \{j\,;\, j \notin B, \overline{c}_j = 0\}$, dostáváme tak z předchozí věty parametrický popis množiny optimálních řešení:

$$\begin{aligned} x_{B_i}^* &= \overline{b}_i - \sum_{j \in J} \overline{a}_{ij} x_j^* \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j^* &\geq 0 \qquad\qquad (j \in J), \\ x_j^* &= 0 \qquad\qquad (\overline{c}_j > 0). \end{aligned}$$

Proměnné x_j^*, $j \in J$, zde vystupují v roli parametrů a musí splňovat

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \overline{a}_{ij} x_j^* &\leq \overline{b}_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j^* &\geq 0 \qquad (j \in J). \end{aligned}$$

8.2.19 Jednoznačnost optimálního řešení

Věta 180. *Je-li v poslední simplexové tabulce*

$$\overline{c}_j > 0 \text{ pro každé } j \notin B,$$

potom x^B je jediným optimálním řešením úlohy (P).

Důkaz. Podle věty 179 každé optimální řešení x^* splňuje $\overline{c}^T x^* = \sum_j \overline{c}_j x_j^* = 0$, kde $\overline{c}_j \geq 0$ a $x_j^* \geq 0$ pro každé j, tedy $\overline{c}_j x_j^* = 0$ pro všechna j. Z předpokladu $\overline{c}_j > 0$ potom plyne, že $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$. To znamená, že $Ax^* = A_B x_B^* = b$, tedy $x_B^* = A_B^{-1} b = \overline{b}$ a $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$, takže podle věty 172 je $x^* = x^B$ a optimální řešení je jediné. □

8.2.20 Ukázka výpočtu v MATLABu I (optimální řešení): data

```
A =

     1     2     3     4
     5     6     7     8


b =

     3     7


c =

     1     1     1    -5

[x,y,flag]=simplex(A,b,c)
```

8.2.21 Tabulka na začátku fáze I

```
AS=

5     1     2     3     4     1     0     3
6     5     6     7     8     0     1     7
0     0     0     0     0     1     1     0


AS =

5     1     2     3     4     1     0     3
6     5     6     7     8     0     1     7
0    -6    -8   -10   -12     0     0   -10
```

8.2.22 Fáze I

```
AS =

5          0    0.8000    1.6000    2.4000    1.0000   -0.2000    1.6000
1     1.0000    1.2000    1.4000    1.6000         0    0.2000    1.4000
0          0   -0.8000   -1.6000   -2.4000         0    1.2000   -1.6000


AS =

5    -0.6667         0    0.6667    1.3333    1.0000   -0.3333    0.6667
2     0.8333    1.0000    1.1667    1.3333         0    0.1667    1.1667
0     0.6667         0   -0.6667   -1.3333         0    1.3333   -0.6667


AS =

5    -1.1429   -0.5714         0    0.5714    1.0000   -0.4286         0
3     0.7143    0.8571    1.0000    1.1429         0    0.1429    1.0000
0     1.1429    0.5714         0   -0.5714         0    1.4286         0


AS =

4    -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3     3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0          0         0         0         0    1.0000    1.0000         0
```

8.2.23 Tabulka na začátku fáze II

```
AS =

4   -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3    3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0         1         1         1        -5         0         0         0

AS =

4   -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3    3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0  -12.0000   -6.0000         0         0   10.7500   -4.7500   -1.0000
```

8.2.24 Fáze II

```
AS =

4    0.0000    0.3333    0.6667    1.0000    0.4167   -0.0833    0.6667
1    1.0000    0.6667    0.3333         0   -0.6667    0.3333    0.3333
0    0.0000    2.0000    4.0000         0    2.7500   -0.7500    3.0000

x =
     0.3333         0         0    0.6667

y =
    -2.7500    0.7500

flag =
jedine optimalni reseni
```

Poznámka. x je optimální řešení, které je podle věty 180 jediné, a y je optimální řešení tzv. duální úlohy (viz str. 184). AS značí průběžnou simplexovou tabulku. Procedura „`simplex`" volaná příkazem „`[x,y,flag]=simplex(A,b,c)`" není součástí standardního MATLABu, byla vytvořena speciálně pro tento účel.

8.2.25 Ukázka výpočtu v MATLABu II: nepřípustnost

```
A =

     1    -1    -3     2
    -3     2     5    -4

b =

    -1     3
```

```
c =

    -1     2    -3     4

[x,y,flag]=simplex(A,b,c)

AS =

5    -1     1     3    -2     1     0     1
6    -3     2     5    -4     0     1     3
0     4    -3    -8     6     0     0    -4

AS =

2    -1     1     3    -2     1     0     1
6    -1     0    -1     0    -2     1     1
0     1     0     1     0     3     0    -1

x =
     []

y =
     []

flag =
uloha je nepripustna
```

Poznámka. Na konci fáze I je $h^* = 1 > 0$, takže úloha je nepřípustná (viz str. 174). x a y jsou „prázdné vektory" [ ] (v MATLABu se z technických důvodů připouštějí).

8.2.26 Ukázka výpočtu v MATLABu III: neomezenost

```
A =

     2    -1     3     3
    -2     3     1    -9

b =

     5    -1

c =

     1    -2    -1     4

[x,y,flag]=simplex(A,b,c)

AS =
```

```
5     2    -1     3     3     1     0     5
6     2    -3    -1     9     0     1     1
0    -4     4    -2   -12     0     0    -6

AS =

5          0    2.0000    4.0000   -6.0000    1.0000   -1.0000    4.0000
1     1.0000   -1.5000   -0.5000    4.5000         0    0.5000    0.5000
0          0   -2.0000   -4.0000    6.0000         0    2.0000   -4.0000

AS =

2    -0.0000    1.0000    2.0000   -3.0000    0.5000   -0.5000    2.0000
1     1.0000   -0.0000    2.5000         0    0.7500   -0.2500    3.5000
0          0         0         0         0    1.0000    1.0000         0

% konec faze I

AS =

2    -0.0000    1.0000    2.0000   -3.0000    0.5000   -0.5000    2.0000
1     1.0000   -0.0000    2.5000         0    0.7500   -0.2500    3.5000
0          0         0    0.5000   -2.0000    0.2500   -0.7500    0.5000

x =
     []

y =
     []

flag =
uloha je neomezena
```

Poznámka. V první tabulce fáze II nastává $\overline{c}_4 = -2 < 0$ a $\overline{A}_{\bullet 4} \le 0$, takže je splněno kritérium neomezenosti (věta 174).

8.2.27 Ukázka zacyklení I: výpočet podle Blandova pravidla

Při počáteční simplexové tabulce

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

postupuje simplexový algoritmus v následujících krocích:

5	1.7	0.0	0.0	0.0	1.0	−10.7	8.0	0.0
2	−0.3	1.0	0.0	0.0	0.0	0.3	−1.0	0.0
3	−0.7	0.0	1.0	0.0	0.0	2.7	−3.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	−4.7	5.0	0.0

5	−9.0	32.0	0.0	0.0	1.0	0.0	−24.0	0.0
6	−1.0	3.0	0.0	0.0	0.0	1.0	−3.0	0.0
3	2.0	−8.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.0
4	1.0	−3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	3.0	1.0
	−4.0	14.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−9.0	0.0

5	0.0	−4.0	4.5	0.0	1.0	0.0	−1.5	0.0
6	0.0	−1.0	0.5	0.0	0.0	1.0	−0.5	0.0
1	1.0	−4.0	0.5	0.0	0.0	0.0	2.5	0.0
4	0.0	1.0	−0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
	0.0	−2.0	2.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0

5	0.0	0.0	2.5	4.0	1.0	0.0	0.5	4.0
6	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
1	1.0	0.0	−1.5	4.0	0.0	0.0	4.5	4.0
2	0.0	1.0	−0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
	0.0	0.0	1.0	2.0	0.0	0.0	2.0	2.0

Výsledná tabulka dává optimální řešení

$$x^* = (4.0, 1.0, 0, 0, 4.0, 1.0, 0)^T.$$

8.2.28 Ukázka zacyklení II: modifikace Blandova pravidla

Uvažujme nyní tentýž algoritmus s touto modifikací Blandova pravidla (8.1), (8.2) pro výběr s, r:

$$s = \min\{k\,;\, \bar{c}_k = \min_j \bar{c}_j\},$$

$$r = \min\left\{k\,;\, \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}}\,;\, \bar{a}_{js} > 0\right\},\ \bar{a}_{ks} > 0\right\}.$$

Při této modifikaci zůstávají hlavní vlastnosti běžného kroku (udržení nezápornosti $\bar{b}$ a klesání účelové funkce, viz věta 175) zachovány. Nicméně modifikovaný algoritmus se u stejného příkladu po šesti krocích vrátí k původní tabulce a vzhledem k determinističnosti modifikovaného pravidla bude donekonečna obíhat ve stejném cyklu (nejlépe je jeho mechanismus patrný ze sloupce B):

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

5	1.7	0.0	0.0	0.0	1.0	−10.7	8.0	0.0
2	−0.3	1.0	0.0	0.0	0.0	0.3	−1.0	0.0
3	−0.7	0.0	1.0	0.0	0.0	2.7	−3.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	−4.7	5.0	0.0

5	−9.0	32.0	0.0	0.0	1.0	0.0	−24.0	0.0
6	−1.0	3.0	0.0	0.0	0.0	1.0	−3.0	0.0
3	2.0	−8.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.0
4	1.0	−3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	3.0	1.0
	−4.0	14.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−9.0	0.0

5	0.6	−6.4	4.8	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
6	0.2	−1.8	0.6	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
7	0.4	−1.6	0.2	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
4	−0.2	1.8	−0.6	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0
	−0.4	−0.4	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

1	1.0	−10.7	8.0	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.3	−1.0	0.0	−0.3	1.0	0.0	0.0
7	0.0	2.7	−3.0	0.0	−0.7	0.0	1.0	0.0
4	0.0	−0.3	1.0	1.0	0.3	0.0	0.0	1.0
	0.0	−4.7	5.0	0.0	0.7	0.0	0.0	0.0

1	1.0	0.0	−24.0	0.0	−9.0	32.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	−3.0	0.0	−1.0	3.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	5.0	0.0	2.0	−8.0	1.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	−9.0	0.0	−4.0	14.0	0.0	0.0

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

Zacyklení: poslední tabulka je identická s první. Tento příklad ukazuje význam Blandova pravidla (8.1), (8.2) pro zaručení konečnosti simplexového algoritmu.

8.2.29 Dodatek: Vlastnosti bázických řešení

Věta 181. *Nechť řádky matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou lineárně nezávislé. Potom pro dané přípustné řešení x jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) x je bázické (tj. $x = x^B$ pro jisté B),
(ii) systém $\{A_{\bullet j}\,;\, x_j > 0\}$ je lineárně nezávislý,
(iii) x je vrcholem množiny přípustných řešení.

Poznámka. Bod $x \in X$ se nazývá vrcholem množiny X, jestliže neexistují $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ tak, že $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ (tj. x není středem žádné úsečky s koncovými body v X). Vlastnost (ii) je v mnohých učebnicích alternativně používána k definici bázického řešení. Tvrzení (iii) říká, že bázická řešení jsou právě všechny vrcholy množiny přípustných řešení (ve smyslu vrcholů konvexního polyedru). Simplexový algoritmus lze tedy geometricky interpretovat tak, že postupuje po vrcholech množiny přípustných řešení a v každém kroku přechází k jednomu ze sousedních vrcholů s menší nebo stejnou hodnotou účelové funkce.

Důkaz. Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i). Položme $J = \{j\,;\, x_j > 0\}$.

(i)⇒(ii): Pro přípustné řešení x tvaru x^B je podle věty 172 $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\} \subseteq \{A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}\}$, přičemž $\{A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}\}$, jakožto systém sloupců regulární matice A_B, je lineárně nezávislý, tedy i systém $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\}$ je lineárně nezávislý.

(ii)⇒(iii): Předpokládejme sporem, že existují přípustná řešení x^1, x^2, $x^1 \neq x^2$, pro která $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$. Potom pro každé j takové, že $x^1_j > 0$ nebo $x^2_j > 0$, je $x_j > 0$, tj. $j \in J$, takže

$$\sum_{j \in J} A_{\bullet j} x^1_j = Ax^1 = b = Ax^2 = \sum_{j \in J} A_{\bullet j} x^2_j,$$

což implikuje

$$\sum_{j \in J} A_{\bullet j}(x^1_j - x^2_j) = 0$$

kde $x^1_j \neq x^2_j$ pro jisté $j \in J$, tedy systém $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\}$ je lineárně závislý, což je spor.

(iii)⇒(ii): Sporem: předpokládejme, že systém $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\}$ je lineárně závislý, takže existují z_j, $j \in J$ tak, že $\sum_{j \in J} A_{\bullet j} z_j = 0$, přičemž $z_j \neq 0$ pro jisté $j \in J$. Protože $x_j > 0$ pro každé $j \in J$, existuje dostatečně malé α s vlastností $x_j - \alpha z_j > 0$, $x_j + \alpha z_j > 0$ pro každé $j \in J$. Dodefinujme $z_j = 0$ pro $j \notin J$, potom $Az = 0$ a $z \neq 0$, a položme $x^1 = x - \alpha z$, $x^2 = x + \alpha z$. Potom je $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $Ax^1 = Ax^2 = b$, takže x^1 a x^2 jsou přípustná řešení taková, že $x^1 \neq x^2$ a $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$, tj. x není vrcholem množiny přípustných řešení, což je spor.

(ii)⇒(i): Jelikož řádky A jsou lineárně nezávislé, má A hodnost m (věta 81), proto existuje m-prvková množina B taková, že $J \subseteq B$ a systém $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in B\}$ je lineárně nezávislý (věta 41). Potom A_B je regulární a pro $x_j > 0$ je $j \in B$, tedy x splňuje $A_B x_B = b$, tj. $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ a $x_j = 0$ pro $j \notin B$, takže tabulka s bází B je simplexová a podle věty 172 platí $x = x^B$. □

8.3 Dualita

8.3.1 Primární a duální úloha

K úloze

$$\min\{c^T x\,;\, Ax = b,\, x \geq 0\}, \tag{P}$$

kterou dále budeme nazývat primární, uvažujme tzv. duální úlohu

$$\max\{b^T y\,;\, A^T y \leq c\}. \tag{D}$$

Povšimněte si, že se nepožaduje nezápornost duální proměnné y. Vektor y splňující $A^T y \leq c$ se nazývá přípustným řešením (D); optimální řešení se definuje analogicky jako u primární úlohy. Pro úlohu (D) opět nastává právě jedna ze tří možností ukončení uvedených ve větě 178 (nepřípustnost, existence optimálního řešení, neomezenost).

8.3.2 Slabá věta o dualitě

Věta 182. *Jsou-li x, y libovolná přípustná řešení (P), (D), potom platí*

$$c^T x \geq b^T y.$$

Navíc, platí-li pro jistou dvojici přípustných řešení

$$c^T x^* = b^T y^*,$$

potom x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

Důkaz. Vzhledem k nezápornosti vektoru x platí

$$c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y.$$

Je-li $c^T x^* = b^T y^*$, potom pro každé přípustné řešení x je podle právě dokázané nerovnosti $c^T x \geq b^T y^* = c^T x^*$, tedy x^* je optimální řešení (P), a analogicky pro každé přípustné řešení y je $b^T y^* = c^T x^* \geq b^T y$, tedy y^* je optimální řešení (D). □

8.3.3 Výpočet duálního optimálního řešení

Věta 183. *Je-li x^B bázické optimální řešení úlohy (P) nalezené v posledním kroku simplexového algoritmu, potom vektor*

$$y^* = (A_B^T)^{-1} c_B$$

je optimálním řešením úlohy (D) a platí

$$c^T x^B = b^T y^*.$$

Důkaz. V poslední tabulce je $\overline{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T$, tedy

$$c^T - ((A_B^T)^{-1} c_B)^T A = c^T - y^{*T} A \geq 0^T,$$

tj. $A^T y^* \leq c$, takže y^* je přípustné řešení (D). Dále $c^T x^B = c_B^T x_B^B = c_B^T A_B^{-1} b = ((A_B^T)^{-1} c_B)^T b = y^{*T} b = b^T y^*$ a podle druhé části věty 182 je y^* optimální řešení (D). □

Poznámka. Jak je vidět, y^* je řešením soustavy

$$A_B^T y^* = c_B$$

a dá se vyčíst z poslední simplexové tabulky, viz str. 175. Podle věty 171 je totiž blok $\overline{\overline{d}}^T$ posledního řádku odpovídající umělým proměnným roven $\overline{\overline{d}}^T = 0^T - c_B^T A_B^{-1} I = -c_B^T A_B^{-1} = -y^{*T}$ (takže y^* je v tabulce s opačným znamením).

8.3.4 Věta o dualitě

Věta 184. *Pro dvojici úloh (P), (D) jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) (P) má optimální řešení,
(ii) (D) má optimální řešení,
(iii) obě úlohy (P), (D) jsou přípustné.

Platí-li libovolné z těchto tvrzení, potom obě úlohy mají stejnou optimální hodnotu[6].

Poznámka. Věta o dualitě je považovaná za nejdůležitější teoretický výsledek lineárního programování. V některých učebnicích se za větu o dualitě označuje pouze ekvivalence „(i)⇔(ii)", případně implikace „(iii)⇒(i)∧(ii)".

Důkaz. Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Má-li (P) optimální řešení, potom podle věty 177 simplexová metoda po konečně mnoha krocích najde tabulku s optimálním řešením (P), z ní lze podle věty 183 zkonstruovat optimální řešení (D) a podle téže věty se optimální hodnoty rovnají.

(ii)⇒(iii): Nechť (D) má optimální řešení y^*. Uvažujme pomocnou úlohu lineárního programování[7]

$$\min\left\{\begin{pmatrix}-b\\ b\\ 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix};\ (-A^T, A^T, -I)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = -c,\ \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\geq 0\right\}. \tag{8.4}$$

Ukážeme, že tato úloha má optimální řešení. Zvolme $y_1' \geq 0$, $y_2' \geq 0$ tak, aby $y^* = y_1' - y_2'$ (např. $(y_1')_i = \max\{y_i^*, 0\}$ a $(y_2')_i = \max\{-y_i^*, 0\}$ pro každé i) a položme $y_3' = c - A^T y^*$. Potom $y_3' \geq 0$ a platí

$$-A^T y_1' + A^T y_2' - y_3' = -A^T y^* - y_3' = -c,$$

což znamená, že úloha (8.4) je přípustná. Dále, je-li y_1, y_2, y_3 libovolné přípustné řešení (8.4), potom z

$$-A^T y_1 + A^T y_2 - y_3 = -c$$

plyne

$$A^T(y_1 - y_2) \leq c,$$

tedy $y_1 - y_2$ je přípustné řešení (D) a proto platí $b^T(y_1 - y_2) \leq b^T y^*$, takže

$$-b^T y_1 + b^T y_2 + 0^T y_3 = -b^T(y_1 - y_2) \geq -b^T y^*.$$

Tedy úloha (8.4), která je v primárním tvaru, je přípustná a její účelová funkce je omezená zdola, takže podle věty 178 má optimální řešení, proto podle důkazu části „(i)⇒(ii)" má optimální řešení i k ní duální úloha

$$\max\left\{-c^T x\,;\ \begin{pmatrix}-A\\ A\\ -I\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}-b\\ b\\ 0\end{pmatrix}\right\},$$

kterou lze psát ve tvaru

$$\max\left\{-c^T x\,;\ Ax = b, x \geq 0\right\},$$

[6] Nikoliv stejné optimální řešení.
[7] Jde o přepis duální úlohy v primárním tvaru, na který můžeme použít už dokázanou implikaci „(i)⇒(ii)".

a tedy má optimální (tj. přípustné) řešení i úloha

$$\min\left\{c^T x\,;\, Ax = b, x \geq 0\right\},$$

což je (P).

(iii)$\Rightarrow$(i): Je-li (P) přípustná a má-li (D) přípustné řešení y_0, potom podle věty 182 pro libovolné přípustné řešení x úlohy (P) platí

$$c^T x \geq b^T y_0,$$

takže její účelová funkce je zdola omezená a podle věty 178 má (P) optimální řešení. □

8.3.5 Podmínky optimality

Věta 185. *Nechť x, y jsou přípustná řešení úloh (P), (D). Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) x, y *jsou optimální řešení (P), (D),*
(ii) $x^T(c - A^T y) = 0$,
(iii) $(\forall j)(x_j > 0 \Rightarrow (A^T y)_j = c_j)$,
(iv) $(\forall j)((A^T y)_j < c_j \Rightarrow x_j = 0)$.

Poznámka. Hlavním obsahem věty je ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii); (iii) a (iv) jsou složkovým přepisem (ii).

Důkaz. Dokážeme (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(i).

(i)$\Rightarrow$(ii): Jsou-li x, y optimální řešení, potom podle věty o dualitě $c^T x = b^T y$ a podle slabé věty o dualitě (věta 182) je $c^T x \geq (Ax)^T y = b^T y = c^T x$, tedy $x^T c = x^T A^T y$ a $x^T(c - A^T y) = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Protože $x^T(c - A^T y) = \sum_j x_j(c - A^T y)_j = 0$, přičemž $x_j \geq 0$ a $(c - A^T y)_j \geq 0$ pro všechna j, znamená to, že pro každé j je $x_j(c - A^T y)_j = 0$ a tedy $x_j > 0$ implikuje $(A^T y)_j = c_j$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Tvrzení (iv) vznikne obrácením implikace (iii) s přihlédnutím k tomu, že x, y splňují $x \geq 0$, $A^T y \leq c$.

(iv)$\Rightarrow$(i): Platí-li (iv), potom $x^T(c - A^T y) = \sum_j x_j(c_j - (A^T y)_j) = 0$ a odtud $c^T x = x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y$, takže podle slabé věty o dualitě jsou x, y optimální řešení (P), (D). □

8.3.6 Farkasova věta

Věta 186. (Farkas 1902)[8] *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Potom soustava*

$$Ax = b, \tag{8.5}$$
$$x \geq 0 \tag{8.6}$$

má řešení právě když platí

$$(\forall y)(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0). \tag{8.7}$$

[8] Někdy též Farkasovo lemma (vysl. „Farkašovo”).

Poznámka. Farkasova věta dává teoretickou podmínku nezáporné řešitelnosti; pro praktické účely se používá fáze I simplexového algoritmu.

Důkaz. Uvažujme úlohu

$$\min\left\{0^T x\,;\ Ax = b, x \geq 0\right\} \tag{8.8}$$

a k ní duální úlohu

$$\max\left\{b^T y\,;\ A^T y \leq 0\right\}. \tag{8.9}$$

Jestliže soustava (8.5), (8.6) má řešení x, potom pro každé y splňující $A^T y \geq 0$ je $A^T(-y) \leq 0$, tedy $-y$ je přípustné řešení (8.9) a podle slabé věty o dualitě je $0 = 0^T x \geq b^T(-y) = -b^T y$, takže $b^T y \geq 0$. Naopak, nechť platí (8.7). Potom (8.9) je přípustná, protože $y = 0$ je přípustné. Dále, její účelová funkce je omezená: je-li $A^T y \leq 0$, potom $A^T(-y) \geq 0$, z čehož podle (8.7) plyne $b^T(-y) \geq 0$ a $b^T y \leq 0$, tedy (8.9) má podle věty 178 optimální řešení, a podle věty o dualitě má i (8.8) optimální řešení, které splňuje $Ax = b$, $x \geq 0$. □

Důsledek. *$Ax = b$, $x \geq 0$ nemá řešení právě když existuje y_0 tak, že $A^T y_0 \geq 0$ a $b^T y_0 < 0$.*

8.3.7 Charakterizace neomezenosti

Věta 187. *Nechť (P) je přípustná. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) (P) je neomezená,
(ii) (D) je nepřípustná,
(iii) existuje vektor z, pro který platí $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

Poznámka. Vektor z s vlastností (iii) lze vyčíst ze simplexové tabulky, viz důkaz věty 174.

Důkaz. Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Jestliže (P) je neomezená, potom (D) nemůže být přípustná (kdyby byla přípustná, potom podle věty o dualitě, implikace „(iii)⇒(i)" by (P) měla optimální řešení, což je spor).

(ii)⇒(iii): Je-li (D) je nepřípustná, potom soustava

$$A^T y_1 - A^T y_2 + y_3 = c,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

nemá řešení (jinak by platilo $A^T(y_1 - y_2) \leq c$ a $y_1 - y_2$ by bylo přípustným řešením (D)), což podle důsledku Farkasovy věty implikuje existenci vektoru z takového, že $Az \geq 0$, $-Az \geq 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$, tj. $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

(iii)⇒(i): Je-li x libovolné přípustné řešení (P), potom pro každé $\alpha \geq 0$ je $x + \alpha z \geq 0$ a $A(x + \alpha z) = Ax + \alpha Az = Ax = b$, tedy $x + \alpha z$ je přípustné řešení (P) a platí

$$\lim_{\alpha\to\infty} c^T(x + \alpha z) = \lim_{\alpha\to\infty}(c^T x + \alpha c^T z) = -\infty,$$

tj. (P) je neomezená. □

8.3.8 Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme nyní úlohu v primárním tvaru s omezením ve tvaru nerovnosti:

$$\min\{c^T x\,;\ Ax \geq b,\ x \geq 0\}. \tag{P'}$$

Tuto úlohu lze převést na primární úlohu s omezením ve tvaru rovnosti

$$\min\{c^T x + 0^T x'\,;\ Ax - x' = b,\ x \geq 0,\ x' \geq 0\}, \tag{8.10}$$

která je zřejmě nepřípustná (neomezená, má optimální řešení) právě když (P') má stejnou vlastnost; navíc v posledním případě mají úlohy (P') a (8.10) stejnou optimální hodnotu. Na úlohu (8.10), která je v primárním tvaru, můžeme tedy aplikovat předchozí teorii. Duální úloha k (8.10), a tedy i k (P'), je[9]

$$\max\{b^T y\,;\ A^T y \leq c,\ y \geq 0\}. \tag{D'}$$

8.3.9 (Slabá) věta o dualitě pro úlohy s nerovnostmi

Věta 188. *Slabá věta o dualitě (věta 182) a věta o dualitě (věta 184) platí ve stejném znění i pro úlohy (P'), (D').*

Důkaz. Tvrzení plyne z vět 182 a 184, aplikovaných na dvojici (8.10), (D'), a z výšeuvedené korespondence mezi úlohami (P') a (8.10). □

8.3.10 Podmínky optimality pro úlohy s nerovnostmi

Věta 189. *Přípustná řešení x, y úloh (P'), (D') jsou jejich optimální řešení právě když platí*

$$\begin{aligned} x^T(c - A^T y) &= 0, \\ y^T(Ax - b) &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Podmínky lze ekvivalentně přepsat ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} (\forall j)(x_j > 0 \quad &\Rightarrow \quad (A^T y)_j = c_j), \\ (\forall i)(y_i > 0 \quad &\Rightarrow \quad (Ax)_i = b_i). \end{aligned}$$

Důkaz. x, y jsou optimální řešení (P'), (D') právě když x, $x' = Ax - b$ a y jsou optimální řešení (8.10), (D'), což je podle věty 185 ekvivalentní podmínce

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c - A^T y \\ y \end{pmatrix} = 0$$

resp.

$$\begin{aligned} x^T(c - A^T y) = 0, \\ x'^T y = y^T(Ax - b) = 0. \end{aligned}$$ □

[9] Povšimněte si omezení $y \geq 0$, které v úloze (D) chybí.

8.3.11 Dodatek

Analogickým postupem můžeme dokázat, že Farkasova podmínka pro soustavu

$$\begin{aligned} Ax &\le b, \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

má tvar

$$(\forall y \ge 0)(A^T y \ge 0 \Rightarrow b^T y \ge 0)$$

a že charakterizace neomezenosti (věta 187) platí i pro úlohy (P'), (D') jestliže v tvrzení (iii) zaměníme „$Az = 0$" na „$Az \ge 0$".

8.4 Aplikace lineárního programování: teorie her

8.4.1 Teorie her: základní pojmy

V konečné maticové hře hrají proti sobě hráči 1 a 2, kteří mají k dispozici m resp. n tzv. čistých strategií. Volí-li hráč 1 čistou strategii $i \in \{1, \ldots, m\}$ a hráč 2 čistou strategii $j \in \{1, \ldots, n\}$, je výsledek jednoznačně určen a hráč 2 vyplácí hráči 1 částku a_{ij} (v případě $a_{ij} < 0$ to znamená, že hráč 1 vyplácí hráči 2 částku $|a_{ij}|$). Hra je tedy úplně určena tzv. výplatní maticí $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť x_i je pravděpodobnost použití čisté strategie i hráčem 1 ($i = 1, \ldots, m$). Potom vektor $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$ splňuje $e^T x = 1$, $x \ge 0$ (kde $e = (1, \ldots, 1)^T$) a nazývá se smíšenou strategií hráče 1, podobně vektor $y = (y_j) \in \mathbb{R}^n$ splňující[10] $e^T y = 1$, $y \ge 0$ se nazývá smíšenou strategií hráče 2 a složku y_j interpretujeme jako pravděpodobnost použití čisté strategie j hráčem 2.

Nechť se hraje N her, kde N je velké číslo, a oba hráči se přidržují smíšených strategií x, y. Potom pravděpodobnost střetu i-té čisté strategie hráče 1 a j-té čisté strategie hráče 2 je $x_i y_j$, očekávaný zisk hráče 1 je $a_{ij} x_i y_j N$, v sumě přes všechny možné dvojice smíšených strategií $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j N = (x^T A y)N$, průměrný očekávaný zisk hráče 1 na jednu hru je tedy $x^T A y$. Z toho vyplývá snaha hráče 1 maximalizovat $x^T A y$, kdežto snahou hráče 2 je tuto hodnotu minimalizovat. To vede k této úvaze: předpokládejme, že existují smíšené strategie x^*, y^* hráčů 1, 2 s vlastností

$$x^T A y^* \le x^{*T} A y^* \le x^{*T} A y \tag{8.11}$$

pro libovolné smíšené strategie x, y. Z levé nerovnosti je zřejmé, že použije-li hráč 2 smíšenou strategii y^*, potom hráč 1 nemůže dosáhnout většího zisku než $x^{*T} A y^*$, naopak z pravé nerovnosti plyne, že při volbě smíšené strategie x^* hráčem 1 nemůže hráč 2 žádnou smíšenou strategií snížit jeho zisk pod hodnotu $x^{*T} A y^*$. Předpokládá-li každý z obou hráčů, že jeho soupeř hraje jak nejlépe je možné, je výsledná hodnota $x^{*T} A y^*$ přijatelná pro obě strany, protože každý z hráčů ví, že při správné hře soupeře nemůže získat více. Proto se x^*, y^* (pakliže existují) nazývají optimálními smíšenými strategiemi a číslo $x^{*T} A y^*$ se nazývá cenou hry.

Poznámka. Definice (8.11) vypadá uměle a existence optimálních smíšených strategií je na první pohled nepravděpodobná. O to více překvapuje, že optimální smíšené strategie *vždy existují* (viz dále).

[10] Pro přehlednost zápisu nevyznačujeme dimenzi vektoru e; ve výrazu $e^T x$ je $e \in \mathbb{R}^m$, kdežto ve výrazu $e^T y$ je $e \in \mathbb{R}^n$.

8.4.2 Cena hry

Především ukážeme, že cena hry nezávisí na volbě optimálních smíšených strategií:

Věta 190. *Jsou-li x^*, y^* a $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ optimální smíšené strategie, potom*

$$x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^T A\tilde{y}.$$

Důkaz. Z definice plyne, že platí (8.11) a

$$x^T A\tilde{y} \le \tilde{x}^T A\tilde{y} \le \tilde{x}^T Ay \tag{8.12}$$

pro každé smíšené strategie x, y. Dosazením $x := x^*$, $y := y^*$ do (8.12) a $x := \tilde{x}$, $y := \tilde{y}$ do (8.11) dostáváme

$$x^{*T}A\tilde{y} \le \tilde{x}^T A\tilde{y} \le \tilde{x}^T Ay^* \le x^{*T}Ay^* \le x^{*T}A\tilde{y},$$

z čehož plyne že všude platí rovnost a tedy $x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^T A\tilde{y}$. □

8.4.3 Existence a výpočet optimálních smíšených strategií

Věta 191. *Pro danou hru zadanou výplatní maticí A nechť $\overline{A} = A + \alpha ee^T$, kde $\alpha = 1 - \min\limits_{ij} a_{ij}$. Potom dvojice duálních úloh lineárního programování*[11]

$$\min\{e^T x\,;\, \overline{A}^T x \ge e,\, x \ge 0\} \tag{P$'$}$$

$$\max\{e^T y\,;\, \overline{A}y \le e,\, y \ge 0\} \tag{D$'$}$$

má optimální řešení. Jsou-li x_0, y_0 libovolná optimální řešení (P'), (D'), potom

$$x^* = \frac{x_0}{e^T x_0},\ y^* = \frac{y_0}{e^T y_0} \tag{8.13}$$

jsou optimální smíšené strategie obou hráčů, $\omega = x^{*T}Ay^*$ je cena hry a pro množiny optimálních smíšených strategií obou hráčů platí

$$\begin{aligned} X_{\text{opt}} &= \{x\,;\, A^T x \ge \omega e,\, e^T x = 1,\, x \ge 0\}, \\ Y_{\text{opt}} &= \{y\,;\quad Ay \le \omega e,\, e^T y = 1,\, y \ge 0\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Z $\alpha = 1 - \min_{ij} a_{ij}$ plyne $a_{ij} + \alpha \ge \min_{ij} a_{ij} + \alpha = 1$ pro každé i, j, tedy $\overline{A} = A + \alpha ee^T > 0$. Úloha (D') je přípustná ($y = 0$ je přípustné) a pro každé její přípustné řešení y a pro každé j platí $\overline{a}_{1j} y_j \le (\overline{A}y)_1 \le 1$, tedy $0 \le y_j \le \frac{1}{\overline{a}_{1j}}$, z čehož plyne, že množina přípustných řešení (D') je omezená, proto (D') má podle věty 178 optimální řešení a podle věty 188 má i (P') optimální řešení.

Nechť x_0, y_0 jsou optimální řešení (P'), (D'). Potom podle věty o dualitě je $e^T x_0 = e^T y_0$ a z $\overline{A}^T x_0 \ge e$ plyne $x_0 \ne 0$, tedy $e^T x_0 > 0$, tudíž vektory x^*, y^* definované vztahy (8.13) jsou nezáporné a platí $e^T x^* = \frac{e^T x_0}{e^T x_0} = 1 = e^T y^*$, tedy jsou to smíšené strategie.

[11] Povšimněte si, že na rozdíl od obvyklé formulace (část 8.3.8) je zde transponovaná matice v primární úloze.

Nechť x, y jsou libovolné smíšené strategie. Potom z $\overline{A}y_0 \leq e$ plyne $x^T\overline{A}y_0 \leq e^T x = 1$, tedy $x^T\overline{A}y^* \leq \frac{1}{e^T y_0}$ a analogicky z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $y^T\overline{A}^T x_0 \geq e^T y = 1$, tj. $x_0^T\overline{A}y \geq 1$ a $x^{*T}\overline{A}y \geq \frac{1}{e^T x_0}$, celkem

$$x^T\overline{A}y^* \leq \frac{1}{e^T y_0} = \frac{1}{e^T x_0} \leq x^{*T}\overline{A}y. \tag{8.14}$$

Avšak $x^T\overline{A}y^* = x^T(A + \alpha ee^T)y^* = x^T Ay^* + \alpha(x^T e)(e^T y^*) = x^T Ay^* + \alpha$, analogicky $x^{*T}\overline{A}y = x^{*T}Ay + \alpha$, díky čemuž můžeme od matice $\overline{A}$ přejít k původní matici A a z (8.14) tak dostáváme

$$x^T Ay^* \leq x^{*T}Ay$$

pro každou dvojici smíšených strategií x, y. Nyní, dosazením za prvé $y := y^*$, za druhé $x := x^*$ dostáváme odtud

$$x^T Ay^* \leq x^{*T}Ay^* \leq x^{*T}Ay, \tag{8.15}$$

tedy podle definice jsou x^*, y^* optimální smíšené strategie obou hráčů a $\omega = x^{*T}Ay^*$ je cena hry.

Je-li $\tilde{y}$ libovolná optimální smíšená strategie hráče 2, potom z $x^T A\tilde{y} \leq \omega$ plyne pro $x = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T = e_i$, že $(A\tilde{y})_i \leq \omega$ pro každé i, tedy $A\tilde{y} \leq \omega e$, a ovšem $e^T\tilde{y} = 1$, $\tilde{y} \geq 0$, tedy $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Naopak, nechť $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Potom z $A\tilde{y} \leq \omega e$ plyne pro každou smíšenou strategii x, že $x^T A\tilde{y} \leq \omega(x^T e) = \omega$, tedy

$$x^T A\tilde{y} \leq \omega \leq x^{*T}Ay$$

pro každou smíšenou strategii y podle (8.15), a pro $x := x^*$, $y := \tilde{y}$ dostáváme odsud $\omega = x^* A\tilde{y}$, což znamená, že platí

$$x^T A\tilde{y} \leq x^{*T}A\tilde{y} \leq x^{*T}Ay$$

pro každé smíšené strategie x, y obou hráčů, tedy podle definice jsou x^*, $\tilde{y}$ optimální smíšené strategie, takže $\tilde{y}$ je optimální smíšená strategie hráče 2. Tím jsme dokázali, že Y_{opt} je množina všech optimálních smíšených strategií hráče 2, podobně X_{opt} pro hráče 1. □

8.4.4 Optimální smíšené strategie vždy existují

Věta 192. (von Neumann) *Každá konečná maticová hra má optimální smíšené strategie obou hráčů.*

Důkaz. Plyne přímo z předchozí věty. □

Poznámka. J. von Neumann dokázal tento výsledek nekonstruktivně r. 1929 (údajně inspirován karetními hrami). Teprve objevem simplexové metody (Dantzig 1947) se naskytla možnost optimální strategie efektivně počítat, jak jsme ukázali ve větě 191.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] L. Bican, *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[3] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[4] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[5] J. Dupačová, *Lineární programování*, SPN, Praha, 1982.

[6] M. Fiedler, *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha, 1981.

[7] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.

[8] F. R. Gantmacher, *Tĕorija matric*, Nauka, Moskva, 1966.

[9] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[10] L. Grygarová, *Úvod do lineárního programování*, SPN, Praha, 1975.

[11] P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[13] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[14] M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1964.

[15] M. Maňas, *Teorie her a optimální rozhodování*, SNTL, Praha, 1974.

[16] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[17] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2003.

[18] M. Padberg, *Linear Optimization and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[19] O. Pokorná, *Pseudoinverzní matice*, SPN, Praha, 1978.

[20] G. W. Stewart, *Matrix Algorithms, Volume I: Basic Decompositions*, SIAM, Philadelphia, 1998.

[21] G. W. Stewart and J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.

[22] L. N. Trefethen and D. Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[23] R. J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Kluwer, Boston, 1996.

[24] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*, Mathematische Annalen, 100 (1929), pp. 295–320.

[25] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[26] D. S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[27] G. Williams, *Linear Algebra with Applications*, Jones and Bartlett, Sudbury, 2001.

Index