# Získávání logických tvrzení z dat jako významný směr dobývání znalostí z dat

Martin Holeňa

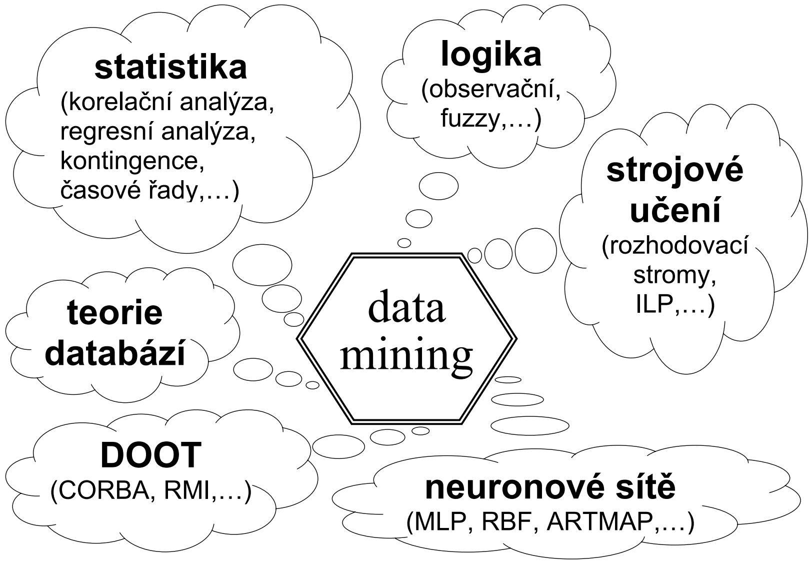
Ústav informatiky AV ČR, Pod vodárenskou věží 2, 18207 Praha 8
martin@cs.cas.cz

**Abstrakt** Příspěvek se zabývá problematikou získávání logických tvrzení z dat, tedy těmi metodami dobývání znalostí z dat (data mining), jejichž výsledky lze vyjádřit v jazyce nějaké formální logiky. Je podán velmi stručný přehled širokého spektra rozmanitých metod tohoto typu, jak metod vycházejících ze statistických přístupů, tak i metod spočívajících na principech strojového učení, a je poukázáno na specifický charakter metod založených na umělých neuronových sítích. Pro ilustraci jsou podrobněji popsány dvě konkrétní metody získávání logických tvrzení z dat. Jednou z nich je metoda Guha, která vychází z observační logiky a je pravděpodobně nejstarší metodou získávání pravidel z dat vůbec. Druhou je metoda založená na po částech lineárních vícevrstvých perceptronech.

## 1. Úvod

Široké spektrum metod pro dobývání znalostí z dat (data mining) s sebou přináší velkou rozmanitost různých formálních reprezentací, v nichž mohou být získané znalosti zachyceny, např. rozhodovací a asociační pravidla, klasifikační hierarchie, shluky, regresní funkce, pravděpodobnostní sítě či další grafické struktury. Většina těchto reprezentací je specifická pro určité třídy metod, např. klasifikační hierarchie pro klasifikaci, shluky pro shlukovou analýzu, regresní funkce pro lineární a nelineární regresní analýzu. Důsledkem toho je, že metody zachycující znalosti získané z dat pomocí téže formální reprezentace bývají typicky založené na podobných principech, a to i v případech, kdy jde o metody zcela rozdílného původu. Tak například se shluky se setkáváme v metodách vyvinutých ve statistické shlukové analýze, v metodách vyvinutých v teorii fuzzy množin i v metodách pocházející z umělých neuronových sítí – při studiu všech konkrétních metod, v nichž se používají, však zjistíme, že principy, na nichž tyto metody spočívají, jsou si ve skutečnosti velmi blízké.

Z této obecné charakteristiky však existuje jedna velmi významná výjimka – reprezentace ve formě tvrzení nějaké formální logiky. Taková tvrzení, obvykle nazývaná *logická pravidla* nebo prostě jen *pravidla*, se používají k zachycení znalostí získaných z dat ve velmi mnoha metodách a tyto metody jsou založeny




**Obr. 1.** Hlavní oblasti a technologie používané v dobývání znalostí z dat (data mining)

na značně rozmanitých principech. Cílem tohoto příspěvku je naznačit význam získávání pravidel z dat prostřednictvím stručného přehledu hlavních tříd metod, v nichž se s ním lze setkat. Tento přehled se pro stručnost omezuje pouze na oblasti a technologie, které již v dobývání znalostí z dat mají relativně pevné místo (Obr. 1). Pozornost proto není věnována získávání pravidel z dat v těch oblastech dobývání znalostí, které jsou teprve ve stádiu výzkumu, jako např. získávání pravidel z dat pomocí teorie neostrých množin [1,2]. Naproti tomu příspěvek upozorňuje na specifický charakter získávání pravidel z dat pomocí umělých neuronových sítí. Přehled metod získávání pravidel z dat je podán velmi zhuštěně, pro ilustraci jsou však popsány dva konkrétní příklady těchto metod, včetně jedné metody založené na umělých neuronových sítích.

Lapidárně lze metody získávání pravidel z dat charakterizovat jako metody, jejichž vstupem je množina dat a výstupem množina pravidel. První z těchto množin lze pokládat za *extenzionálně vyjádřenou relaci* na kartézském součinu oborů hodnot jednotlivých atributů, zatímco druhou lze naopak interpretovat pomocí *intenzionálně vyjádřené relace*, jež by v nějakém smyslu měla odpovídat extenzionální relaci na vstupu. Vstupní relace se dnes obvykle získává z relační databáze, kde je buď přímo uložena jako tabulka, nebo ji lze odvodit z uložených tabulek pomocí operací relační algebry. V minulosti byla typicky získávána jako nestrukturovaný soubor dat nebo konstruována pomocí navigačních operací při procházení hierarchických nebo síťových (codasylovských) databází. Výstupní množina pravidel může být vyjádřena v jazyce jakékoliv formální logiky. V existujících metodách získávání pravidel z dat je touto logikou vždy buď nějaká booleovská logika nebo některá z fuzzy logik.

## 2. První příklad – metoda Guha

Pravděpodobně nejstarší metodou získávání pravidel z dat je *metoda Guha* (General unary hypotheses automaton), rozpracovaná v 60. – 70. letech českými matematiky [3]. Pravidla, která Guha získává z dat, jsou tvrzení observační logiky, což je booleovská predikátová logika se zobecněnými kvantifikátory. Máme-li soubor dat o $n$ objektech, je pravdivostním ohodnocením booleovského predikátu $\varphi$ na těchto objektech vektor $\|\varphi\| \in \{0,1\}^n$, zatímco pravdivostním ohodnocením tvrzení $(Qx)(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ sestávajícího z $m$ booleovských predikátů $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ a $m$-árního zobecněného kvantifikátoru $Q$ je hodnota

$$\|(Qx)(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))\| = \mathrm{Tf}_Q(\|\varphi_1\|,\dots,\|\varphi_m\|), \tag{1}$$

kde $\mathrm{Tf}_Q$ označuje $\{0,1\}$-hodnotovou funkci na množině $m$-sloupcových binárních matic, tedy $\mathrm{Tf}_Q : \bigcup_{k=1}^{\infty}\{0,1\}^{k,m} \to \{0,1\}$, nazývanou *pravdivostní funkce* kvantifikátoru $Q$. V metodě Guha jsou přitom získávána z dat pouze tvrzení velmi speciálního typu:

- vždy mají tvar $(\sim x)(\varphi(x),\psi(x))$, zjednodušeně zapisovaný $\varphi \sim \psi$, s booleovskými predikáty $\varphi$ a $\psi$ a binárním zobecněným kvantifikátorem $\sim$;
- pravdivostní funkce kvantifikátoru $\sim$ je vždy konstruována jako funkce čtyřpolní tabulky pravdivostních ohodnocení predikátů $\varphi$ a $\psi$:

$$\|\varphi \sim \psi\| = \mathrm{Tf}(a_{\varphi,\psi}, b_{\varphi,\psi}, c_{\varphi,\psi}, d_{\varphi,\psi}), \tag{2}$$

kde

$$\mathrm{Tf} : \mathcal{N}_0^4 \to \{0,1\}, \tag{3}$$

$$a_{\varphi,\psi} = \#\{i : \|\varphi\|_i = \|\psi\|_i = 1\}, \tag{4}$$
$$b_{\varphi,\psi} = \#\{i : \|\varphi\|_i = 1 \;\&\; \|\psi\|_i = 0\}, \tag{5}$$
$$c_{\varphi,\psi} = \#\{i : \|\varphi\|_i = 0 \;\&\; \|\psi\|_i = 1\}, \tag{6}$$
$$d_{\varphi,\psi} = \#\{i : \|\varphi\|_i = \|\psi\|_i = 0\}. \tag{7}$$

S použitím značení $\#S$ pro počet prvků množiny $S$. Ačkoliv pravdivostní funkci Tf splňující (3) – (7) lze definovat zcela abstraktně, definice zobecněných kvantifikátorů nejčastěji používaných v aplikacích byly ve skutečnosti inspirovány statistickou analýzou dat. Konkrétně jde o následující kvantifikátory:

1. Kvantifikátor $\to_\theta$, označovaný jako *fundovaná implikace* s prahem $\theta \in (0,1]$ se používá k získání odpovídajícího observačního tvrzení (tj., $\varphi \to_\theta \psi$) v závislosti na hodnotě nestranného odhadu podmíněné pravděpodobnosti $p_{\psi|\varphi}$ že pravdivostní ohodnocení predikátu $\psi$ je "1" za podmínky že pravdivostní ohodnocení predikátu $\varphi$ na témže objektu je "1". Pravdivostní funkce tohoto kvantifikátoru je definována:

$$\mathrm{Tf}_{\to_\theta}(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 & \text{při } \frac{a}{a+b} \geq \theta, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{8}$$

2. Kvantifikátor $\to^!_{\theta,\alpha}$, označovaný jako *dolní kritická implikace* s prahem $\theta \in (0,1]$ se používá k získání observačního tvrzení $\varphi \to^!_{\theta,\alpha} \psi$ na základě testu hypotézy $p_{\psi|\varphi} \leq \theta$ proti alternativě $p_{\psi|\varphi} > \theta$ pomocí binomiálního testu na hladině významnosti $\alpha$. Jeho pravdivostní funkce je definována:

$$\mathrm{Tf}_{\to^!_{\theta,\alpha}}(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 & \text{při } \sum_{i=a}^{a+b} \binom{a+b}{i} \theta^i (1-\theta)^{a+b-i} \leq \alpha, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{9}$$

3. Konečně *Fisherův kvantifikátor* $\sim^F_\alpha$ a *$\chi^2$-qkvantifikátor* $\sim^{\chi^2}_\alpha$ se používají k získání odpovídajících observačních tvrzení $\varphi \sim^F_\alpha \psi$ a $\varphi \sim^{\chi^2}_\alpha \psi$ na základě testování nezávislosti ohodnocení predikátů $\varphi$ a $\psi$ proti alternativě pozitivní závislosti těchto ohodnocení. Přitom Fisherův kvantifikátor odpovídá testování pomocí Fisherova jednostranného faktoriálového testu na hladině významnosti $\alpha$, zatímco $\chi^2$-qkvantifikátor odpovídá testování pomocí $\chi^2$ testu na asymptotické hladině významnosti $\alpha$. Tyto kvantifikátory mají následující pravdivostní funkce:

$$\mathrm{Tf}_{\sim^F_\alpha}(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 & \text{při } ad > bc \wedge \displaystyle\sum_{i=a}^{\min(a+b,a+c)} \frac{\binom{a+c}{i}\binom{b+d}{a+b-i}}{\binom{a+b+c+d}{a+b}} \leq \alpha, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\mathrm{Tf}_{\sim^{\chi^2}_\alpha}(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 & \text{při } ad > bc \wedge \frac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \geq \chi^2_1(1-2\alpha), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{11}$$

Obrázek 2 ukazuje typický příklad tvrzení získaných metodou Guha, v tomto případě z jednoho z nejznámějších testovacích souborů dat, Fisherových dat o kosatcích.

Statistickou analýzou dat jsou inspirovány rovněž nedávná zobecnění metody Guha pro získávání tvrzení fuzzy logiky z dat [4,5].

$$1 \leq \texttt{ petal length } \leq 3 \rightarrow^{!}_{0.8,0.05} \texttt{ class = Setosa}$$
$$0.1 \leq \texttt{ petal width } \leq 0.6 \rightarrow^{!}_{0.8,0.05} \texttt{ class = Setosa}$$
$$0.6 \leq \texttt{ petal width } \leq 1.6 \rightarrow^{!}_{0.8,0.05} \texttt{ class = Versicolor}$$
$$5 \leq \texttt{ petal length } \leq 7 \rightarrow^{!}_{0.8,0.05} \texttt{ class = Virginica}$$
$$1.6 \leq \texttt{ petal width } \leq 2.6 \rightarrow^{!}_{0.8,0.05} \texttt{ class = Virginica}$$

$$1 \leq \texttt{ petal length } \leq 3 \;\&\; 0.1 \leq \texttt{ petal width } \leq 0.6 \sim^{F}_{0.01} \texttt{ class = Setosa}$$
$$3 \leq \texttt{ petal length } \leq 5 \;\&\; 0.6 \leq \texttt{ petal width } \leq 1.6 \sim^{F}_{0.01} \texttt{ class = Versicolor}$$
$$5 \leq \texttt{ petal length } \leq 7 \;\&\; 1.6 \leq \texttt{ petal width } \leq 2.6 \sim^{F}_{0.01} \texttt{ class = Virginica}$$

**Obr. 2.** Ukázka tvrzení získaných metodou Guha ze známých Fisherovýchd dat o kosatcích

## 3. Další metody získávání pravidel z dat

Přes svůj historický význam je Guha dnes již pouze jednou z širokého spektra metod dobývání znalostí z dat, jejichž výstup lze formálně reprezentovat jako pravidla. Připomínku si rozhodně zaslouží přinejmenším následující další zástupci těchto metod:

Několik často používaných metod získává z dat *asociační pravidla*, tj. tvrzení booleovské logiky, která platí v datech s alespoň předepsanou spolehlivostí a jsou podporována alespoň předepsaným procentem případů [6,7,8,9]. Právě tyto metody představují nejbližší příbuzné metody Guha mezi moderními metodami dobývání znalostí z dat. Pravda, dvě desetiletí, která je od vzniku metody Guha oddělují, přinesla řadu terminologických posunů. Tak např. již sám termín „asociační pravidla" navozuje parlelu s třídou zobecněných kvantifikátorů používaných v metodě Guha a označovaných jako *asociační kvantifikátory.* Ve skutečnosti však asociační pravidla získávána z dat metodami požitými v citovaných pracech jsou vždy booleovskými implikacemi, díky čemuž tyto metody odpovídají mnohem užší třídě *implikačních kvantifikátorů.* Terminologické odlišnosti však pouze znesnadňují rozpoznání překvapivě silné podobnosti mezi moderními metodami pro získávání asociačních pravidel a metodou Guha. Ukázala to nedávná srovnávací analýza obou přístupů v [10].

Při získávání asociačních pravidel není nijak na překážku, jestliže se předpoklady (levé strany implikace) dvou či více pravidel překrývají. Naopak, nemalá část dat, z nichž pravidla získáváme, bývá typicky popsána pomocí předpokladů několika pravidel současně. Soubory pravidel s překrývajícími se předpoklady jsou však nevýhodné, pokud je chceme použít ke klasifikaci dat, a zejména pokud na jejich základě chceme činit nějaká rozhodnutí. V takových situacích se používají metody, jejichž výsledkem jsou soubory booleovských implikací s nepřekrývajícími se předpoklady. Pravidla uvedeného typu nazýváme *rozho-*

*dovací pravidla.* K nejvýznamějším zástupcům metod pro získávání rozhodovacích pravidel z dat patří metody AQ [11,12],CN2 [13], a zejména velká skupina metod označovaných jako *rozhodovací stromy* [14,15,16]. Soubory pravidel získaných pomocí této skupiny mohou být díky své hierarchické struktuře snadno vizualizovány jako grafy stromového typu, čemuž rozhodovací stromy vděčí za své jméno. Ještě důležitější je, že právě snadná vizualizovatelnost získaných pravidel je příčinou značné popularity této třídy metod – pokud je výška stromu dostatečně nízká, jsou získaná pravidla velmi dobře srozumitelná. Navíc jsou rozhodovací stromy velmi robustní vůči chybám v datech, neboť hranice oblastí odpovídajících platnosti antecedentů jednotlivých pravidel jsou v jejich případě po částech konstantní a zpravidla nijak nezávisí na datech ve větší vzdálenosti.

Na přelomu mezi asociačními a rozhodovacími pravidly jsou *fuzzy rozhodovací pravidla.* I v jejich případě jde o implikace, avšak o implikace nějaké fuzzy logiky. I tato pravidla se používají k rozhodování a klasifikaci, avšak fuzzy logika obecně neumožňuje dosáhnout toho, aby se předpoklady různých pravidel nepřekrývaly, takže výsledek aplikace všech získaných pravidel je nikoliv konkrétní rozhodnutí či třída, ale fuzzy množina na množině všech rozhodnutí či tříd. Dobrý teoretický popis fuzzy rozhodovacích pravidel lze najít v [17], k nejznámějším metodám pro získávání takových pravidel patří ANFIS [18,19] and NEFCLASS [20,21].

*Induktivní logické programování (ILP)* spočívá vpodstatě v indukci intenzionální definice relace (která má právě formu logických pravidel) na základě extenzionálního popisu té její části a té části jejího doplňku, které jsou k dispozici v datech, tj. na základě pozitivních a negativních příkladů této relace v datech [22,23]. Přitom se může využívat znalostí zachycených v již existujících intenzionálních definicích jiných relací. Dnes již existuje celá řada implementovaných ILP systémů, pro indukci relace odpovídající jedinému konceptu i pro současnou indukci více relací odpovídajících různým konceptům, pro indukci dávkovým i inkrementálním způsobem, pro interaktivní i neinteraktivní indukci.

*Získávání pravidel z dat pomocí genetických algoritmů* je dnes pravděpodobně nejrozpracovanější aplikací genetických algoritmů v dobývání znalostí z dat [24]. Použití genetických algoritmů k získávání pravidel z dat je možné díky tomu, že genetické algoritmy jsou optimalizační metodou, která pracuje pouze s funkčními hodnotami optimalizované funkce. Tou je v případě získávání pravidel z dat obvykle nějaká charakteristika výsledného souboru získaných pravidel, např. jeho celková správnost, přesnost či úplnost, ale také různé charakteristiky zajímavosti získaných pravidel, nebo kombinace více charakteristik. Jako každá jiná metoda pro optimalizaci obecných funkcí i genetické algoritmy musí startovat z nějakého předem dodaného počátečního členu iterační posloupnosti, která v ideálním případě konverguje k hledanému optimu funkce. Na rozdíl od jiných optimalizačních metod však genetické algoritmy hledají optimum pomocí celé populace iteračních posloupností, proto potřebují i celou populaci počátečních členů, tvořících dohromady výchozí generaci optimalizovaných jedinců. Získání této výchozí generace představuje samostatný problém, intenzivně studovaný jak v rámci genetických algoritmů obecně, tak v souvislosti s jejich použitím k získávání pravidel z dat [24,25]. Pokud jde o vlastní optimalizaci, tj. aplikaci genetických operátorů selekce, křížení a mutace na jedince tvořící populaci, používají se při získávání pravidel z dat dva principiálně odlišné přístupy. Tzv. *Pittsburský přístup* vychází z toho, že cílem není získání jednotlivých pravidel, ale celého souboru pravidel co nejlépe popisujícího data. Jedinci, na které se aplikují genetické operátory, jsou proto celé soubory pravidel, a v každé generaci se získá celá populace takových souborů. Naproti tomu v tzv. *Michiganském přístupu* jsou jedinci jednotlivá pravidla a v každé generaci se získá populace pravidel. Michiganský přístup je tudíž výpočetně jednodušší, musí však externě řešit problémy s nekonzistencí a redundancí pravidel, které v případě Pittsburského přístupu lze snadno zabudovat již přímo do genetických operátorů.

## 4. Specificita metod založených na neuronových sítích

Všechny dosud zmíněné metody získávání pravidel z dat mají jeden důležitý společný rys – pravidla jsou získávána přímo z extenzionálně vyjádřené vstupní datové relace, mezi touto relací a pravidly se znalosti neuchovávají v žádné další formální reprezentaci. Tento rys však přesto není univerzálním rysem všech metod získávání pravidel z dat. Přesněji řečeno, nemá jej jedna důležitá třída metod, která zde dosud zmíněna nebyla – *metody založené na umělých neuronových sítích*. Všimněme si na závěr právě této třídy metod poněkud podrobněji.

Ve skutečnosti již zobrazení, které síť realizuje, reprezentuje znalosti přenesené do ní v průběhu učení z dat, znalosti o tom, jak jsou určité hodnoty vstupních proměnných korelovány s určitými hodnotami výstupních proměných. Tyto znalosti jsou reprezentovány částečně pomocí *architektury sítě*, především ale pomocí mnohorozměrného *vektoru parametrů*, který společně s architekturou zobrazení realizované sítí jednoznačně určuje. Např. V případě vícevrstvých perceptronů jsou takovými parametry *váhy* všech spojů mezi sousedními vrstvami sítě a *aktivační prahy* všech skrytých a výstupních neuronů. Je to právě tato „rozprostřená" reprezentace pomocí architektury a parametrů realizovaného zobrazení, které vícevrstvé perceptrony vděčí za své vynikající aproximační vlastnosti (viz např. [26,27,28,29]). Člověku je však tato reprezentace mnohem méně srozumitelná než logická pravidla (v terminologii, kterou oblast dobývání znalostí z dat převzala z kognitivních věd, má reprezentace znalostí V umělých neuronových sítích vysoký „datový fit", ale nízký „mentální fit"). Proto se již od konce osmdesátých let studují metody extrakce pravidel z umělých neuronových sítí ([30,31,32,33,34,35,36,37,38], odkazy na metody publikované před rokem 1999 lze nalézt v přehledových článcích [39,40,41]). Dnes již těchto metod existuje několik desítek a navzájem se liší v celé řadě aspektů, z nichž nejdůležitější jsou expresivnost metody (booleovské a fuzzy metody), její transparentnost, složitost a univerzálnost, přípustné typy proměnných odpovídajících vstupům a výstupům sítě, jakož i korektnost, úplnost, přesnost a věrnost získávaných pravidel. Jejich společným rysem však je, že pracují nejenom s informacemi o dvojicích vektorů ze vstupního a výstupního prostoru sítě, které byly použity již k jejímu trénování, ale v menší či větší míře i s informacemi o dvojicích získaných s využitím zobrazení realizovaného sítí. Některé z metod pracují dokonce pouze s dvojicemi získanými s využitím realizovaného zobrazení, trénovací dvojice vůbec nepotřebují. V metodách získávání pravidel z dat založených na umělých neuronových sítích je proto zobrazení realizované sítí vždy vloženo mezi data a výsledná pravidla, a jemu odpovídající reprezentace pomocí architektury a parametrů představuje přechodnou reprezentaci znalostí, z níž teprve metoda vychází pro získání reprezentace ve formě logických pravidel. Tato vložená přechodná reprezentace znalostí představuje důležitý specifický rys metod založených na umělých neuronových sítích, odlišující je od ostatních typů metod získávání pravidel z dat.

## 5. Druhý příklad – po částech lineární vícevrstvé perceptrony

Většina dosud navržených metod pro získávání pravidel z umělých neuronových sítí spočívá do značné míry na heuristikách. Metod, jejichž vlastnosti lze studovat matematicky, existuje pouze několik. Pro ilustraci metod získávání pravidel z dat založených na umělých neuronových sítí bude nyní nastíněna jedna z nich.

Je to metoda pro získávání pravidel z vícevrstvých perceptronů se spojitými sigmoidními aktivačními funkcemi, založená na přechodu od původního perceptronu k perceptronu s po částech lineárními aktivačními funkcemi, tzv. po částech lineárních vícevrstvých perceptronů [42]. Takový přechod je možný díky hustotě prostoru po částech lineárních sigmoidních funkcí v prostoru spojitých sigmoidních funkcí a díky tomu, že všechny algoritmy pro trénování vícevrstvých perceptronů se spojitými aktivačními funkcemi jsou iterační. Soubor vah a prahů, který algoritmus nalezne v konečném počtu kroků, a tomuto souboru odpovídající zobrazení $F$, které síť realizuje, tudíž obecně nejsou vzhledem k použité učicí posloupnosti $(x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$ dvojic vstupních a výstupních vektorů optimální, tj. neminimalizují nesoulad mezi $(y_1, \dots, y_p)$ a $(F(x_1), \dots, F(x_p))$, měřený např. čtvercem jejich euklidovské vzdálenosti. Lze pouze pro libovolné dané $\varepsilon > 0$ nalézt $\varepsilon$-suboptimální zobrazení, pro něž je nesoulad mezi vektory $(y_1, \dots, y_p)$ a $(F(x_1), \dots, F(x_p))$ nejvýše $\varepsilon$ nad minimem. A suboptimalita je invariantní vzhledem k po částech lineární aproximaci aktivační funkce v tom smyslu, že při každých konstantách $\varepsilon > \delta > 0$ se ke každému $\delta$-suboptimálnímu zobrazení $F$, které je realizováno nějakým vícevrstvým perceptronem se spojitou sigmoidní aktivační funkcí dá sestrojit taková po částech lineární aproximace této aktivační funkce, že zobrazení $G$, které při ní síť realizuje, je pořád ještě $\varepsilon$-suboptimální (přesná formulace této vlastnosti je uvedena v [42]).

Z vícevrstvého perceptronu s $n_I$ vstupními neurony které odpovídají proměnným $X_1, \dots, X_{n_I}$ a $n_O$ výstupními neurony, které odpovídají proměnným

$Y_1, \ldots, Y_{n_O}$ lze potom již snadno získat disjunkce booleovských pravidel tvaru

$$(X_1, \ldots, X_{n_I}) \in P \to \bigwedge_{j=1}^{n_O} Y_j \in V_j, \tag{12}$$

kde $P$ je nějaký mnohostěn ve vstupním prostoru sítě a $V_1, \ldots, V_{n_O}$ jsou podmnožiny oborů hodnot proměnných $Y_1, \ldots, Y_{n_O}$ (typicky nějaké intervaly). Pravidla tvaru (12) se díky linearitě mnohostěnu snadno ukládají v paměti a dále matematicky zpracovávají, jejich srozumitelnosti je však na překážku obtížná interpretace formule $(X_1, \ldots, X_{n_I}) \in P$ v případě obecného mnohostěnu $P$ (Obr. 3), zvláště je-li dimenze $n_I$ vysoká. Proto se obvykle po získání pravidla tvaru (12) snažíme přidat další krok, totiž náhradu mnohostěnu $P$ $n_I$-rozměrným kvádrem $H$ (Obr. 4). Tím přejde (12) v pravidlo

$$\bigwedge_{i=1}^{n_O} X_i \in V'_i \to \bigwedge_{j=1}^{n_O} Y_j \in V_j, \tag{13}$$

kde $V'_1, \ldots, V'_{n_I}$ jsou podmnožiny oborů hodnot proměnných $X_1, \ldots, X_{n_I}$. Pravidlo tvaru (13) je již snadno srozumitelné, a nadto systém pravidel, který takto získáme, je v disjunktivní normální formě. Zda si můžeme dovolit mnohostěn $P$ kvádrem $H$ opravdu nahradit, závisí na naší nespokojenosti s body, které buď leží v $P$ ale neleží v $H$, nebo naopak. Za značně obecných předpokladů lze tuto nespokojenost vyjádřit jako $\mu_P(P \Delta H)$, kde $\mu_P$ je monotonní nezáporná míra na $\Re^{n_I}$, která může záviset na $P$, a $P \Delta H$ označuje symetrický rozdíl množin $P$ a $H$. V implementaci popsané v [42]) se jako míry $\mu_P$ používá empirické podmíněné pravděpodobnosti dané daty a podmíněné mnohostěnem $P$, a pro nahražení $P$ kvádrem $H$ je třeba splnění následujících tří podmínek:

**(i)** $\mu_P(P \Delta H)$ nepřekračuje předem danou toleranci $\varepsilon$,

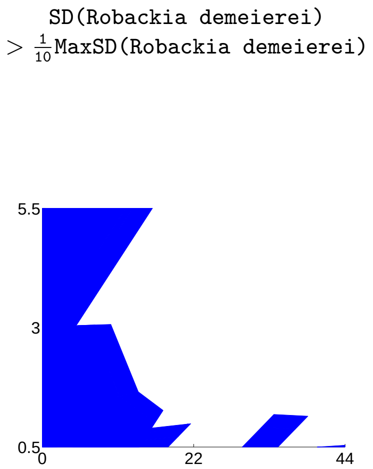
**(ii)** $\mu_P(P \Delta H)$ má v $H$ minimum na množině $\{\mu_P(P \Delta H') : H' \text{ je kvádr v } \Re^{n_i}\}$,

**(iii)** $P$ má neprázdný průnik s daty.

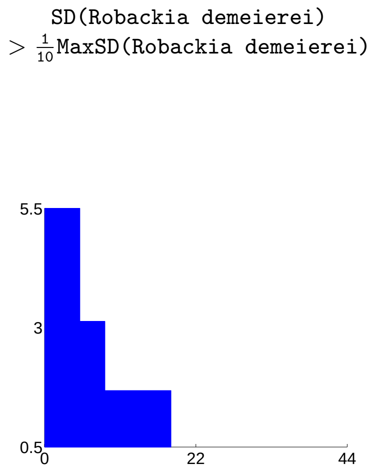
V souvislosti s právě zmíněnou metodou stojí za zmínku, že pomocí po částech lineárních perceptronů lze získávat z dat rovněž tvrzení jedné z hlavních fuzzy logik, Łukasiewiczovy logiky, byť dosud navržené algoritmy mají dvojitě exponenciální složitost, a tudíž nejsou prakticky použitelné [43].

## 6. Závěrečné shrnutí

Tento příspěvek se snažil naznačit význam metod získávání pravidel z dat jakožto velmi rozšířeného typu metod dobývání znalostí z dat. Byla podána obecná charakteristika metod získávání pravidel z dat, která byla ilustrována na příkladu klasické metody Guha. Ve druhé části příspěvku bylo poukázáno na




**Obr. 3.** Dvojrozměrný řez sjednocením mnohostěnů ve vstupním prostoru sítě odpovídajících antecedentům (levým stranám) pravidel nalezených k zadanému konsekventu (pravé straně)




**Obr. 4.** Dvojrozměrná projekce kvádrů ve vstupním prostoru sítě, kterými bylo možno nahradit na základě výše uvedených podmínek (i) – (iii) některé z mnohostěnů na Obr. 3

specifický charakter metod získávání pravidel z dat založených na umělých neuronových sítích. Rovněž tento typ metod byl ilustrován na konkrétním příkladu.

Příspěvek byl připraven v rámci projektu 1ET100366419 "Intelligent Models, Algorithms, Methods and Tools for the Semantic Web Realization" programu Informační Společnost, a za podpory ústavního výzkumného záměru AV0Z10300504.

## Literatura

1. Khoo, L., S.B., T., Zhai, L.: A rough-set approach for classification and rule induction. Internationa Journal of Advanced Manufacturing Technology **15** (1999) 438–444
2. Mak, B., Munakata, T.: Rule extraction from expert heuristics: A comparative study of rough sets with neural networks and id3. European Journal of Operational Research **136** (2002) 212–229
3. Hájek, P., Havránek, T.: Mechanizing Hypothesis Formation. Springer Verlag, Berlin (1978)
4. Holeňa, M.: Fuzzy hypotheses for Guha implications. Fuzzy Sets and Systems **98** (1998) 101–125

5. Holeňa, M.: Fuzzy hypotheses testing in the framework of fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems **145** (2004) 229–252
6. Agrawal, R., Mannila, H., Srikant, R., Toivonen, H., Verkamo, A.: Fast discovery of association rules. In Fayyad, U., Piatetsky-Shapiro, G., Smyth, P., Uthurusamy, R., eds.: Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. AAAI Press, Menlo Park (1996) 307–328
7. Korn, F., Labrinidis, A., Kotidis, Y., Faloutsos, C.: Quantifiable data mining using ration rules. VLDB Journal **8** (2000) 254–266
8. Srikant, R., Vu, Q., Agrawal, R.: Mining association rules with item constraints. In: Proceedings of the Third International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining KDD-97. (1997)
9. Zaki, M., Parathasarathy, S., Ogihara, M., Li, W.: New parallel algorithms for fast discovery of association rules. Data Mining and Knowledge Discovery **1** (1997) 343–373
10. Hájek, P., Holeňa, M.: Formal logics of discovery and hypothesis formation by machine. Theoretical Computer Science **292** (2003) 345–357
11. Michalski, R.: Knowledge acquisition through conceptual clustering: A theoretical framework and algorithm for partitioning data into cnjunctive concepts. International Journal of Policy Analysis and Information Systems **4** (1980) 219–243
12. Michalski, R., Kaufman, K.: Learning patterns in noisy data. In Paliouras, G., Karkaletsis, V., Spyropoulos, C., eds.: Machine Learning and Its Applications. Lecture Notes in Computer Science 2049. Springer Verlag, New York (2001) 22–38
13. Clark, P., Boswell, R.: Rule induction with cn2: Some recent improvements. In Kodratoff, Y., ed.: Machine Learning – EWSL-91. Lecture Notes in Computer Science 482. Springer Verlag, New York (1991) 151–163
14. Breiman, L., Friedman, J., Olshen, R., Stone, C.: Classification and Regression Trees. Wadsworth, Belmont (1984)
15. Hasti, T., Tibshirani, R., Friedman, J.: The Elements of Statistical Learning. Springer Verlag, New York (2001)
16. Quinlan, J.: C4.5: Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco (1992)
17. Hájek, P.: Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998)
18. Jang, J.: ANFIS: Adaptive-network-based fuzzy inference system. IEEE Transactions on Systems, Man, and CCybernetics, **23** (1993) 665–685
19. Jang, J., Sun, C.: Neuro-fuzzy modeling and control. The Proceedings of the IEEE **83** (1995) 378–406
20. Nauck, D., Kruse, R.: NEFCLASS-X: A neuro-fuzzy tool to build readable fuzzy classifiers. BT Technology Journal **3** (1998) 180–192
21. Nauck, D.: Fuzzy data analysis with NEFCLASS. International Journal of Approximate Reasoning **32** (2002) 103–130
22. De Raedt, L.: Interactive Theory Revision: An Inductive Logic Programming Approach. Academic Press, London (1992)
23. Muggleton, S.: Inductive Logic Programming. Academic Press, London (1992)
24. Freitas, A.: Data Mining and Knowledge Discovery with Evolutionary Algorithms. Springer Verlag, Berlin (2002)
25. Wong, M., Leung, K.: Data Mining Using Grammar Based Genetic Programming and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000)
26. Hornik, K.: Approximation capabilities of multilayer neural networks. Neural Networks **4** (1991) 251–257

27. Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H., Auer, P.: Degree of approximation results for feedforward networks approximating unknown mappings and their derivatives. Neural Computation **6** (1994) 1262–1275
28. Kůrková, V.: Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks. Neural Networks **5** (1992) 501–506
29. Kůrková, V.: Rates of approximation by neural networks. In Sinčák, P., Vasčák, J., eds.: Quo Vadis Computational Intelligence? Springer Verlag, Berlin (2000) 23–26
30. Alexander, J., Mozer, M.: Template-based procedures for neural network interpretation. Neural Networks **12** (1999) 479–498
31. Bologna, G.: Symbolic rule extraction from the DIMPL neural network. In Wermter, S., Sun, R., eds.: Hybrid Neural Systems. Springer Verlag, Heidelberg (2000) 241–255
32. Chen, J., Liu, J.: Using mixture principal component analysis networks to extract fuzzy rules from data. Industrial and Engineering Chemistry Research **39** (2000) 2355–2367
33. d'Avila Garcez, A., Broda, K., Gabbay, D.: Symbolic knowledge extraction from artificial neural networks: A sound approach. Artificial Intelligence **125** (2001) 155–207
34. Duch, W., Adamczak, R., Grabczewski, K.: A new methodology of extraction, optimization and application of crisp and fuzzy logical rules. IEEE Transactions on Neural Networks **11** (2000) 277–306
35. Finn, G.: Learning fuzzy rules from data. Neural Computing & Applications **8** (1999) 9–24
36. Ishikawa, M.: Rule extraction by successive regularization. Neural Networks **13** (2000) 1171–1183
37. Mitra, S., De, R., Pal, S.: Knowledge-based fuzzy MLP for classification and rule generation. IEEE Transactions on Neural Networks **8** (1997) 1338–1350
38. Tsukimoto, H.: Extracting rules from trained neural networks. IEEE Transactions on Neural Networks **11** (2000) 333–389
39. Andrews, R., Diederich, J., Tickle, A.: Survey and critique of techniques for extracting rules from trained artificical neural networks. Knowledge Based Systems **8** (1995) 378–389
40. Mitra, S., Hayashi, Y.: Neuro-fuzzy rule generation: Survey in soft computing framework. IEEE Transactions on Neural Networks **11** (2000) 748–768
41. Tickle, A., Andrews, R., Golea, M., Diederich, J.: The truth will come to light: Directions and challenges in extracting rules from trained artificial neural networks. IEEE Transactions on Neural Networks **9** (1998) 1057–1068
42. Holeňa, M.: Extraction of logical rules from data by means of piecewise-linear neural networks. In: Proceedings of the 5th International Conference on Discovery Science. Springer Verlag, Berlin (2002) 192–205
43. Holeňa, M.: Extraction of fuzzy logic rules from data by means of artificial neural networks. Kybernetika **41** (2005) 297–314