

Lze zbohatnout pomocí matematiky?

Ctírad Matonoha

Ústav Informatiky AV ČR, v.v.i.,
Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8

Den otevřených dveří ÚI AV ČR, v.v.i.

3.-4. listopadu 2011

náhodný kolemjdoucí – zpanikaří, rychle uteče:

- "Matematika je úplně zbytečná."
- "Všichni matematici jsou podivíni."
- "Matematika jsou počty."
- "Jde o vědu o číslech."



matematik odpoví:

- "Moderní svět by nemohl existovat bez matematiky."
- "S matematikou lze předpovídat budoucnost."
- "Pomocí matematiky lze zachraňovat životy."
- "Matematika zviditelňuje neviditelné."



- žijeme ve světě plném informací
- je důležité, abychom nedělali chyby při uchovávání, šíření a hledání těchto informací
- k tomu nám slouží matematika
- matematiku lze aplikovat skoro na všechny problémy

Proč je matematika důležitá

- letadlo udržuje ve vzduchu síla (18. st. D. Bernoulli)
- gravitační síla (17. st. I. Newton)
- rádiové vlny – televize, telefony, radary (19. st. J.C. Maxwell)
- výzkum vesmíru – planety, hvězdy, černé díry, kvazary
- výroba čipů
- předpověď počasí



**Použijte DŮKAZ,
věci budou hned jasnější!**

Počítače – užitečný nástroj k počítání, přináší komplikace:

- hledání **přibližného** řešení (přesné lze málokdy nalézt)
- pracují s **konečnou** dimenzí
- problém **zaokrouhlovacích** chyb (konečná aritmetika)
- pracujeme s **nepřesnými** daty (chyba měření nebo důsledek předchozích nepřesných výpočtů)
- chyby se mohou **hromadit** (může dojít k destrukci výsledků)
- je třeba znát **odhad** chyby výpočtu
- problém **efektivity** algoritmů (paměťové nároky, rychlost výpočtu, numerické chování, stabilita)

Těmito otázkami se zabývá naše **oddělení Výpočetních metod**:
vývoj a analýza algoritmů pro řešení úloh vyskytujících se v praxi.

- Google
- tomografie
- stavebnictví a průmysl
- zpracování signálů a obrazů
- předpověď počasí
- ekonomie
- dopravní problém

- hledá informace uložené v mnoha webových stránkách
- název google vychází ze slova „googol“ označujícího 10^{100}
- za úspěchem Googlu je matematika (statistika, numerická matematika)
- navrhli ho Sergey Brin a Larry Page v rámci svého výzkumu na Stanfordově univerzitě
- web si lze představit jako obrovskou matici, se kterou se provádí určité výpočty (hledání vlastních vektorů)
- r. 2002: dimenze 2,7 mld

- J. Radon 1917
- široce používáno v lékařství (CT mozku), archeologii, biologii, geofyzice a mnoha dalších vědách
- zobrazování v řezech, tedy strukturní zobrazování stavby bez fyzického narušení celku
- umožňuje trojrozměrné zobrazení objektů namísto dvourozměrného

- stavby mostů, budov (povětrnostní podmínky, tajfuny, zemětřesení, povodně)
- je třeba spočítat zatížení, vychýlení konstrukce, výdrž nosných částí
- letectví, automobily, vlaky – proudění okolo křídel, aerodynamika
- vytvoří se model, který se testuje pro extrémní podmínky
- je nutné znát jaké chyby se dopustíme
- vojenství – radary, (de)šifrování zpráv (A. Turing – Enigma)
- elektronika – přenášení obrazu a zvuku na televizi, mikrovlnná trouba

Modelový příklad:

- zloděj vykrade banku, ujede autem a je pronásledován policií
- dobrá zpráva: policie udělala foto
- špatná zpráva: foto je rozmazané
- řešení: vzít na pomoc matematiku



- prognóza počasí je založená na využití poznatků o fyzikálních zákonitostech
- definováno mnoha faktory (tlakem, vlhkostí, teplotou, větry)
- je třeba tyto faktory sledovat pomocí technických zařízení a přístrojů
- vytvoří se model a pomocí vztahů mezi faktory se vyřeší určité rovnice
- neustále se aktualizují data a přepočítávají rovnice

Optimalizace

Optimalizace – snaha o hledání **optimálního** řešení mezi existujícími řešeními.

- Mnoho úloh z reálného světa vede na řešení úlohy optimalizace.
- Často se vyskytuje při modelování fyzikálních jevů, minimalizaci nákladů nebo maximalizaci zisku.

Formulace problému:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \quad \text{nebo} \quad \max_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$$

kde F vyjadřuje např. náklady, výdělek nebo fyzikální systém (objektivní funkce).

Matematická úloha **optimalizace** – snaha o nalezení takových hodnot proměnných, pro které daná objektivní funkce nabývá **minimální** nebo **maximální** hodnoty.

fyzikální zákony nebo jiné systémy rovnic:

- omezení ve tvaru **rovností** $c(x) = 0$
- "Auto musí mít čtyři kola."

fyzikální realizovatelnost, spolehlivost, kompatibilita:

- omezení ve tvaru **nerovností** $d(x) \geq 0$
- "Auto musí jet alespoň 300 km/h."

s omezeními se musí nakládat opatrně:

- málo $\Rightarrow$ spousta nekvalitních řešení
- hodně $\Rightarrow$ vyloučení vhodných řešení nebo neexistence řešení

- 1 Formulace modelu, systému proměnných, určení objektivní funkce a omezení
- 2 Shromáždění dat, která definují konkrétní problém
- 3 Řešení problému a nalezení optimálního řešení
- 4 Analýza výsledků zda je to to co chceme
- 5 Zlepšení modelu a dat a opětovné hledání optimálního řešení

- F.L. Hitchcock 1941
- optimalizace rozvozu např. zboží či materiálu od dodavatelů k odběratelům
- cílem je minimalizovat celkové náklady spojené s rozvozem, popřípadě celkovou vzdálenost
- měly by být uspokojeny požadavky odběratelů
- úkolem je tedy stanovit, kolik zboží či materiálu dodá každý dodavatel každému odběrateli

Máme dáno:

- m dodavatelů s kapacitami $a_1 \dots a_m$
- n odběratelů s kapacitami $b_1 \dots b_n$
- c_{ij} cena nákladů spojených s rozvozem zboží od i . dodavatele k j . odběrateli
- x_{ij} proměnné udávající množství přepravovaného zboží od i . dodavatele k j . odběrateli

Úloha dopravního problému:

$$\min_{x \in M} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

přičemž množina M je popsána omezeními

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad x_{ij} \geq 0.$$

Počet tv spotřebičů jisté elektro firmy ve skladech (3 dodavatelé):

Praha	9 000
Brno	3 000
Ostrava	2 000
...	

Do určitých regionů se má dopravit množství (4 odběratelé):

Olomoucko	6 000
Budějovicko	4 000
Hradecko	3 000
Jihlavsko	1 000
...	

Příklad dopravního problému

Náklady na dopravu jednoho kamionu (pojme 100 spotřebičů):

	OL	CB	HK	JI
Praha	2 800	1 600	1 200	1 300
Brno	800	2 100	1 700	900
Ostrava	1 000	3 800	2 400	2 600

c_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	$c_{11} = 2\,800$	$c_{12} = 1\,600$	$c_{13} = 1\,200$	$c_{14} = 1\,300$
$i = 2$	$c_{21} = 800$	$c_{22} = 2\,100$	$c_{23} = 1\,700$	$c_{24} = 900$
$i = 3$	$c_{31} = 1\,000$	$c_{32} = 3\,800$	$c_{33} = 2\,400$	$c_{34} = 2\,600$

Příklad dopravního problému

Objektivní funkci lze napsat ve tvaru:

$$F(x) =$$

$$2\,800\,x_{11} + 1\,600\,x_{12} + 1\,200\,x_{13} + 1\,300\,x_{14} +$$

$$800\,x_{21} + 2\,100\,x_{22} + 1\,700\,x_{23} + 900\,x_{24} +$$

$$1\,000\,x_{31} + 3\,800\,x_{32} + 2\,400\,x_{33} + 2\,600\,x_{34} +$$

...

Hledáme takové hodnoty $x_{11} \dots x_{34} \dots$ (počty kamionů), např.

- x_{11} – počet kamionů z Prahy na Olomoucko,

aby $F(x)$ bylo minimální:

$$? \min F(x) ?$$

Přidáme dva typy omezení:

- ❶ Praha má na skladě 9 000 spotřebičů = 90 kamionů:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + \cdots = 90$$

Analogicky pro Brno, Ostravu, atd.

- ❷ Na OL se má dopravit 6 000 spotřebičů = 60 kamionů:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots = 60$$

Obdobně pro Budějovicko, Hradecko, Jihlavsko, atd.

Přidáme-li požadavek, aby všechny proměnné byly kladné:

$$x_{ij} > 0 \quad \forall i, j,$$

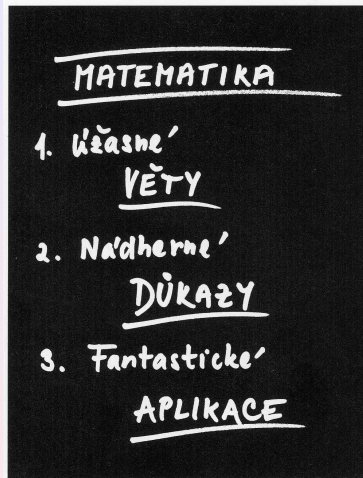
máme kompletní úlohu.

Dopravní problém – běžný u počítačů, telefonů:

- skládají se z mnoha součástí
- součástky se vyrábějí po celém světě
- využití levné pracovní síly
- kompletují se na jednom, dvou, třech místech
- hotové se dopraví do několika skladů
- dopravní problém:
jak minimalizovat náklady a tím maximalizovat zisk

V ÚI vyvíjíme software (L. Lukšan – UFO):

- slouží k řešení výše uvedených i mnohem obecnějších problémů
- obsahuje různé metody na řešení problémů
- metody: navrhujeme, testujeme, srovnáváme, vylepšujeme
- algoritmy jsou podloženy matematickou teorií
- teorie je nedílnou součástí výzkumu
- ve srovnání s konkurencí je náš software velmi úspěšný



- život by bez matematiky nemohl existovat

Lze zbohatnout pomocí matematiky?

ANO

Bohatství =

- účinné nástroje v lékařství
- principy v průmyslu
- telekomunikace
- dopravní problém
- duševní bohatství

ANO

Bohatství =

- účinné nástroje v lékařství
- principy v průmyslu
- telekomunikace
- dopravní problém
- duševní bohatství

Kdo bohatne díky matematice?

- A. Google, Apple, Microsoft, Intel
- B. Matematici

ANO

Bohatství =

- účinné nástroje v lékařství
- principy v průmyslu
- telekomunikace
- dopravní problém
- duševní bohatství

Kdo bohatne díky matematice?

A. Google, Apple, Microsoft, Intel

B. Matematici