Lineární programování
(stručný učební text)[1]

J. Rohn

Univerzita Karlova

Matematicko-fyzikální fakulta

Verze: 17. června 2002

[1]Sepsání tohoto textu bylo podpořeno Grantovou agenturou České republiky z grantu 201/01/0343

Obsah

Kapitola 1

Simplexová metoda

1.1 Značení

Transponovanou matici značíme A^T. Vektory považujeme vždy za sloupcové vektory, tj. matice o jednom sloupci; řádkový vektor píšeme jako transponovaný sloupcový vektor. Platí $(Ax)^T = x^T A^T$ a $x^T y = \sum_j x_j y_j$ je skalární součin vektorů x a y; zřejmě $x^T y = y^T x$. Jsou-li $x, y \in R^n$, definujeme $x \geq y$ jestliže $x_j \geq y_j$ pro každé j, a podobně $x > y$ jestliže $x_j > y_j$ pro každé j. Vektor z splňující $z \geq 0$ se nazývá nezáporný. Je-li $x \geq y$ a $z \geq 0$, potom $z^T x \geq z^T y$. A_j značí j-tý sloupec matice A, takže pro maticový součin platí $(AC)_j = AC_j$. I je jednotková matice.

1.2 Úloha lineárního programování

Základní problém:

$$\min\{c^T x; Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{P}$$

(historie, motivační příklady atd. - na cvičení). Jde tedy o úlohu minimalizace lineární funkce $c^T x = \sum_j c_j x_j$ na množině nezáporných řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = b$. Předpokládáme $A \in R^{m \times n}$, kde $m \leq n$ (není na újmu obecnosti)[1], potom $b \in R^m$, $c, x \in R^n$. Funkce $c^T x$ se nazývá účelová funkce, podmínky $Ax = b$, $x \geq 0$ nazýváme omezující podmínky (omezení) úlohy (P).

Vektor x, který splňuje omezující podmínky $Ax = b$, $x \geq 0$, se nazývá přípustné řešení úlohy (P). Přípustné řešení x^* se nazývá optimálním řešením (P), jestliže platí $c^T x^* \leq c^T x$ pro každé přípustné řešení (P); hodnotu $c^T x^*$ nazýváme optimální hodnotou. Optimální hodnota je určena jednoznačně, kdežto optimálních řešení může být více: je-li x^* optimální řešení a platí $c^T x^* = c^T \hat{x}$ pro jisté přípustné řešení $\hat{x}$, potom $\hat{x}$

[1]později ukážeme, že na začátku algoritmu se k matici A přidává jednotková matice $m \times m$, tím se počet řádků stane menším než počet sloupců

je rovněž optimálním řešením.

1.3 Elementární operace

Připomeňme pojem elementárních operací:

1) násobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,

2) násobení i-tého řádku číslem α a přičtení k řádku $j \neq i$.

Tvrzení 1 *Matice $\tilde{A}$, která je výsledkem provedení posloupnosti elementárních operací s maticí A, je tvaru*

$$\tilde{A} = \tilde{P}A,$$

kde $\tilde{P}$ je jistá čtvercová matice.

Důkaz Pro $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha \in R^1$ definujme $P_{ij}(\alpha)$ jako matici, která vznikne z jednotkové matice I nahrazením ji-tého prvku[2] číslem α. Snadno nahlédneme, že elementární operace 1) je ekvivalentní vynásobení zleva maticí $P_{ii}(\alpha)$, a elementární operace 2) je ekvivalentní vynásobení zleva maticí $P_{ij}(\alpha)$. Tedy výsledek $\tilde{A}$ posloupnosti elementárních operací s maticí A lze psát ve tvaru

$$\tilde{A} = P_{i_\ell j_\ell}(\alpha_\ell) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 j_1}(\alpha_1)A,$$

a položíme-li $\tilde{P} = P_{i_\ell j_\ell}(\alpha_\ell) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 j_1}(\alpha_1)$, je

$$\tilde{A} = \tilde{P}A.$$

□

Třetí elementární operaci s maticí A (výměnu řádků i a j, $i \neq j$) lze v uvedeném značení psát jako $P_{ii}(-1)P_{ij}(1)P_{ji}(-1)P_{ij}(1)A$ a tedy tvrzení platí i pro ni.

1.4 Tabulka

Nechť A je matice $m \times n$, $m \leq n$, a nechť $B = (B_1, \dots, B_m)$ je uspořádaná m-tice vzájemně různých čísel z $\{1, \dots, n\}$. Potom symbolem A_B značíme čtvercovou matici o sloupcích $A_{B_1}, \dots, A_{B_m}$, tj.

$$(A_B)_j = A_{B_j}$$

pro $j = 1, \dots, m$. Podobně definujeme $x_B = (x_{B_1}, \dots, x_{B_m})^T$, tj. $(x_B)_j = x_{B_j}$ pro $j = 1, \dots, m$; analogicky c_B.

[2] povšimněte si přehozených indexů

Věta 1 *Nechť matice*

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$$

je elementárními operacemi s pivoty jen v části A převedena na tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix},$$

kde $\overline{A}_B = I$ a $\overline{c}_B^T = 0^T$ pro jisté B (tj. v B_j-tém sloupci vznikne j-tý sloupec jednotkové matice ($j = 1, \ldots, m$)). Potom pro výslednou matici platí

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A_B^{-1}A, \\ \overline{b} &= A_B^{-1}b, \\ \overline{c}^T &= c^T - c_B^T A_B^{-1}A, \\ \overline{h} &= -c_B^T A_B^{-1}b. \end{aligned}$$

Důkaz Podle tvrzení 1 je

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{P} = P_{i_\ell j_\ell}(\alpha_\ell) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 j_1}(\alpha_1)$ je matice $(m+1) \times (m+1)$. Jelikož pivot se nikdy nevybírá v posledním řádku, je $i_k < m+1$ pro $k = 1, \ldots, \ell$, tj. v posledním sloupci každé matice $P_{i_k j_k}(\alpha_k)$ stojí poslední sloupec jednotkové matice I, a totéž tedy platí (indukcí) i pro matici $\tilde{P}$. To znamená, že $\tilde{P}$ je tvaru

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix}$$

pro jistou $m \times m$ matici P a jistý vektor y. Tedy upravená matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & Pb \\ y^T A + c^T & y^T b \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\overline{A} = PA$ a podle předpokladu je $I_j = (\overline{A}_B)_j = \overline{A}_{B_j} = (PA)_{B_j} = PA_{B_j} = P(A_B)_j = (PA_B)_j$ pro každé j, tedy $PA_B = I$ a $P = A_B^{-1}$. Podobně $\overline{c}^T = y^T A + c^T$ a podle předpokladu $0 = (\overline{c}_B^T)_j = \overline{c}_{B_j} = (y^T A + c^T)_{B_j} = y^T A_{B_j} + c_{B_j} = (y^T A_B)_j + (c_B^T)_j = (y^T A_B + c_B^T)_j$ pro každé j, což znamená, že $y^T A_B + c_B^T = 0^T$, tedy $y^T = -c_B^T A_B^{-1}$, takže výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1}A & A_B^{-1}b \\ c^T - c_B^T A_B^{-1}A & -c_B^T A_B^{-1}b \end{pmatrix}.$$

$\square$

Poznamenejme, že lze rovněž psát $\overline{c}^T = c^T - c_B^T \overline{A}$, $\overline{h} = -c_B^T \overline{b}$.

Místo s maticí

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix}$$

budeme dále pracovat s tabulkou

B	$\overline{A}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T$	$\overline{h}$

(T)

která navíc obsahuje první sloupec s indexovou množinou B, kterou budeme nazývat bází. Je zřejmé, že tohoto sloupce se eliminace netýká. Další tři věty vysvětlují význam jednotlivých bloků tabulky (T).

1.5 Bázická řešení

Věta 2 *Jestliže v tabulce (T) je $\overline{b} \geq 0$, potom vektor x^B definovaný předpisem*

$$\begin{aligned} (x^B)_{B_j} &= \overline{b}_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ (x^B)_j &= 0 \qquad (j \notin B) \end{aligned}$$

je přípustným řešením úlohy (P) a platí $\overline{h} = -c^T x^B$.

Důkaz Z definice x^B plyne, že $x^B \geq 0$ a podle věty 1 je $x_B^B := (x^B)_B = \overline{b} = A_B^{-1} b$, tedy $A_B x_B^B = b$, což znamená, že

$$Ax^B = \sum_j A_j (x^B)_j = \sum_{j \in B} A_j (x^B)_j = \sum_{j=1}^m A_{B_j} (x^B)_{B_j} = A_B x_B^B = b.$$

Tedy x^B je přípustným řešením (P) a $\overline{h} = -c_B^T A_B^{-1} b = -c_B^T x_B^B = -c^T x^B$. $\square$

Jestliže v tabulce (T) je $\overline{b} \geq 0$, nazýváme ji simplexovou tabulkou. Věta 2 říká, že ze simplexové tabulky je možno vyčíst přípustné řešení x^B, které nazýváme bázickým přípustným řešením s bází B.

1.6 Kritérium optimality

Věta 3 *Jestliže v simplexové tabulce (T) platí*

$$\overline{c} \geq 0,$$

potom x^B je optimální řešení úlohy (P).

Důkaz Nechť x je libovolné přípustné řešení úlohy (P). Potom z $\overline{c} \geq 0$ podle věty 1 plyne

$$c^T \geq c_B^T A_B^{-1} A$$

a přenásobením nezáporným vektorem x

$$c^T x \geq c_B^T A_B^{-1} A x = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B^B = c^T x^B,$$

tedy x^B je optimální. □

1.7 Kritérium neomezenosti

Věta 4 *Nechť v simplexové tabulce (T) existuje s tak, že $\overline{c}_s < 0$ a $\overline{A}_s \leq 0$ (tj. $\overline{a}_{js} \leq 0$ pro každé j)[3]. Potom*

$$\inf\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\} = -\infty,$$

tj. hodnota účelové funkce není na množině přípustných řešení zdola omezená.

Důkaz Protože $\overline{c}_s < 0$, je $s \notin B$. Definujme $z \in R^n$ předpisem $z_B = -\overline{A}_s$ (tj. $z_{B_j} = -\overline{a}_{js}$ pro $j = 1, \ldots, m$), $z_s = 1$, $z_j = 0$ jinak. Potom $z \geq 0$ a podle věty 1 je

$$Az = A_B z_B + A_s = -A_B (A_B^{-1} A)_s + A_s = -A_s + A_s = 0$$

a dále

$$c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s + \sum_{j \notin B,\, j \neq s} c_j z_j = c_s - c_B^T A_B^{-1} A_s = \overline{c}_s < 0.$$

Z toho plyne, že každý bod tvaru $x^B + \alpha z$, $\alpha \in R^1$, $\alpha \geq 0$ je přípustným řešením (P) (neboť $x^B + \alpha z \geq 0$ a $A(x^B + \alpha z) = Ax^B = b$) a platí

$$\lim_{\alpha \to \infty} c^T (x^B + \alpha z) = \lim_{\alpha \to \infty} (c^T x^B + \alpha \overline{c}_s) = -\infty,$$

což znamená, že

$$\inf\{c^T x;\ Ax = b, x \geq 0\} = -\infty.$$

□

Povšimněte si, že v tomto případě obsahuje množina přípustných řešení polopřímku $\{x^B + \alpha z;\ \alpha \geq 0\}$ podél níž účelová funkce klesá do $-\infty$.

[3] nikoliv $\overline{A}_s < 0$ (častá chyba u zkoušek, snad způsobená analogií s předchozím $\overline{c}_s < 0$); potom by v případě že $\overline{A}_s \leq 0$ a $\overline{A}_s \not< 0$ došlo k selhání algoritmu, viz věta 5 dále

1.8 Běžný krok algoritmu

Věta 5 *Nechť v simplexové tabulce (T) není splněno kritérium optimality ani kritérium neomezenosti. Potom určíme-li indexy s, r ze vzorců*

$$s = \min\{j;\, \overline{c}_j < 0\}, \tag{1.1}$$

$$B_r = \min\left\{B_k;\, \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\},\ \overline{a}_{ks} > 0\right\} \tag{1.2}$$

(tzv. Blandovo pravidlo)[4]*, provedeme-li eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ a položíme-li $B_r := s$, dostáváme opět simplexovou tabulku*

B'	$\overline{A}'$	$\overline{b}'$
	$\overline{c}'^T$	$\overline{h}'$

(tj. $\overline{b}' \geq 0$) a nové bázické přípustné řešení $x^{B'}$ splňuje

$$c^T x^{B'} \leq c^T x^B.$$

Je-li navíc $\overline{b}_r > 0$, potom

$$c^T x^{B'} < c^T x^B.$$

Důkaz Jelikož v tabulce (T) není splněno kritérium optimality, je $\overline{c}_j < 0$ pro jisté j, takže s je vzorcem (1.1) dobře definováno. Rovněž, jelikož není splněno kritérium neomezenosti, existuje j pro které $\overline{a}_{js} > 0$, takže množina $\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\}$ je neprázdná a tedy i r je vzorcem (1.2) dobře definováno. Navíc $\overline{a}_{rs} > 0$, takže $\overline{a}_{rs}$ lze vybrat za pivota.

V tabulce (T) byl v B_j-tém sloupci j-tý sloupec jednotkové matice, $j = 1, \ldots, m$ (věta 1). Při eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ se vytvoří r-tý sloupec jednotkové matice v s-tém sloupci tabulky, přičemž žádný z ostatních sloupců jednotkové matice se nezmění (ty mají v r-tém řádku nuly, takže eliminace se jich nedotkne). To znamená, že nová tabulka odpovídá indexové množině

$$B' = (B_1, \ldots, B_{r-1}, s, B_{r+1}, \ldots, B_m).$$

Eliminací v původní tabulce

[4] chybná formulace pravidla (1.1), (1.2) je nejčastější chybou u zkoušek z lineárního programování

$$
\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_r & \dots & \dots & \overline{a}_{rs} & \dots & \dots & \overline{b}_r \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_j & \dots & \dots & \overline{a}_{js} & \dots & \dots & \overline{b}_j \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
 & \dots & \dots & \overline{c}_s & \dots & \dots & \overline{h} \\
\hline
\end{array}
$$

s pivotem $\overline{a}_{rs}$ dostaneme tabulku

$$
\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
s & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
B_j & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \overline{h} - \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\
\hline
\end{array}
$$

tj. $\overline{b}'_r = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ a $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ pro $j \neq r$. Dokážeme, že $\overline{b}' \geq 0$. Protože $\overline{b}_r \geq 0$ a $\overline{a}_{rs} > 0$, je $\overline{b}'_r \geq 0$. Je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} \leq 0$, potom $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq \overline{b}_j \geq 0$. Nakonec, je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} > 0$, potom ze vzorce (1.2) vyplývá

$$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}; \overline{a}_{js} > 0\right\} \leq \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}},$$

z čehož plyne $\overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq 0$, čili $\overline{b}'_j \geq 0$. Tím jsme dokázali, že $\overline{b}' \geq 0$. Tedy tabulka po provedení eliminace odpovídá bázickému přípustnému řešení $x^{B'}$, pro které podle věty 2 platí

$$c^T x^{B'} = -\overline{h}' = -\overline{h} + \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \leq -\overline{h} = c^T x^B$$

(neboť $\overline{c}_s < 0$, $\overline{b}_r \geq 0$, $\overline{a}_{rs} > 0$), tedy

$$c^T x^{B'} \leq c^T x^B,$$

a při $\overline{b}_r > 0$ je $\overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} < 0$, takže

$$c^T x^{B'} < c^T x^B.$$

$\square$

1.9 Simplexový algoritmus

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme formulovat tento algoritmus:

Algoritmus (simplexová metoda; Dantzig 1947)

sestav výchozí simplexovou tabulku;
opt: $=$ *false; neom:* $=$ *false;*
repeat
  if $\overline{c} \geq 0$ **then** *opt:* $=$ *true* **else**
    begin
      $s := \min\{j;\, \overline{c}_j < 0\}$;
      if $\overline{A}_s \leq 0$ **then** *neom:=* *true* **else**
        begin
          urči r, pro které $B_r = \min\left\{B_k;\, \frac{\bar{b}_k}{\overline{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\},\, \overline{a}_{ks} > 0\right\}$;
          proveď eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$;
          $B_r := s$
        end
    end
until *(opt* **or** *neom);*
if *opt* **then** $\{x^B$ je optimální řešení$\}$ **else** $\{$úloha je neomezená$\}$.

1.10 Konečnost algoritmu

Cyklem rozumíme konečnou posloupnost kroků simplexového algoritmu, která začíná i končí stejnou bází B (a tedy i stejnou simplexovou tabulkou).

Tvrzení 2 *V průběhu cyklu:*

(i) zůstává poslední sloupec beze změny,

(ii) v každém kroku pro řádek r obsahující pivota platí $\overline{b}_r = 0$.

Důkaz Jestliže algoritmus konstruuje cyklus $B^1, B^2, \ldots, B^\ell = B^1$, potom podle věty 5 platí
$$c^T x^{B^1} \geq c^T x^{B^2} \geq \ldots \geq c^T x^{B^\ell} = c^T x^{B^1},$$
z čehož plyne
$$c^T x^{B^1} = c^T x^{B^2} = \ldots = c^T x^{B^\ell}.$$

Potom podle věty 5 v každé tabulce cyklu s pivotem $\overline{a}_{rs}$ musí být $\overline{b}_r = 0$ (jinak by účelová funkce klesla). Z toho pak plyne, že při eliminaci se sloupec $\overline{b}$ nemění (viz vzorce pro $\overline{b}_j'$ v důkazu věty 5), stejně tak jako hodnota účelové funkce $\overline{h}$. $\square$

Ukážeme, že v uvedené verzi simplexového algoritmu s Blandovým pravidlem pro výběr pivota cyklus nemůže nastat (může však nastat při modifikaci tohoto pravidla, jak bude ukázáno později). To znamená, že algoritmus se nemůže vrátit do báze, kterou už jednou prošel, a protože bází je konečně mnoho, bude z toho plynout konečnost algoritmu.

Věta 6 *Simplexový algoritmus je konečný.*

Důkaz Předpokládejme, že algoritmus se pro jistou úlohu zacyklí. Označme T množinu všech indexů s, vstupujících do báze během cyklu, a nechť $q = \max T$. Nechť q vstupuje do báze v tabulce

B_0	$\cdots$	$\vdots$
	$\cdots \quad y_q < 0 \quad \cdots$	$\cdots$

a vystupuje v tabulce

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	$\cdots \quad \overline{a}_{rs} \quad \cdots$	$\overline{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\cdots \quad \overline{c}_s < 0 \quad \cdots$	$\cdots$

s bází B. Definujme z předpisem $z_B = \overline{A}_s$ (tj. $z_{B_j} = \overline{a}_{js}$ pro $j = 1, \ldots, m$), $z_s = -1$, $z_j = 0$ jinak, tedy $z_B = A_B^{-1} A_s$, $Az = A_B z_B + (-1)A_s = 0$, což dává

$$\begin{aligned}
\sum_k y_k z_k &= y^T z = (c^T - c_{B_0}^T A_{B_0}^{-1} A) z = c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s = c_B^T A_B^{-1} A_s - c_s \\
&= -(c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_s = -\overline{c}_s > 0,
\end{aligned}$$

to znamená, že existuje k takové, že $y_k z_k > 0$. Protože $y_k \neq 0$, je $k \notin B_0$; $z_k \neq 0$ implikuje buď $k \in B$, nebo $k = s$, tj. buď je v bázi, nebo do ní právě vstupuje, tedy $k \in T$. Dále $y_q z_q = y_q \overline{a}_{rs} < 0$ (neboť pivot je kladný), tedy $k \neq q$. Dokážeme, že $q < k$, to bude spor s volbou q jako maximálního prvku T.

Protože $y_k z_k > 0$, je buď a) $y_k < 0$, $z_k < 0$, nebo b) $y_k > 0$, $z_k > 0$.

a) Je-li $y_k < 0$, potom k připadalo v úvahu pro vstup do báze B_0, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (1.1) je $q < k$.

b) Je-li $y_k > 0$, $z_k > 0$, potom $z_k = z_{B_p} = \overline{a}_{ps} > 0$ pro jisté p. Protože $y_k > 0$, k nebylo v bázi B_0, ale je v B, tedy muselo vstoupit, což podle předchozího tvrzení znamená že $\overline{b}_p = 0$, tj.

$$0 = \frac{\overline{b}_p}{\overline{a}_{ps}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\}.$$

Tedy B_p bylo vhodné pro výběr, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (1.2) muselo být $B_r < B_p$, tj. $q < k$.

V obou případech je $q < k$, tedy jsme nalezli $k \in T$, $k > q$, kde $q = \max T$, a to je spor. Proto cyklus nemůže nastat. $\square$

1.11 Dvoufázová simplexová metoda

Simplexový algoritmus popsaný v části 1.9 neřeší otázku sestavení výchozí simplexové tabulky (kde $\overline{b} \geq 0$). Ta se sestavuje v rámci fáze I tzv. dvoufázové simplexové metody, přičemž - na první pohled paradoxně - se k jejímu sestavení opět používá simplexového algoritmu.

Při řešení úlohy (P) můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b \geq 0$, jinak v soustavě omezení nahradíme každou rovnici $(Ax)_i = b_i$, kde $b_i < 0$, rovnicí $-(Ax)_i = -b_i$. Pro úlohu v tomto tvaru sestavíme výchozí tabulku

B_0	A	I	b
	$-e^TA$	0^T	$-e^Tb$

(T_0)

kde I je jednotková matice $m \times m$, $e = (1, \ldots, 1)^T \in R^m$ a $B_0 = (n+1, \ldots, n+m)$. Z věty 1 plyne, že (T_0) je simplexová tabulka pro úlohu

$$\min\{0^Tx + e^Tx';\, Ax + Ix' = b,\, x \geq 0,\, x' \geq 0\} \tag{1.3}$$

s bází B_0 (kde $x' = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T$ je vektor tzv. umělých proměnných), neboť $A_{B_0} = I$, $c_{B_0} = e$ a $b \geq 0$. Aplikujeme-li na úlohu (1.3) s výchozí tabulkou (T_0) simplexový algoritmus (tzv. fáze I), dojdeme po konečném počtu kroků (věta 6) k tabulce

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T \geq 0^T$	$\overline{d}^T \geq 0^T$	$-h^*$

(T_1)

která dává optimální řešení úlohy (1.3) s optimální hodnotou h^* (účelová funkce (1.3) je omezená zdola nulou, takže kritérium neomezenosti nemůže být nikdy splněno a $h^* \geq 0$). Nyní mohou nastat dvě možnosti. Je-li $h^* > 0$, není úloha (P) přípustná a její řešení můžeme ukončit (kdyby totiž (P) měla přípustné řešení x, potom pro $x' = 0$ bychom dostali přípustné řešení úlohy (1.3) s hodnotou účelové funkce 0, což je ve sporu s $h^* > 0$). Je-li $h^* = 0$, je v optimálním řešení (1.3) $e^T x' = 0$, tedy $x' = 0$ (neboť $x' \geq 0$), takže x-ová část optimálního řešení úlohy (1.3) je přípustným řešením (P). Z tabulky (T_1) můžeme nyní vyškrtnout bloky $\overline{I}$ a $\overline{d}^T$, které dohrály svou roli, a nahradit poslední řádek hodnotami, které odpovídají účelové funkci původní úlohy (P) (přičemž bloky B, $\overline{A}$, $\bar{b}$ se nemění), čímž dostaneme tabulku

B	$\overline{A}$	$\bar{b}$
	$c^T - c_B^T \overline{A}$	$-c_B^T \bar{b}$

(T_2)

kterou můžeme použít jako výchozí tabulku simplexového algoritmu pro řešení původní úlohy (P), jenž po konečně mnoha krocích (věta 6) nalezne optimální řešení úlohy (P) nebo ověří její neomezenost (fáze II).

Poznámka 1. Jestliže v tabulce (T_1) je $B_j > n$ pro jisté j, potom v bázi zůstala umělá proměnná $x'_{B_j - n}$ a před přechodem k redukované tabulce (T_2) je třeba se jí zbavit. K tomu účelu nalezneme libovolný prvek $\overline{a}_{js} \neq 0$ a provedeme s ním jako s pivotem obvyklou eliminaci, čímž dostaneme $B_j := s \leq n$. Protože $\bar{b}_j = 0$ vzhledem k $x' = 0$, může být v tomto případě pivot i záporný, neboť nenaruší nezápornost pravé strany. Je-li $\overline{a}_{js} = 0$ pro všechna s, obsahuje celý j-tý řádek tabulky (T_2) nuly, je tedy lineárně závislý a lze jej vyškrtnout.

Poznámka 2. Při přechodu k tabulce (T_2) není ve skutečnosti nutno počítat poslední řádek podle uvedených vzorců. Stačí vyjít od tabulky

B	$\overline{A}$	$\bar{b}$
	c^T	0

a eliminací vynulovat prvky kriteriálního řádku pod sloupci jednotkové matice, která je již v $\overline{A}$ obsažena. Tím dostaneme tabulku tvaru (T_2).

1.12 Tři možnosti ukončení

Věta 7 *Pro každou úlohu (P) nastává právě jedna ze tří možností:*

(i) úloha nemá přípustné řešení,

(ii) úloha má optimální řešení,

(iii) účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená zdola.

Důkaz Fáze I i II jsou podle věty 6 konečné a proto po konečném počtu kroků dojde k jednomu ze tří možných zastavení. □

V případech (i), (iii) se často pro zjednodušení říká, že úloha (P) je nepřípustná resp. neomezená. Tuto terminologii použijeme v kapitole 2.

1.13 Množina optimálních řešení

Věta 8 *Nechť v simplexové tabulce (T) je nalezeno optimální řešení (tj. $\bar{c} \geq 0$). Potom množina všech optimálních řešení je popsaná soustavou*

$$\begin{aligned} \overline{A}x^* &= \bar{b} \\ \bar{c}^T x^* &= 0 \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Důkaz Je-li x^* optimální řešení, potom je přípustné, tedy z $Ax^* = b$ plyne $\overline{A}x^* = A_B^{-1}Ax^* = A_B^{-1}b = \bar{b}$, a $\bar{c}^T x^* = (c^T - c_B^T A_B^{-1} A)x^* = c^T x^* - c_B^T A_B^{-1} b = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B = 0$. Naopak, z $\overline{A}x^* = \bar{b}$ plyne $Ax^* = b$, tedy x^* je přípustné, a $0 = \bar{c}^T x^* = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B$, takže $c^T x^* = c^T x^B$, kde x^B je optimální řešení, a proto i x^* je optimální řešení. □

Věta 9 *Je-li v poslední simplexové tabulce*

$$\bar{c}_j > 0 \text{ pro každé } j \notin B,$$

potom x^B je jediným optimálním řešením úlohy (P).

Důkaz Podle věty 8 každé optimální řešení x^* splňuje $\bar{c}^T x^* = \sum_j \bar{c}_j x_j^* = 0$, kde $\bar{c}_j \geq 0$ a $x_j^* \geq 0$ pro každé j, tedy $\bar{c}_j x_j^* = 0$ pro všechna j. Z předpokladu potom plyne, že $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$. To znamená, že $Ax^* = A_B x_B^* = b$, tedy $x_B^* = A_B^{-1} b = \bar{b}$ a $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$, takže podle věty 2 je $x^* = x^B$ a optimální řešení je jediné. □

1.14 Ukázka výpočtu a zacyklení

Při počáteční simplexové tabulce

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	−6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	−1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	−1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.400	−0.400	1.800	0.000

postupuje simplexový algoritmus v následujících krocích (věta 5):

5	1.667	0.000	0.000	0.000	1.000	−10.667	8.000	0.000
2	−0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.333	−1.000	0.000
3	−0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	2.667	−3.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.667	0.000	0.000	0.000	0.000	−4.667	5.000	0.000

5	−9.000	32.000	0.000	0.000	1.000	0.000	−24.000	0.000
6	−1.000	3.000	0.000	0.000	0.000	1.000	−3.000	0.000
3	2.000	−8.000	1.000	0.000	0.000	0.000	5.000	0.000
4	1.000	−3.000	0.000	1.000	0.000	0.000	3.000	1.000
	−4.000	14.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−9.000	0.000

5	0.000	−4.000	4.500	0.000	1.000	0.000	−1.500	0.000
6	0.000	−1.000	0.500	0.000	0.000	1.000	−0.500	0.000
1	1.000	−4.000	0.500	0.000	0.000	0.000	2.500	0.000
4	0.000	1.000	−0.500	1.000	0.000	0.000	0.500	1.000
	0.000	−2.000	2.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

5	0.000	0.000	2.500	4.000	1.000	0.000	0.500	4.000
6	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
1	1.000	0.000	−1.500	4.000	0.000	0.000	4.500	4.000
2	0.000	1.000	−0.500	1.000	0.000	0.000	0.500	1.000
	0.000	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000	2.000	2.000

Výsledná tabulka (věta 3) dává optimální řešení (věta 2)

$$x^* = (4, 1, 0, 0, 4, 1, 0)^T.$$

Uvažujme nyní tentýž algoritmus s touto modifikací Blandova pravidla (1.1), (1.2)

pro výběr s, r:

$$s = \min\{k;\ \bar{c}_k = \min_j \bar{c}_j\},$$

$$r = \min\left\{k;\ \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}};\ \bar{a}_{js} > 0\right\},\ \bar{a}_{ks} > 0\right\}.$$

Při této modifikaci zůstávají hlavní vlastnosti běžného kroku (udržení nezápornosti $\bar{b}$ a klesání účelové funkce, viz věta 5) zachovány. Nicméně modifikovaný algoritmus se u stejného příkladu po 6 krocích vrátí k původní tabulce a vzhledem k determinističnosti modifikovaného pravidla bude donekonečna obíhat ve stejném cyklu (nejlépe je jeho mechanismus patrný ze sloupce B):

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	−6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	−1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	−1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.400	−0.400	1.800	0.000

5	1.667	0.000	0.000	0.000	1.000	−10.667	8.000	0.000
2	−0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.333	−1.000	0.000
3	−0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	2.667	−3.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.667	0.000	0.000	0.000	0.000	−4.667	5.000	0.000

5	−9.000	32.000	0.000	0.000	1.000	0.000	−24.000	0.000
6	−1.000	3.000	0.000	0.000	0.000	1.000	−3.000	0.000
3	2.000	−8.000	1.000	0.000	0.000	0.000	5.000	0.000
4	1.000	−3.000	0.000	1.000	0.000	0.000	3.000	1.000
	−4.000	14.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−9.000	0.000

5	0.600	−6.400	4.800	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
6	0.200	−1.800	0.600	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
7	0.400	−1.600	0.200	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
4	−0.200	1.800	−0.600	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
	−0.400	−0.400	1.800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

1	1.000	-10.667	8.000	0.000	1.667	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.333	-1.000	0.000	-0.333	1.000	0.000	0.000
7	0.000	2.667	-3.000	0.000	-0.667	0.000	1.000	0.000
4	0.000	-0.333	1.000	1.000	0.333	0.000	0.000	1.000
	0.000	-4.667	5.000	0.000	0.667	0.000	0.000	0.000

1	1.000	0.000	-24.000	0.000	-9.000	32.000	0.000	0.000
2	0.000	1.000	-3.000	0.000	-1.000	3.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	5.000	0.000	2.000	-8.000	1.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	-9.000	0.000	-4.000	14.000	0.000	0.000

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	-6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	-1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	-1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.400	-0.400	1.800	0.000

Tento příklad ukazuje význam Blandova pravidla (1.1), (1.2) pro zaručení konečnosti simplexového algoritmu.

1.15 Dodatek: Vlastnosti bázických řešení

Věta 10 *Nechť řádky matice A jsou lineárně nezávislé. Potom pro dané přípustné řešení x jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) x je bázické (tj. $x = x^B$ pro jisté B),

(ii) množina $\{A_j;\, x_j > 0\}$ je lineárně nezávislá,

(iii) x je vrcholem množiny přípustných řešení.

Poznámka Bod $x \in X$ se nazývá vrcholem množiny X jestliže neexistují $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ tak, že $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ (tj. x není středem žádné úsečky s koncovými body v X).

Důkaz Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i). Položme $J = \{j;\, x_j > 0\}$.

(i)⇒(ii): Pro přípustné řešení x tvaru x^B je podle věty 2 $\{A_j;\, j \in J\} \subseteq \{A_{B_1}, \ldots, A_{B_m}\}$, přičemž $\{A_{B_1}, \ldots, A_{B_m}\}$, jakožto množina sloupců regulární matice A_B, je lineárně nezávislá, tedy i $\{A_j;\, j \in J\}$ je lineárně nezávislá.

(ii)⇒(iii): Předpokládejme sporem, že existují přípustná řešení x^1, x^2, $x^1 \neq x^2$, pro která $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$. Potom pro každé j takové, že $x_j^1 > 0$ nebo $x_j^2 > 0$, je $x_j > 0$, tj. $j \in J$, takže

$$\sum_{j \in J} A_j x_j^1 = Ax^1 = b = Ax^2 = \sum_{j \in J} A_j x_j^2,$$

což implikuje

$$\sum_{j \in J} A_j (x_j^1 - x_j^2) = 0$$

kde $x_j^1 \neq x_j^2$ pro jisté $j \in J$, tedy množina $\{A_j;\ j \in J\}$ je lineárně závislá, což je spor.

(iii)⇒(ii): Sporem: předpokládejme, že množina $\{A_j;\ j \in J\}$ je lineárně závislá, takže existují z_j, $j \in J$ tak, že $\sum_{j \in J} A_j z_j = 0$, přičemž $z_j \neq 0$ pro jisté $j \in J$. Protože $x_j > 0$ pro každé $j \in J$, existuje dostatečně malé α s vlastností $x_j - \alpha z_j > 0$, $x_j + \alpha z_j > 0$ pro každé $j \in J$. Dodefinujme $z_j = 0$ pro $j \notin J$, potom $Az = 0$ a $z \neq 0$, a položme $x^1 = x - \alpha z$, $x^2 = x + \alpha z$. Potom je $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $Ax^1 = Ax^2 = b$, takže x^1 a x^2 jsou přípustná řešení taková, že $x^1 \neq x^2$ a $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$, tj. x není vrcholem množiny přípustných řešení, což je spor.

(ii)⇒(i): Jelikož A má řádkovou hodnost m, má i sloupcovou hodnost m, proto existuje m-prvková množina B taková, že $J \subseteq B$ a $\{A_j;\ j \in B\}$ je lineárně nezávislá. Potom A_B je regulární a pro $x_j > 0$ je $j \in B$, tedy x splňuje $A_B x_B = b$, tj. $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ a $x_j = 0$ pro $j \notin B$, takže tabulka s bází B je simplexová a podle věty 2 platí $x = x^B$.

□

Vlastnost (ii) je v mnohých učebnicích alternativně používána k definici bázického řešení. Tvrzení (iii) říká, že bázická řešení jsou právě všechny vrcholy množiny přípustných řešení (ve smyslu vrcholů konvexního polyedru). Simplexový algoritmus lze tedy geometricky interpretovat tak, že postupuje po vrcholech množiny přípustných řešení a v každém kroku přechází k jednomu ze sousedních vrcholů s menší nebo stejnou hodnotou účelové funkce.

Kapitola 2

Teorie duality

2.1 Primární a duální úloha

K úloze

$$\min\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\}, \tag{P}$$

kterou v této kapitole budeme nazývat primární, uvažujme tzv. duální úlohu

$$\max\{b^T y; A^T y \leq c\}. \tag{D}$$

Vektor y splňující $A^T y \leq c$ se nazývá přípustným řešením (D); optimální řešení se definuje analogicky jako u primární úlohy. Pro úlohu (D) opět nastává právě jedna ze tří možností ukončení uvedených ve větě 7 (nepřípustnost, existence optimálního řešení, neomezenost). V této kapitole ukážeme, že mezi oběma úlohami existuje úzký vztah, ačkoliv jejich přípustná řešení patří obecně do různých prostorů ($x \in R^n$, $y \in R^m$).

2.2 Slabá věta o dualitě

Věta 11 *Jsou-li x, y přípustná řešení (P), (D), potom platí*

$$c^T x \geq b^T y.$$

Navíc, platí-li pro jistou dvojici přípustných řešení

$$c^T x^* = b^T y^*,$$

potom x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

Důkaz Vzhledem k nezápornosti vektoru x platí

$$c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y.$$

Je-li $c^T x^* = b^T y^*$, potom pro každé přípustné řešení x je podle právě dokázané nerovnosti $c^T x \geq b^T y^* = c^T x^*$, tedy x^* je optimální řešení (P), a analogicky pro každé přípustné řešení y je $b^T y^* = c^T x^* \geq b^T y$, tedy y^* je optimální řešení (D). $\square$

2.3 Výpočet duálního optimálního řešení

Věta 12 *Je-li x^B bázické optimální řešení úlohy (P) nalezené v posledním kroku simplexového algoritmu, potom vektor*

$$y^* = (A_B^T)^{-1} c_B$$

je optimálním řešením úlohy (D), platí

$$c^T x^B = b^T y^* \tag{2.1}$$

a množina optimálních řešení úlohy (D) je popsaná soustavou

$$A^T y \leq c, \tag{2.2}$$
$$b^T y = b^T y^*. \tag{2.3}$$

Je-li navíc $x_B^B > 0$, potom y^* je jediným optimálním řešením (D).

Důkaz V poslední tabulce je $\bar{c}^T := c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T$, tedy $c^T - ((A_B^T)^{-1} c_B)^T A = c^T - y^{*T} A \geq 0^T$, tj. $A^T y^* \leq c$, takže y^* je přípustné řešení (D). Dále $c^T x^B = c_B^T x_B^B = c_B^T A_B^{-1} b = ((A_B^T)^{-1} c_B)^T b = y^{*T} b = b^T y^*$ a podle druhé části věty 11 je y^* optimální řešení (D). Je-li y řešením soustavy (2.2), (2.3), potom je to přípustné řešení (D), ve kterém se nabývá optimální hodnota, je to tedy optimální řešení (D), a naopak zřejmě každé optimální řešení y úlohy (D) splňuje (2.2), (2.3). Jestliže $x_B^B > 0$ a y je libovolné optimální řešení (D), potom z (2.1) plyne

$$(x^B)^T c = c^T x^B = b^T y^* = b^T y = (A x^B)^T y = (x^B)^T A^T y,$$

což implikuje

$$\sum_{j \in B} x_j^B (c - A^T y)_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^B (c - A^T y)_j = (x^B)^T (c - A^T y) = 0.$$

Jelikož $x_j^B > 0$ a $(c - A^T y)_j \geq 0$ pro každé $j \in B$, znamená to, že $(c - A^T y)_j = 0$ pro každé $j \in B$, tedy $A_B^T y = c_B$ a odtud $y = (A_B^T)^{-1} c_B = y^*$, takže optimální řešení je jediné. $\square$

Jak je vidět, y^* je řešením soustavy $A_B^T y^* = c_B$.

2.4 Věta o dualitě

Následující věta, nazývaná větou o dualitě, je považovaná za nejdůležitější teoretický výsledek lineárního programování.

Věta 13 *Pro dvojici úloh (P), (D) jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) (P) má optimální řešení,

(ii) (D) má optimální řešení,

(iii) obě úlohy (P), (D) jsou přípustné.

Platí-li libovolné z těchto tvrzení, potom obě úlohy mají stejnou optimální hodnotu[1].

Důkaz Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Má-li (P) optimální řešení, potom podle věty 6 simplexová metoda po konečně mnoha krocích najde tabulku s optimálním řešením (P), z ní lze podle věty 12 zkonstruovat optimální řešení (D) a podle téže věty se optimální hodnoty rovnají.

(ii)⇒(iii): Nechť (D) má optimální řešení y^*. Uvažujme pomocnou úlohu lineárního programování[2]

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};\ (-A^T, A^T, -I) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -c,\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}. \quad (2.4)$$

Ukážeme, že tato úloha má optimální řešení. Zvolme $y_1' \geq 0$, $y_2' \geq 0$ tak, aby $y^* = y_1' - y_2'$ (to lze) a položme $y_3' = c - A^T y^*$. Potom $y_3' \geq 0$ a platí

$$-A^T y_1' + A^T y_2' - y_3' = -A^T y^* - y_3' = -c,$$

což znamená, že úloha (2.4) je přípustná. Dále, je-li y_1, y_2, y_3 libovolné přípustné řešení (2.4), potom z

$$-A^T y_1 + A^T y_2 - y_3 = -c$$

plyne

$$A^T (y_1 - y_2) \leq c,$$

tedy $y_1 - y_2$ je přípustné řešení (D) a proto platí $b^T(y_1 - y_2) \leq b^T y^*$, takže

$$-b^T y_1 + b^T y_2 + 0^T y_3 = -b^T(y_1 - y_2) \geq -b^T y^*.$$

[1] nikoliv stejné optimální řešení

[2] jde o přepis duální úlohy v primárním tvaru, na který můžeme použít už dokázanou implikaci „(i)⇒(ii)“

Tedy úloha (2.4), která je v primárním tvaru, je přípustná a její účelová funkce je omezená zdola, takže podle věty 7 má optimální řešení, proto podle důkazu části „(i)⇒(ii)“ má optimální řešení i k ní duální úloha

$$\max\left\{-c^T x; \begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

kterou lze psát ve tvaru

$$\max\left\{-c^T x; Ax = b, x \geq 0\right\},$$

a tedy má optimální (tj. přípustné) řešení i úloha

$$\min\left\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\right\},$$

což je (P).

(iii)⇒(i): Je-li (P) přípustná a má-li (D) přípustné řešení y_0, potom podle věty 11 pro libovolné přípustné řešení x úlohy (P) platí

$$c^T x \geq b^T y_0,$$

takže její účelová funkce je zdola omezená a podle věty 7 má (P) optimální řešení.

□

V některých učebnicích se za větu o dualitě označuje pouze ekvivalence „(i)⇔(ii)“, případně implikace „(iii)⇒(i)∧(ii)“.

2.5 Podmínky optimality

Věta 14 *Nechť x, y jsou přípustná řešení úloh (P), (D). Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) x, y *jsou optimální řešení (P), (D),*

(ii) $x^T(c - A^T y) = 0$,

(iii) $(\forall j)(x_j > 0 \Rightarrow (A^T y)_j = c_j)$,

(iv) $(\forall j)((A^T y)_j < c_j \Rightarrow x_j = 0)$.

Důkaz Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i).

(i)⇒(ii): Jsou-li x, y optimální řešení, potom podle věty o dualitě $c^T x = b^T y$ a podle slabé věty o dualitě (věta 11) je $c^T x \geq (Ax)^T y = b^T y = c^T x$, tedy $x^T c = x^T A^T y$ a $x^T(c - A^T y) = 0$.

(ii)⇒(iii): Protože $x^T(c - A^T y) = \sum_j x_j(c - A^T y)_j = 0$, přičemž $x_j \geq 0$ a $(c - A^T y)_j \geq 0$ pro všechna j, znamená to, že pro každé j je $x_j(c - A^T y)_j = 0$ a tedy $x_j > 0$ implikuje $(A^T y)_j = c_j$.

(iii)⇒(iv): Tvrzení (iv) vznikne obrácením implikace (iii) s přihlédnutím k tomu, že x, y splňují $x \geq 0$, $A^T y \leq c$.

(iv)⇒(i): Platí-li (iv), potom $x^T(c - A^T y) = \sum_j x_j(c_j - (A^T y)_j) = 0$ a odtud $c^T x = x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y$, takže podle slabé věty o dualitě jsou x, y optimální řešení (P), (D).

□

2.6 Farkasova věta

Věta 15 *(Farkasova věta[3]) Nechť $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$. Potom soustava*

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, && (2.5)\\
x &\geq 0 && (2.6)
\end{aligned}
$$

má řešení právě když platí

$$(\forall y)(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0). \tag{2.7}$$

Důkaz Uvažujme úlohu

$$\min \left\{ 0^T x; Ax = b, x \geq 0 \right\} \tag{P_0}$$

a k ní duální úlohu

$$\max \left\{ b^T y; A^T y \leq 0 \right\}. \tag{D_0}$$

Jestliže soustava (2.5), (2.6) má řešení x, potom pro každé y splňující $A^T y \geq 0$ je $A^T(-y) \leq 0$, tedy $-y$ je přípustné řešení (D_0) a podle slabé věty o dualitě je $0 = 0^T x \geq b^T(-y) = -b^T y$, takže $b^T y \geq 0$. Naopak, nechť platí (2.7). Potom (D_0) je přípustná, protože $y = 0$ je přípustné. Dále, její účelová funkce je omezená: je-li $A^T y \leq 0$, potom $A^T(-y) \geq 0$, z čehož podle (2.7) plyne $b^T(-y) \geq 0$ a $b^T y \leq 0$, tedy (D_0) má podle věty 7 optimální řešení, a podle věty o dualitě má i (P_0) optimální

[3] někdy též Farkasovo lemma (vysl. „Farkašovo“)

řešení, které splňuje $Ax = b$, $x \geq 0$. $\square$

Důsledek *$Ax = b$, $x \geq 0$ nemá řešení právě když existuje y takové, že $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$.*

Farkasova věta je významným teoretickým výsledkem; v praxi však pro ověření řešitelnosti soustavy (2.5), (2.6) použijeme fázi I simplexového algoritmu.

2.7 Charakteristika neomezenosti

Věta 16 *Nechť (P) je přípustná. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) (P) je neomezená,

(ii) (D) je nepřípustná,

(iii) existuje vektor z pro který platí $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

Důkaz Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Jestliže (P) je neomezená, potom (D) nemůže být přípustná (kdyby byla přípustná, potom podle věty o dualitě, implikace „(iii)⇒(i)“ by (P) měla optimální řešení, což je spor).

(ii)⇒(iii): Je-li (D) je nepřípustná, potom soustava

$$A^T y_1 - A^T y_2 + y_3 = c,$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

nemá řešení (jinak by platilo $A^T(y_1 - y_2) \leq c$ a $y_1 - y_2$ by bylo přípustným řešením (D)), což podle důsledku Farkasovy věty implikuje existenci vektoru z takového, že $Az \geq 0$, $-Az \geq 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$, tj. $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

(iii)⇒(i): Je-li x libovolné přípustné řešení (P), potom pro každé $\alpha \geq 0$ je $x + \alpha z \geq 0$ a $A(x + \alpha z) = Ax + \alpha Az = Ax = b$, tedy $x + \alpha z$ je přípustné řešení (P) a platí

$$\lim_{\alpha \to \infty} c^T(x + \alpha z) = \lim_{\alpha \to \infty} (c^T x + \alpha c^T z) = -\infty,$$

tj. (P) je neomezená.

$\square$

Vektor z s vlastností (iii) lze vyčíst ze simplexové tabulky, viz důkaz věty 4.

2.8 Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme nyní úlohu v primárním tvaru s omezením ve tvaru nerovnosti:

$$\min\{c^T x;\ Ax \geq b, x \geq 0\}. \tag{P'}$$

Tuto úlohu lze převést na primární úlohu s omezením ve tvaru rovnosti

$$\min\{c^T x + 0^T x';\ Ax - x' = b, x \geq 0, x' \geq 0\}, \tag{2.8}$$

která je zřejmě nepřípustná (neomezená, má optimální řešení) právě když (P') má stejnou vlastnost; navíc v posledním případě mají úlohy (P'), (2.8) stejnou optimální hodnotu. Na úlohu (2.8), která je v primárním tvaru (P), můžeme tedy aplikovat předchozí teorii. Duální úloha k (2.8), a tedy i k (P'), je[4]

$$\max\{b^T y;\ A^T y \leq c, y \geq 0\}. \tag{D'}$$

Věta 17 *Slabá věta o dualitě (věta 11) a věta o dualitě (věta 13) platí ve stejném znění i pro úlohy (P'), (D').*

Důkaz plyne z vět 11 a 13, aplikovaných na dvojici (2.8), (D'), a z výšeuvedené korespondence mezi úlohami (P') a (2.8). □

Podmínky optimality jsou však odlišné (srv. s větou 14):

Věta 18 *Přípustná řešení x, y úloh (P'), (D') jsou jejich optimální řešení právě když*

$$x^T(c - A^T y) = 0, \tag{2.9}$$
$$y^T(Ax - b) = 0. \tag{2.10}$$

Důkaz x, y jsou optimální řešení (P'), (D') právě když x, $x' = Ax - b$ a y jsou optimální řešení (2.8), (D'), což je podle věty 14 ekvivalentní podmínce

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c - A^T y \\ y \end{pmatrix} = 0$$

resp.

$$x^T(c - A^T y) = 0,$$
$$x'^T y = y^T(Ax - b) = 0.$$

[4] povšimněte si omezení $y \geq 0$, které v úloze (D) chybí

$\square$

Protože $x \geq 0$, $y \geq 0$, $c - A^T y \geq 0$ a $Ax - b \geq 0$, lze podmínky (2.9), (2.10) ekvivalentně přepsat ve složkovém tvaru

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall j)(x_j > 0 & \Rightarrow & (A^T y)_j = c_j), \\
(\forall i)(y_i > 0 & \Rightarrow & (Ax)_i = b_i).
\end{array}
$$

Analogickým postupem můžeme dokázat, že Farkasova podmínka pro soustavu

$$
\begin{array}{rcl}
Ax & \geq & b, \\
x & \geq & 0
\end{array}
$$

má tvar

$$(\forall y \leq 0)(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$$

a že charakteristika neomezenosti (věta 16) platí i pro úlohy (P'), (D') jestliže v tvrzení (iii) zaměníme „$Az = 0$“ na „$Az \geq 0$“.

Kapitola 3

Aplikace lineárního programování: teorie her

3.1 Teorie her: základní pojmy

V konečné maticové hře hrají proti sobě hráči 1 a 2, kteří mají k dispozici m resp. n tzv. čistých strategií. Volí-li hráč 1 čistou strategii $i \in \{1, \ldots, m\}$ a hráč 2 čistou strategii $j \in \{1, \ldots, n\}$, je výsledek jednoznačně určen a hráč 2 vyplácí hráči 1 částku a_{ij} (v případě $a_{ij} < 0$ to znamená, že hráč 1 vyplácí hráči 2 částku $|a_{ij}|$). Hra je tedy úplně určena tzv. výplatní maticí $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$.

Nechť x_i je pravděpodobnost použití čisté strategie i hráčem 1 ($i = 1, \ldots, m$). Potom vektor $x = (x_i) \in R^m$ splňuje $e^T x = 1$, $x \geq 0$ (kde $e = (1, \ldots, 1)^T$) a nazývá se smíšenou strategií hráče 1, podobně vektor $y = (y_j) \in R^n$ splňující[1] $e^T y = 1$, $y \geq 0$ se nazývá smíšenou strategií hráče 2 a složku y_j interpretujeme jako pravděpodobnost použití čisté strategie j hráčem 2.

Nechť se hraje N her, kde N je velké číslo, a oba hráči se přidržují smíšených strategií x, y. Potom pravděpodobnost střetu i-té čisté strategie hráče 1 a j-té čisté strategie hráče 2 je $x_i y_j$, očekávaný zisk hráče 1 je $a_{ij} x_i y_j N$, v sumě přes všechny možné dvojice smíšených strategií $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j N = (x^T A y) N$, průměrný očekávaný zisk hráče 1 na jednu hru je tedy $x^T A y$. Z toho vyplývá snaha hráče 1 maximalizovat $x^T A y$, kdežto snahou hráče 2 je tuto hodnotu minimalizovat. To vede k této úvaze: předpokládejme, že existují smíšené strategie x^*, y^* hráčů 1, 2 s vlastností

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y \tag{3.1}$$

pro libovolné smíšené strategie x, y. Z levé nerovnosti je zřejmé, že použije-li hráč 2 smíšenou strategii y^*, potom hráč 1 nemůže dosáhnout většího zisku než $x^{*T} A y^*$,

[1] pro přehlednost zápisu nevyznačujeme dimenzi vektoru e; ve výrazu $e^T x$ je $e \in R^m$, kdežto ve výrazu $e^T y$ je $e \in R^n$

naopak z pravé nerovnosti plyne, že při volbě smíšené strategie x^* hráčem 1 nemůže hráč 2 žádnou smíšenou strategií snížit jeho zisk pod hodnotu $x^{*T}Ay^*$. Předpokládá-li každý z obou hráčů, že jeho soupeř hraje jak nejlépe je možné, je výsledná hodnota $x^{*T}Ay^*$ přijatelná pro obě strany, protože každý z hráčů ví, že při správné hře soupeře nemůže získat více. Proto se x^*, y^* (pakliže existují) nazývají optimálními smíšenými strategiemi a číslo $x^{*T}Ay^*$ se nazývá cenou hry. Především ukážeme, že cena hry nezávisí na volbě optimálních smíšených strategií:

Tvrzení 3 *Jsou-li x^*, y^* a $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ optimální smíšené strategie, potom $x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^TA\tilde{y}$.*

Důkaz Z definice plyne, že platí (3.1) a

$$x^TA\tilde{y} \leq \tilde{x}^TA\tilde{y} \leq \tilde{x}^TAy \tag{3.2}$$

pro každé smíšené strategie x, y. Dosazením $x := x^*$, $y := y^*$ do (3.2) a $x := \tilde{x}$, $y := \tilde{y}$ do (3.1) dostáváme

$$x^{*T}A\tilde{y} \leq \tilde{x}^TA\tilde{y} \leq \tilde{x}^TAy^* \leq x^{*T}Ay^* \leq x^{*T}A\tilde{y},$$

z čehož plyne že všude platí rovnost a tedy $x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^TA\tilde{y}$. $\square$

V další části dokážeme překvapující fakt, že každá konečná maticová hra skutečně má optimální smíšené strategie obou hráčů.

3.2 Existence optimálních smíšených strategií

Označme

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in R^{m \times n}.$$

Věta 19 *Pro danou hru zadanou výplatní maticí A, nechť $\overline{A} = A + \alpha E$, kde $\alpha = 1 - \min_{ij} a_{ij}$. Potom dvojice duálních úloh lineárního programování*[2]

$$\min\{e^Tx;\ \overline{A}^Tx \geq e, x \geq 0\} \tag{P$'$}$$

$$\max\{e^Ty;\ \overline{A}y \leq e, y \geq 0\} \tag{D$'$}$$

má optimální řešení. Jsou-li x_0, y_0 libovolná optimální řešení (P'), (D'), potom

$$x^* = \frac{x_0}{e^Tx_0},\ y^* = \frac{y_0}{e^Ty_0} \tag{3.3}$$

[2]povšimněte si, že na rozdíl od obvyklé formulace je zde transponovaná matice v primární úloze

jsou optimální smíšené strategie obou hráčů,

$$\omega = x^{*T}Ay^*$$

je cena hry a pro množiny optimálních smíšených strategií obou hráčů platí

$$\begin{aligned} X_{\text{opt}} &= \{x;\, A^Tx \geq \omega e, e^Tx = 1, x \geq 0\}, \\ Y_{\text{opt}} &= \{y;\, Ay \leq \omega e, e^Ty = 1, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Důkaz Z $\alpha = 1 - \min_{ij} a_{ij}$ plyne $a_{ij} + \alpha \geq \min_{ij} a_{ij} + \alpha = 1$ pro každé i, j, tedy $\overline{A} = A + \alpha E > 0$. Úloha (D') je přípustná ($y = 0$ je přípustné) a pro každé její přípustné řešení y a pro každé j platí $\overline{a}_{1j}y_j \leq (\overline{A}y)_1 \leq 1$, tedy $0 \leq y_j \leq \frac{1}{\overline{a}_{1j}}$, z čehož plyne, že množina přípustných řešení (D') je omezená, proto (D') má podle věty 7 optimální řešení a podle věty 17 má i (P') optimální řešení.

Nechť x_0, y_0 jsou optimální řešení (P'), (D'). Potom podle věty o dualitě je $e^Tx_0 = e^Ty_0$ a z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $x_0 \neq 0$, tedy $e^Tx_0 > 0$, tudíž vektory x^*, y^* definované vztahy (3.3) jsou nezáporné a platí $e^Tx^* = \frac{e^Tx_0}{e^Tx_0} = 1 = e^Ty^*$, tedy jsou to smíšené strategie.

Nechť x, y jsou libovolné smíšené strategie. Potom z $\overline{A}y_0 \leq e$ plyne $x^T\overline{A}y_0 \leq e^Tx = 1$, tedy $x^T\overline{A}y^* \leq \frac{1}{e^Ty_0}$ a analogicky z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $y^T\overline{A}^T x_0 \geq e^Ty = 1$, tj. $x_0^T\overline{A}y \geq 1$ a $x^{*T}\overline{A}y \geq \frac{1}{e^Tx_0}$, celkem

$$x^T\overline{A}y^* \leq \frac{1}{e^Ty_0} = \frac{1}{e^Tx_0} \leq x^{*T}\overline{A}y. \tag{3.4}$$

Avšak $x^T\overline{A}y^* = x^T(A + \alpha E)y^* = x^TAy^* + \alpha(x^Te) = x^TAy^* + \alpha$, analogicky $x^{*T}\overline{A}y = x^{*T}Ay + \alpha$, díky čemuž můžeme od matice $\overline{A}$ přejít k původní matici A a z (3.4) tak dostáváme

$$x^TAy^* \leq x^{*T}Ay$$

pro každou dvojici smíšených strategií x, y. Nyní, dosazením za prvé $y := y^*$, za druhé $x := x^*$ dostáváme odtud

$$x^TAy^* \leq x^{*T}Ay^* \leq x^{*T}Ay,$$

tedy podle definice jsou x^*, y^* optimální smíšené strategie obou hráčů a $\omega = x^{*T}Ay^*$ je cena hry.

Je-li $\tilde{y}$ libovolná optimální smíšená strategie hráče 2, potom z $x^TA\tilde{y} \leq \omega$ plyne pro $x = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T = I_i$, že $(A\tilde{y})_i \leq \omega$ pro každé i, tedy $A\tilde{y} \leq \omega e$, a ovšem $e^T\tilde{y} = 1$, $\tilde{y} \geq 0$, tedy $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Naopak, nechť $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Potom z $A\tilde{y} \leq \omega e$ plyne pro každou smíšenou strategii x, že $x^TA\tilde{y} \leq \omega(x^Te) = \omega$, tedy

$$x^TA\tilde{y} \leq \omega \leq x^{*T}Ay,$$

a pro $x := x^*$, $y := \tilde{y}$ dostáváme odsud $\omega = x^* A\tilde{y}$, což znamená, že platí

$$x^T A\tilde{y} \leq x^{*T} A\tilde{y} \leq x^{*T} Ay$$

pro každé smíšené strategie obou hráčů a podle definice jsou x^*, $\tilde{y}$ optimální smíšené strategie, tedy $\tilde{y}$ je optimální smíšená strategie hráče 2. Tím jsme dokázali, že Y_{opt} je množina všech optimálních smíšených strategií hráče 2, podobně X_{opt} pro hráče 1. □

Věta 20 *(von Neumann[3]) Každá konečná maticová hra má optimální smíšené strategie obou hráčů.*

Důkaz Plyne přímo z předchozí věty. □

[3]toto je původní von Neumannův výsledek dokázaný nekonstruktivně v době, kdy ještě neexistovalo lineární programování

Literatura

[1] R. G. Bland, New finite pivoting rules for the simplex method, *Mathematics of Operations Research* 2(1977), 103–107

[2] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton 1963

[3] J. Dupačová, *Lineární programování*, SPN, Praha 1982

[4] L. Grygarová, *Úvod do lineárního programování*, SPN, Praha 1975

[5] J. Plesník, J. Dupačová, M. Vlach, *Lineárne programovanie*, Alfa, Bratislava 1990

[6] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1953

[7] M. Maňas, *Teorie her a optimální rozhodování*, SNTL, Praha 1974