Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

matematicko-fyzikální fakulta

Jan Stuchlý

Řešení rozsáhlých úloh nelineárního programování metodami vnitřního bodu

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Ladislav Lukšan, DrSc

Studijní program: Výpočtová matematika - algoritmy

Rád bych na tomto místě poděkoval Doc. Ing. Ladislavu Lukšanovi, DrSc. za pomoc při vypracování diplomové práce, za zapůjčení literatury, cenné připomínky k textu práce a především za čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 11.8.2004 Jan Stuchlý

Obsah

Název práce: Řešení rozsáhlých úloh nelineárního programování metodami vnitřního bodu
Autor: Jan Stuchlý
Katedra: Katedra numerické matematiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Ladislav Lukšan,DrSc -Ústav informatiky Akademie věd České republiky
e-mail vedoucího:luksan@cs.cas.cz
Abstrakt:*V práci jsou navrženy algoritmy pro metodu nehladkých rovnic a pro metodu vnitřního bodu užívající Fletcherovu a Leyfferovu filtrovou metodu. Jsou analyzovány jejich konvergenční vlastnosti. Je dokázáno, že algoritmy generují posloupnost z níž lze vybrat podposloupnost konvergující k řešení, takzvaná slabá věta o globální konvergenci. Jsou navrženy korekce, které zajišťují globální konvergenci v případě, že Hessova matice účelové funkce není dostatečně pozitivně definitní na okolí přípustného bodu. Je navržena nová idea restartu filtru spolu s kritériem pro volbu plné délky kroku. Následně je dokázáno, že každý hromadný bod generovaný takto modifikovaným algoritmem je stacionární, takzvaná silná věta o globální konvergenci, a že metoda je lokálně superlineárně konvergentní.*
klíčová slova: metoda vnitřního bodu - metoda nehladkých rovnic - metoda filtru - nelineární programování - globální a lokální konvergence

Title: Interior Point Methods For Large-Scale Nonlinear Programming
Author: Jan Stuchlý
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. Ing. Ladislav Lukšan, DrSc - Institute of Computer Science Academy of Sciences of the Czech Republic
Supervisor's e-mail address:luksan@cs.cas.cz
Abstract: *Nonsmooth equation and interior point methods using Fletcher and Leyffers's filter methods are proposed. Their convergence properties are analyzed. It is shown that in every infinite sequence generated by algorithm there exists subsequence which converges to local solution of nonlinear optimization problem, so called weak global convergence theorem. Some corrections assuring global convergence without uniform positive definitness of Hessian matrix of objective function near feasible point are proposed. A new idea of filterrestart with criterion for accepting full Newton step is described. Then it is shown that this modification assures strong global convergence - every limit point is local solution of NLP - and local superlinear convergence.*
keywords: interior point method - nonsmooth equation method - filter method - nonlinear programming - global and local convergence

Úvod

Cílem této práce je návrh a teoretická analýza efektivních algoritmů pro nelineární programování. Středem našeho zájmu se stala idea filtru, která při volbě délky kroku nahrazuje pokutovou funkci. Tato idea a některé dosavadní teoretické výsledky jsou popsány v první kapitole.
Pro řešení soustav vzniklých z konkrétních metod používáme nepřesnou Newtonovu metodu, jejíž popis je obsahem druhé kapitoly.
Navržené algoritmy a teorie se dají s úspěchem aplikovat i na jinou metodu spádových směrů - na metodu nehladkých rovnic. Navíc teorie je pro tuto metodu jednodušší než pro metodu vnitřního bodu. Třetí kapitola se tedy zabývá popisem algoritmů pro metodu nehladkých rovnic a jejich teoretickou analýzou. Je dokázána slabá věta o globální konvergenci a jsou navrženy korekce, které následně umožňují zeslabení předpokladů postačujících pro globální konvergenci. V závěru kapitoly je navržen dvou filtrový algoritmus spolu s ideou restartu filtru. Je dokázáno, že tyto modifikace vedou k algoritmu, který je silně globálně a lokálně superlineárně konvergentní.
Čtvrtá kapitola se zabývá metodou vnitřního bodu. Jsou odvozeny obdobné výsledky jako pro metodu nehladkých rovnic.
V závěru porovnáme navržené algoritmy s dřívějšími výsledky a práci uzavřeme shrnutím výsledků.

1 Filtry

1.1 Úvodní poznámky

Idea filtru byla poprvé navržena v článku Rogera Fletchera a Svena Leyffera [9]. Cílem této kapitoly je vysvětlit tento nový přístup k optimalizačním problémům a popsat výsledky, které byly dosaženy do napsání této práce.
Ačkoliv se v dalším textu budeme zabývat obecným problémem nelineárního programování, pro přehlednost se nejprve omezíme na jednodušší tvar:

$$x = \arg \min_{x \in \mathcal{F}_{NP}} f(x), \tag{NP}$$

kde

$$\mathcal{F}_{NP} = \{x \in R^n : c_E(x) = 0\}.$$

Metody, kterými se tato práce zabývá jsou iterační a pro volbu délky kroku je třeba použít kritérium, které bere v úvahu jak pokles účelové funkce tak i pokles míry porušení omezujících podmínek. Takovým kritériem je například tak zvaná pokutová funkce. Tato možnost má však řadu nevýhod. Pro názornost uveďme přirozenou pokutovou funkci pro problém s rovnostními vazbami.

$$\Phi(x, \sigma) = f(x) + \sigma\|c(x)\| \tag{1.1}$$

Tato pokutová funkce je velmi jednoduchá. Byly navrženy mnohem sofistikovanější a složitější varianty, nicméně všechny obsahují volitelný parametr σ. A to je první nevýhoda. Dá se dokázat, že existuje σ_0 tak, že pro všechna $\sigma > \sigma_0$ bude bod ve kterém má (1.1) zaručeně přípustný a za velmi obecných podmínek bude zároveň řešením původního problému. Tuto prahovou hodnotu σ_0 však neznáme předem. Pokud zvolíme tento parametr příliš malý, může metoda konvergovat k nepřípustnému bodu, nebo může dokonce dojít k nekonečnému poklesu pokutové funkce. Pokud naopak zvolíme parametr příliš velký, ubereme tím na váze účelové funkci $f(x)$ a výsledkem bude zpomalení konvergence. Byly navrženy metody, které mění hodnotu pokutového parametru v průběhu výpočtu, ale ani ty nejsou bez problémů.
Dalším problémem použití pokutové funkce je skutečnost, že obvykle dochází ke konfliktu mezi globální a lokální konvergencí. Globálně konvergentní metody nejsou lokálně superlineárně konvergentní a naopak.
Na druhou stranu iterační metody obvykle používané v nelineárním programování (SQP, metody vnitřního bodu,...) fungují v praxi velmi dobře i bez pokutové funkce, nejde ovšem dokázat globální konvergenci. Tato skutečnost inspirovala autory [9] k experimentům s minimalistickým přístupem. Cílem bylo měnit iterace SQP-metody (neboť tou se původní článek zabývá) co nejméně, ovšem dostatečně, aby byla zaručena konvergence.
Byla tedy navržena metoda, která neužívá žádný pokutový parametr. V původním článku nebyla globální konvergence dokázána, nicméně tento výsledek na sebe nenechal dlouho čekat. Pokud jde o zmiňovanou lokální konvergenci, vrátíme se k ní v závěru této kapitoly.

1.2 Idea filtru

V nelineárním programování jsou dva cíle, které si mohou odporovat.
minimalizuj

$$f(x) \tag{1.2}$$

minimalizuj

$$h(x) := \|c(x)\| \tag{1.3}$$

Pokutová funkce kombinuje (1.2) a(1.3) do skalárního kritéria. Idea filtru dává přednost zacházení s oběma cíli odděleně jako u optimalizace s více účelovými funkcemi. V našem případě ovšem navíc striktně požadujeme, aby pro výsledný bod platilo $h(x) = 0$. Jak tuto skutečnost zajistíme ukážeme později.

Definice 1.1 *Řekneme, že dvojice* (f^k, h^k) *dominuje páru* (f^l, h^l) *tehdy a jen tehdy, platí-li* $f^k \leq f^l$ *a zároveň* $h^k \leq h^l$

V kontextu nelineárního programování to znamená, že iterace x^k je aspoň tak dobrá jako iterace x^l. Nyní můžeme definovat filtr.

Definice 1.2 *Filtr* $\Re$ *je seznam dvojic* (f^l, h^l) *tak že žádný pár nedominuje jinému. Řekneme, že bod* (f^k, h^k) *je přijatelný pro filtr, pokud není dominován žádným bodem z filtru.*

Na místo pokutové funkce jako kritérium pro volbu kroku můžeme vzít přijatelnost pro filtr. Toto kritérium je méně omezující, než pokutová funkce.
Tato definice filtru není dostatečná pro důkaz globální konvergence, neboť za těchto podmínek je možné, aby se iterace hromadili v okolí nepřípustného bodu. Tento problém může být snadno napraven vytvoření malé obálky okolo filtru ve které nebudou další iterace přijaty. Tato idea je už navržena v originální článku Fletchera a Leyffera [9]. Bod bude tedy přijatelný pro filtru pokud příslušná dvojice (h, f) splňuje jednu z následujících podmínek:

$$h \leq \beta h^j$$
$$f \leq f^j - \gamma h$$

pro všechna $j \in \Re^k$, kde β a γ jsou předem dané parametry $1 > \beta > \gamma > 0$, přičemž β je blízko 1 a γ blízko 0 (proto se tato definice od té původní liší nepatrně). Tato definice má také důležitou inkluzní vlastnost, a sice pokud je dvojice (h, f) přijata do filtru, potom

množina nepřijatelných bodů pro nový filtr vždy obsahuje množinu nepřijatelných bodů starého filtru.
Na základě těchto definic dokázali Roger Fletcher, Sven Leyffer a Philippe L. Toint v [10] globální konvergenci pro SQP metodu s lokálně omezeným krokem používající filtr.
Pro metody popisované v této práci, je tento přístup nedostatečný a v dalším budou navrženy dodatečné požadavky.

1.3 Dosavadní výsledky

Jak už jsme se zmínili v minulé části původně byly filtry aplikovány na SQP-metody. Pro tyto metody byla také dokázána globální konvergence. Již v originálním článku je zaznamenáno, že filtrové metody mohou trpět tak zvaným Maratosovým jevem: Plný krok libovolně blízko řešení může způsobit jak nárůst účelové funkce tak zvýšení porušení přípustnosti a následně je plný krok zamítnut, což vede ke zhoršení lokální konvergence. Bylo navrženo několik přístupů, jak se s tímto problémem vypořádat, nicméně mají určité nedostatky.
Globální konvergence: O SQP-metodách s lokálně omezeným krokem byla dokázána Silná věta o globální konvergenci v článku [10]. Na tomto místě je třeba se zmínit o názvosloví, jež používáme v této práci. Kvůli odlišení výsledků nazýváme **Silnou větou o globální konvergenci** větu, která tvrdí, že každý hromadný bod posloupnosti generované algoritmem je stacionární přípustný bod. **Slabou větou o globální konvergenci** potom nazveme větu, která tvrdí, že z posloupnosti generované algoritmem lze vybrat aspoň jednu podposloupnost, která konverguje ke stacionárnímu přípustnému bodu.
Michael Ulbrich, Stefan Ulbrich a Luis N. Vincent poté v [13] aplikovali filtry na primárně duální metodu vnitřního bodu. Jako vstup filtru používali mimo jiné normu gradientu Lagrangeovy funkce, což je jednak výpočetně drahé a jednak takováto metoda může být náchylnější ke konvergenci do sedlového bodu. O své metodě dokázali slabou větu o globální konvergenci. Andreas Wächter a Lorentz T. Biegler v [4] potom navrhli filtrovou metodu vnitřního bodu, pro problém

$$x = \arg \min_{x \in \mathcal{F}_{NP1}} f(x), \tag{NP1}$$

kde

$$\mathcal{F}_{NP1} = \{x \in R^n : c_E(x) = 0; x > 0\}$$

která používá jako vstupy filtru toleranci porušení přípustnosti $h(x)$ a $f(x) - \mu \sum lnx_i$. Tyto vstupy jsou úžeji spjaty s optimalizací než norma gradientu Lagrangeovy funkce a metoda by tedy měla být méně náchylná ke konvergenci do sedlového bodu. K důkazu globální konvergence bylo nutné považovat μ za konstantu. Slabá věta o globální konvergenci, jež se autorům podařila dokázat, potom zaručuje existenci posloupnosti, která konverguje k řešení bariérového problému.
Lokální konvergence: Lokální superlineární konvergence pro metodu vnitřního bodu byla v [4] dokázána s použitím korekčních kroků druhého řádu. Stefan Ulbrich v [14] dokázal lokální superlineární konvergenci pro SQP-metodu s použitím Lagrangeovy funkce jako jednoho vstupu filtru.

2 Řešení nelineárních soustav

Jak metoda nehladkých rovnic tak metoda vnitřního bodu vedou na řešení soustav nelineárních rovnic vzniklých z Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek pro extrém.

Tyto rovnice

$$F(x) = 0 \tag{2.1}$$

budeme řešit Newtonovou metodou

$$F'(x_k)d_k = -F(x_k) \tag{2.2}$$

V každé iteraci tak musíme řešit soustavu lineárních rovnic. Jak ukážeme v dalším textu, dá se pro obě dvě metody tato soustava symetrizovat. Protože se v této práci zabýváme rozsáhlými řídkými problémy, bude vhodné použít předpodmíněnou metodu sdružených gradientů, jak je popsána v [1]. Jednou z výhod použití iterační metody je možnost řešit soustavu s malou přesností, pokud se daná iterace nenachází blízko řešení (2.2).
V dalším textu ukážeme, že systém (2.2) lze přepsat následovně:

$$K\bar{d} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A} \\ \hat{A}^T & -\hat{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \bar{b}, \tag{2.3}$$

používáme předpodmiňovač:

$$C = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{A} \\ \hat{A}^T & -\hat{M} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

kde $\hat{D}$ je diagonální pozitivně definitní matice odvozená z diagonály $\hat{G}$. Navíc budeme požadovat aby platilo $\lambda_{\min}(Z^T \hat{D} Z) > \varepsilon$. Předpokládejme, že C je invertibilní. Potom

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{Q} \\ \hat{Q}^T & -(\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M})^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Přičemž $\hat{P} = \hat{D}^{-1} - \hat{D}^{-1}\hat{A}(\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M})^{-1} \hat{A}^T \hat{D}^{-1}$, $\hat{Q} = \hat{D}^{-1}\hat{A}(\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M})^{-1}$. Tento předpodmiňovač má důležitou vlastnost. Takto předpodmíněná metoda sdružených gradientů může být efektivně použita i když je matice soustavy 2.3 indefinitní. Tato skutečnost plyne z tří vět níže, které jsou dokázány v [6] (omezujeme se na případy, kdy je matice $\hat{G} - \hat{D}$ regulární, což je obvyklá situace, ale také určitým způsobem nejhorší případ, viz [11]). Nyní můžeme popsat algoritmus předpodmíněné metody sdružených gradientů
Algoritmus PCG

d - dáno, $\qquad \hat{d} := 0,$
$\widetilde{r} := b - \hat{G}d - \hat{A}\hat{d}, \quad \hat{r} := \hat{b} - \hat{A}^T d + \hat{M}\hat{d},$
$\beta := 0,$

dokud $\|\widetilde{r}\| > \omega\|b\|$ nebo $\|\hat{r}\|$ nevyhovuje (viz definice 3.2 a 4.1) **prováděj**

$\hat{t} := (\hat{A}^T\hat{D}^{-1}\hat{A} + \hat{M})^{-1}(\hat{A}^T\hat{D}^{-1}\widetilde{r} - \hat{r}),$
$t := \hat{D}^{-1}(\widetilde{r} - \hat{A}\hat{t}),$
$\gamma := \widetilde{r}^T t + \hat{r}^T\hat{t}, \qquad \beta := \beta\gamma,$
$p := t + \beta p, \qquad \hat{p} := \hat{t} + \beta\hat{p},$
$q := \hat{G}p + \hat{A}\hat{p}, \qquad \hat{q} := \hat{A}^T p - \hat{M}\hat{p},$
$\alpha := p^T q + \hat{p}^T\hat{q}, \qquad \alpha := \gamma/\alpha,$
$d := d + \alpha p, \qquad \hat{d} := \hat{d} + \alpha\hat{p},$
$\widetilde{r} := \widetilde{r} - \alpha q, \qquad \hat{r} := \hat{r} - \alpha\hat{q},$
$\beta := 1/\gamma$

Na tomto místě nemůžeme stanovit požadavky na dostatečnou přesnost úplně. Omezení na $\|\hat{r}\|$ budeme znát až po odvození příslušných soustav pro metodu nehladkých rovnic a metodu vnitřního bodu. Odkazujeme tedy čtenáře na definice 3.2 a 4.1. Parametr ω určuje přesnost vnitřní iterace. Pro zajištění globální konvergence je třeba, aby platilo $0 < \omega < \overline{\omega} < 1$. Další podmínky na ω budeme formulovat později, kde to bude třeba k důkazu superlineární konvergence.
Definujme ještě:

Definice 2.1

$$\omega_k := \frac{\|F'(z_k)d_k - F(z_k)\|}{\|F(z_k)\|}$$
$$r = F'(z_k)d_k - F(z_k)$$

Věta 1 *Uvažujme předpodmiňovač C aplikovaný na soustavu $K\bar{d} = \bar{b}$ a předpokládejme, že $\hat{G} - \hat{D}$ je regulární. Potom matice KC^{-1} má nejméně $\hat{m}_I + 2m_E$ vlastních čísel rovných 1, ale existuje nejvýše $\hat{m}_I + m_E$ lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k těmto vlastním číslům. Ostatní vlastní čísla matice KC^{-1} jsou vlastními čísly matice $Z_E^T\tilde{G}Z_E(Z_E^T\tilde{D}Z_E)^{-1}$, kde $[Z_E, A_E]$ je regulární čtvercová matice, $Z_E^T A_E = 0$, $Z_E^T Z_E = I$ a kde $\tilde{G} = \hat{G} + \hat{A}_I\hat{M}_I^{-1}\hat{A}_I^T$ a $\tilde{D} = \hat{D} + \hat{A}_I\hat{M}_I^{-1}\hat{A}_I^T$. Pokud $Z_E^T\tilde{G}Z_E$ je pozitivně definitní, potom jsou všechna vlastní čísla kladná.*

Věta 2 *Uvažujme předpodmiňovač C aplikovaný na soustavu $K\bar{d} = \bar{b}$ a předpokládejme, že $\hat{G} - \hat{D}$ je regulární. Potom dimenze Krylovova podprostoru $\mathcal{K}$ definovaného maticí KC^{-1} a vektorem $\bar{r} \in R^{n+\hat{m}}$, kde $\hat{m} = \hat{m}_I + m_E$, je nejvýše* $\min(n+1, n - m_E + 2)$.

Věta 3 *Uvažujme předpodmiňovač C aplikovaný na soustavu $K\bar{d} = \bar{b}$. Předpokládejme, že počáteční $\bar{d}$ je volen tak, že $\hat{r} = 0$. Nechť matice $Z_E^T \tilde{G} Z_E$ je pozitivně definitní. Potom:*

(a) Vektor d^* (první část vektoru $\bar{d}^*$ jenž řeší $K\bar{d} = \bar{b}$) je nalezen po nejvýše $n - m_E$ iteracích.

(b) Algoritmus neselže dokud nenajde d^*.

(c) Chyba $\|d - d^*\|$ konverguje k nule aspoň R-lineárně s koeficientem

$$\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1},$$

kde κ je číslo podmíněnosti matice $Z_E^T \tilde{G} Z_E (Z_E^T \tilde{D} Z_E)^{-1}$.

(d) Pokud $d = d^*$, potom také $\hat{d}_I = \hat{d}_I^*$ a d_E^* lze určit vztahem

$$d_E^* = d_E + (A_E^T \tilde{D}^{-1} A_E)^{-1} A_E^T \tilde{D}^{-1} r.$$

Věta 3 předpokládá, že počáteční $\bar{d}$ je volen tak, že $\hat{r} = 0$ na začátku algoritmu. Podle rovnice (2.3) je tato podmínka splněna pokud $\hat{d} = 0$ a

$$d = \hat{D}^{-1} \hat{A} (\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{b}.$$

Matice $(\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M})^{-1}$ použitá v Algoritmu PCG není počítána. Místo toho je použita řídká Gill-Murrayova [12] dekompozice (úplná nebo neúplná). Bohužel, matice $\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M}$ může být hustá pokud matice $\hat{A}$ má husté řádky. Abychom se tomuto problému vyhnuli, předpokládáme (bez újmy na obecnosti), že $\hat{A}^T = [\hat{A}_s^T, \hat{A}_d^T]$ a $\hat{D} = \mathrm{diag}(\hat{D}_s, \hat{D}_d)$, kde $\hat{M}_s = \hat{A}_s^T \hat{D}_s^{-1} \hat{A}_s + \hat{M}$ je řídká a $\hat{A}_d$ se stává z hustých řádek. Potom

$$(\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M})^{-1} = (\hat{M}_s + \hat{A}_d^T \hat{D}_d^{-1} \hat{A}_d)^{-1} = \hat{M}_s^{-1} - \hat{M}_s^{-1} \hat{A}_d^T \hat{M}_d^{-1} \hat{A}_d \hat{M}_s^{-1},$$

kde

$$\hat{M}_d = \hat{D}_d + \hat{A}_d \hat{M}_s^{-1} \hat{A}_d^T$$

je hustá matice (s nízkou dimenzí). Na místo invertování matice $\hat{M}_s$ je znovu použita řídká Gill-Murrayova dekompozice. Poznamenejme, že tento přístup není zcela spolehlivý, jelikož $\hat{A}_s^T \hat{D}_s^{-1} \hat{A}_s + \hat{M}$ může být singulární dokonce i pokud $\hat{A}^T \hat{D}^{-1} \hat{A} + \hat{M}$ je regulární. V tomto případě může Gill-Murrayova dekompozice změnit matici $\hat{A}_s^T \hat{D}_s^{-1} \hat{A}_s + \hat{M}$ natolik, významně, že zničí dobré vlastnosti metody. Nicméně v tomto případě můžeme užít Bunch-Parlettovu dekompozici matice C.

3 Metoda nehladkých rovnic

3.1 Úvod

V této kapitole uvažujeme obecný problém nelineárního programování:
(NP): Najít minimum funkce $f(x)$ na množině dané omezeními $c_I(x) \le 0$ a $c_E(x) = 0$, kde $f : R^n \to R$, $c_I : R^n \to R^{m_I}$ a $c_E : R^n \to R^{m_E}$ přičemž $I = \{1, ..., m_I\}$, $E = \{m_I + 1, ..., m_I + m_E\}$.

Nutné Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky pro řešení problému (NP) (pokud jsou gradienty aktivních omezení v řešení lineárně nezávislé) lze zapsat následujícím způsobem:

$$
\begin{array}{rcl}
g(x,u) & = & 0, \\
c_I(x) & \le & 0, \quad u_I \ge 0, \quad U_I C_I(x) e = 0, \\
c_E(x) & = & 0,
\end{array}
\tag{3.1}
$$

kde

$$g(x,u) = \nabla f(x) + A_I(x) u_I + A_E(x) u_E,$$

a $A_I(x) = [\nabla c_i(x) : i \in I]$, $A_E(x) = [\nabla c_i(x) : i \in E]$; $u_I = [u_i(x) : i \in I]^T$, $u_E = [u_i(x) : i \in E]^T$ jsou vektory Lagrangeových multiplikátorů, $U_i = diag(u_i : i \in I)$, $C_I(x) = diag(c_i(x) : i \in I)$ a e je vektor s jednotkovými složkami.
Druhou sadu podmínek v (3.1), tak zvané podmínky komplementarity, lze přepsat pomocí Fischer-Burmeisterovy funkce $\psi(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a+b)$, která je nulová tehdy a jen tehdy, když $a \ge 0$, $b \ge 0$ a $ab = 0$. Podmínky komplementarity jsou tedy splněny právě tehdy, když $\psi(u_i, -c_i(x)) = 0$, $i \in I$ a soustava (3.1) může být nahrazena nelineárním systémem

$$
\begin{array}{r}
g(x,u) = 0, \\
\psi_I(u_I, -c_I(x)) = 0, \\
c_E(x) = 0,
\end{array}
\tag{3.2}
$$

kde $\psi_I(u_I, -c_I(x)) = [\psi(u_i, -c_i(x)) : i \in I]^T$.
Fischer-Burmeisterova funkce $\psi(a,b)$ je spojitě diferencovatelná pokud $|a| + |b| \ne 0$ a polohladká pro $|a| + |b| = 0$. Navíc funkce $\psi^2(a,b)$ je spojitě diferencovatelná všude. Proto (3.2) je systém polohladkých rovnic, který může být řešen Newtonovou metodou [2].
V dalším budeme předpokládat platnost podmínky

$$|c_i(x)| + |u_i| \ge \varepsilon^* > 0. \tag{3.3}$$

Spočtěme gradient Fischer-Burmeisterovy funkce

$$\nabla\psi(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1 \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

a označme $r(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$
Linearizováním systému (3.2) získáme krok Newtonovy metody

$$\begin{bmatrix} G & A_I & A_E \\ (R_I + C_I)R^{-1}A_I^T & -(R_I - C_I)R_I^{-1} & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta u_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g \\ \psi_I \\ c_E \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

kde $g = g(x,u)$, $G = G(x,u) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i\in I} u_i \nabla^2 c_i(x) + \sum_{i\in E} u_i \nabla^2 c_i(x)$, $A_I = A_I(x)$, $A_E = A_E(x)$, $C_I = C_I(x)$, $U_I = U_I(x)$, $R_I = diag(r(u_i, -c_i(x)) : i \in I)$, $g = g(x,u)$, $\psi_I = \psi(u_I, -c_I(x)$ a $c_E = c_E(x)$. Lineární systém (3.5) není vhodný pro řešení metodou sdružených gradientů, protože je nesymetrický a může mít nevhodné diagonální elementy. V kapitole 3.2 proto zkonstruujeme ekvivalentní systém, který tyto nevýhody nemá.
Algoritmus metody nehladkých rovnic se dá zhruba popsat následovně. Pro dané vektory $x \in R^n$, $u_I \in R^{m_I}$, $u_E \in R^{m_E}$ určíme směrové vektory Δx, Δu_I, Δu_E řešením soustavy lineárních rovnic ekvivalentní s 3.5. Potom zvolíme délku kroku $\alpha \in (0,1]$ a položíme $x := x + \alpha\Delta x$, $u_I := u_I + \alpha\Delta u_I$, $u_E := u_E + \alpha\Delta u_E$. Jednotlivé části algoritmu budou popsány v dalším textu.

3.2 Určení směrového vektoru

Definice 3.1 *Nechť $0 < \varepsilon_0 < 1/2$. Řekneme, že omezení s indexem $i \in I$ je aktivní, pokud platí*

$$-\partial\psi_i/\partial u_i \le \varepsilon_0 \partial\psi_i/\partial c_i, \tag{3.6}$$

což můžeme přepsat jako

$$r_i - u_i \le \varepsilon_0(r_i + c_i). \tag{3.7}$$

Označme aktivní hodnoty $\hat{u}_i$, $\hat{c}_i$, $\hat{r}_i$, $\hat{\psi}_i$ a neaktivní hodnoty $\check{u}_i$, $\check{c}_i$, $\check{r}_i$, $\check{\psi}_i$. Přímou eliminací rovnic odpovídajícím neaktivním hodnotám z (3.5) a vynásobením druhého řádku

$\hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}$ obdržíme

$$\Delta \check{u}_I = \check{M}_I^{-1}[(\check{R}_I(\check{R}_I + \check{C}_I)^{-1}\check{\psi}_I + \check{A}_I^T \Delta x] \tag{3.8}$$

kde $\check{M}_I = (\check{R}_I + \check{C}_I)^{-1}(\check{R}_I - \check{U}_I)$ a

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{M}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\hat{\psi}_I \\ c_E \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

kde $\hat{M}_I = (\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}(\hat{R}_I - \hat{U}_I)$ a

$$\hat{G} = G + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{A}_I^T,$$

$$\hat{g} = g + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{R}_I(\check{R}_I + \check{C}_I)^{-1}\check{\psi}_I.$$

Podmínka (3.6) zaručuje, že matice $\hat{M}_I$ a $\check{M}_I^{-1}$ jsou omezené. Potřebujeme ještě dokázat omezenost výrazu $\hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}$.

Tvrzení 3.1 *Nechť platí podmínka (3.3), potom jsou výrazy* $\hat{R}_I(\hat{R}_I+\hat{C}_I)^{-1}$ *a* $\check{R}_I(\check{R}_I-\check{U}_I)^{-1}$ *omezené.*

Důkaz: Podle (3.4) máme

$$(1 - \partial\psi_i/\partial c_i)^2 + (1 + \partial\psi_i/\partial u_i)^2 = \frac{c_i^2 + u_i^2}{r_i^2} = 1 \tag{3.10}$$

tedy $\partial\psi_i/\partial c_i$ a $-\partial\psi_i/\partial u_i$ leží na jednotkovém kruhu se středem v [1,1]. Pokud je omezení s indexem $i \in I$ aktivní, potom podle (3.6) leží pod přímkou definovanou (3.6) (viz obr 1). Označme (x_1, y_1) a (x_2, y_2) průsečíky kruhu (3.10) s touto přímkou ($x_1 < x_2$). Potom $y = \varepsilon_0 x$ a

$$(1 + \varepsilon_0^2)x^2 - 2(1 + \varepsilon_0)x + 1 = 0.$$

Pokud je omezení s indexem $i \in I$ aktivní, potom

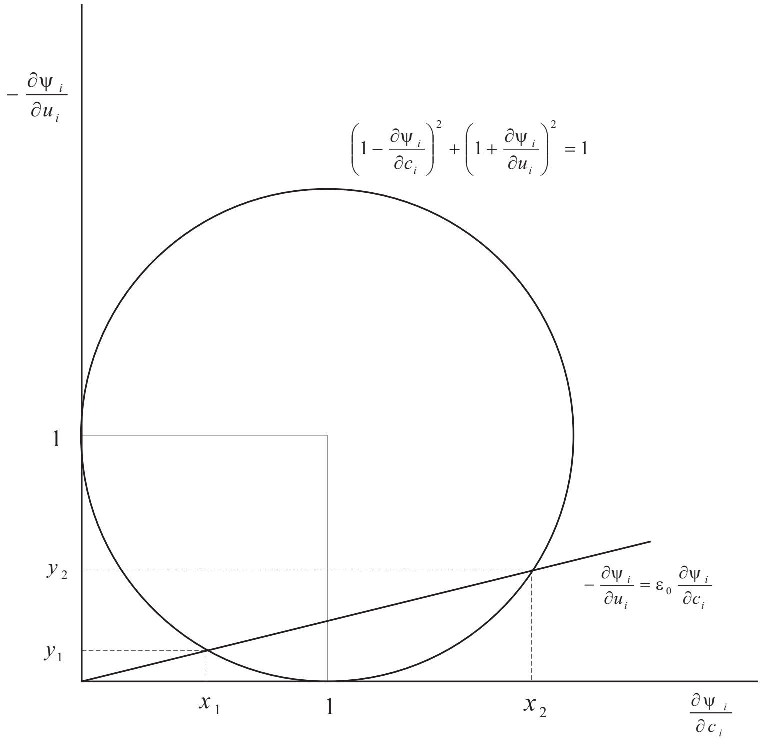
$$(\frac{r_i}{r_i + c_i})^{-1} = \frac{\partial\psi_i}{\partial c_i} \geq x_1 = \frac{1 + \varepsilon_0 - \sqrt{2\varepsilon_0}}{1 + \varepsilon_0^2} > \frac{4}{5}\varepsilon_0,$$

podle $\varepsilon_0 < 1/2$.

Pokud je omezení s indexem $i \in I$ neaktivní, potom

$$(\frac{r_i}{r_i - u_i})^{-1} = -\frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \geq y_1 = \varepsilon_0 \frac{1 + \varepsilon_0 - \sqrt{2\varepsilon_0}}{1 + \varepsilon_0^2} > \frac{4}{5}\varepsilon_0^2.$$

□



obr.1

Nyní dokážeme důležité tvrzení:

Věta 4 *Nechť dvojice $x^* \in R^n$ a $u_I^* \in R^{m_I}$ řeší rovnici $\psi(x, u_I) = 0$, nechť navíc u_I^* je konečné a na okolí x^* je $c(x)$ omezené, Lipschitzovsky spojitě diferencovatelné, $\lim_{x \to x^*} c(x)$ existuje a nechť platí podmínka (3.3). Potom $\forall \varepsilon > 0$ existují okolí $N \subset R^n$ a $M \subset R^{m_I}$ bodu x^* a bodu u_I^* tak, že kdykoliv $x \in N$ a $u_I \in M$ platí: $|\hat{M}_I| \leq \varepsilon$, $|\check{M}_I^{-1}| \leq \varepsilon$, $|\psi_I| \leq \varepsilon$ a $|\check{M}_I^{-1} \check{R}_I (\check{R}_I + \check{C}_I)^{-1} \check{\psi}_I| \leq \varepsilon$ (myšleno po složkách).*

Důkaz: (i) a) Nechť omezení s indexem $i \in I$ je aktivní potom podle (3.3) platí $\lim_{x \to x^*} c_i(x^*) = 0$ a $u_i^* > \varepsilon^*$ podle předpokladů tedy existuje okolí V bodu (x^*, u_I^*) tak, že $|c_i(x)| \leq \frac{\varepsilon^*}{4}$ a

$u_i \geq \frac{\varepsilon^*}{4}$ kdykoliv $(x, u_I) \in V$.
b) Nechť $i \in I$ je neaktivní potom podle (3.3) platí $\lim\limits_{x \to x^*} - c_i(x^*) > \varepsilon^*$ a $u_i^* = 0$ podle předpokladů tedy existuje okolí V bodu (x^*, u_I^*) tak, že $-c_i(x) \geq \frac{\varepsilon^*}{4}$ a $|u_i| \leq \frac{\varepsilon^*}{4}$ kdykoliv $(x, u_I) \in V$.
Nechť nadále $(x, u_I) \in V$
(ii) Vezměme $i \in I$ aktivní a dokažme tvrzení pro $\hat{M}_I$, tedy chceme dokázat, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje okolí bodu (x_i^*, u_i^*), kde $\frac{r_i - u_i}{r_i + c_i} \leq \varepsilon$: Předně předpokládejme, že výraz $r_i + c_i$ není odražený od nuly, tedy $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists (x_i, u_i) \in V$ tak, že $0 \leq r_i + c_i < \varepsilon_1$ potom ale

$$(\frac{\varepsilon^*}{4})^2 < u_i^2 < \varepsilon_1^2 \ - 2\varepsilon_1 c_i < \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \frac{\varepsilon^*}{4}$$

a to je spor, neboli existuje $\underline{\varepsilon} > 0$ $|r_i + c_i| > \underline{\varepsilon}$.
Dále $\forall \varepsilon > 0$ existuje okolí bodu (x^*, u_I^*), kde $0 \leq r_i - u_i < \varepsilon_2 = \varepsilon * \underline{\varepsilon}$. Toto platí pokud

$$c_i^2 \leq \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon^*}{2}\varepsilon_2$$

Existuje tedy okolí na kterém $\hat{M}_I \leq \varepsilon$. Důkaz pro $\check{M}_I^{-1}$ je analogický podle (i) b).
Zbytek tvrzení plyne ze spojitosti funkce $\psi(u_I, -c(x))$ a z Tvrzení (3.1). □

Definice 3.2 *Řešme soustavu (3.9) přibližně:*

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{M}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\hat{\psi}_I \\ c_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ \hat{r}_I \\ r_E \end{bmatrix},$$

Řekneme, že $\hat{r} = \begin{bmatrix} \hat{r}_I \\ r_E \end{bmatrix}$ *vyhovuje, pokud platí*

$$\|\hat{r}\| \leq \omega \left\| \begin{matrix} \hat{g} \\ \hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\hat{\psi}_I \\ c_E \end{matrix} \right\|$$

a zároveň

$$\left\| \begin{matrix} \hat{R}_I^{-1}(\hat{R}_I + \hat{C}_I)\hat{r}_I \\ r_E \end{matrix} \right\| \leq \omega \left\| \begin{matrix} \hat{\psi}_I \\ c_E \end{matrix} \right\|$$

3.3 Volba délky kroku

Definice 3.3 *Nechť* $z = (x, u_I, u_E)$
V dalším textu bude d *resp.* d_k *označovat řešení soustavy (3.5) resp. její řešení v iteraci* k.

Jako kritérium pro volbu délky kroku budeme používat ideu filtru, jak je popsána v kapitole 1. Nechť $h(z)$ a $\varphi(z)$ jsou funkce, které budou sloužit, jako vstupy filtru.
Nejprve budeme uvažovat přirozenou volbu φ a h.

$$\varphi(z) = \varphi(x) := f(x) \tag{3.11}$$

$$h(z) = h(x, u_I) := \frac{1}{2}\|\psi_I(u_I, -c(x))\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(x)\|^2 \tag{3.12}$$

Definice 3.4 *Řekneme, že bod $\overline{z}$ je přípustný, platí-li $h(\overline{z}) = 0$.*

Podmínka 3.1 *Řekneme, že délka kroku α splňuje podmínku postačující redukce vzhledem k iteraci x_k, pokud splňuje aspoň jednu z následujících nerovností*

$$h(z_k(\alpha)) \leq (1 - \gamma_h)h(z_k) \tag{3.13}$$

$$\varphi(z_k(\alpha)) \leq \varphi(z_k) - \gamma_\varphi h(z_k), \tag{3.14}$$

pro konstanty $\gamma_h, \gamma_\varphi \in (0, 1)$.

Jak jsme se zmínili v kapitole 1 pouze tato podmínka k zajištění globální konvergence nestačí. Posloupnost vyhovující této podmínce může konvergovat k přípustnému nestacionárnímu bodu. Podle [4] zavedeme:

Podmínka 3.2 *Řekneme, že délka kroku α splňuje v iteraci z_k Armijovu podmínku, jestliže platí:*

$$\varphi(z_k + \alpha d_k) - \varphi(z_k) \leq \eta\alpha(\nabla\varphi(z_k))^T d_k, \tag{3.15}$$

pro $\eta \in (0, \frac{1}{2})$.

Podmínka 3.3 *$(-\nabla\varphi(z_k))^T d_k > 0$ a $(-\nabla\varphi(z_k))^T d_k \alpha > \gamma_\varphi h(z_k)^\theta$ pro $\theta > 1$ a zároveň platí Armijova podmínka (3.15)*

V okolí přípustného nestacionárního bodu $\overline{z}$ požadujeme, aby nová iterace vedla k poklesu účelové funkce (a nejen k zlepšení přípustnosti). Tvrzení 3.4 ukáže, že pro iterace z_k z okolí $\overline{z}$ platí $(\nabla\varphi(z_k))^T d_k < -\epsilon$ pro vhodnou volbu φ. Podmínka 3.3 pak platí pro $\alpha > (\gamma_\varphi/\epsilon)h(z_k)^\theta$. Skutečnost, že pravá strana je $o(h(z_k))$ nám umožní dokázat v tvrzení 3.9, že Armijova podmínka bude skutečně splněna v iteraci blízko $\overline{z}$.

Stejně jako v [4] používáme filtr jako zakázaný prostor v polorovině $\{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq 0\}$, tedy jako množinu $\Re_k \subseteq [0,\infty) \times R$, která obsahuje všechny páry (h,φ), jež jsou v dané iteraci zakázány.
Na začátku optimalizace je filtr nastaven jako prázdný $\Re_0 := \emptyset$, nebo pokud chceme, můžeme explicitně požadovat horní závoru na porušení přípustnosti $\Re_0 = \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$. Zde musíme poznamenat, že i když o $h(.)$, hovoříme jako o toleranci porušení přípustnosti, v dalším navrhneme také jinou definici, kde $h(.)$, souvisí i s optimalizačním cílem. Tato definice se však nejeví jako prakticky užitečná, proto se v textu podržíme tradičního názvosloví.

Definice 3.5 *Řekneme, že bod $z_k + \alpha_{k,l} d_k$ je přijatelný pro filtr pokud platí*

$$(h(z_k + \alpha_{k,l} d_k), \varphi(z_k + \alpha_{k,l} d_k)) \notin \Re_k.$$

Budeme psát $(z_k + \alpha_{k,l} d_k) \notin \Re_k$

Fáze obnovení přípustnosti: V situaci, kdy není možné najít žádnou přijatelnou délku kroku, přejde metoda do fáze obnovení přípustnosti, jejímž účelem je najít novou iteraci z_{k+1}, která je přijatelná pro filtr a splňuje podmínku 3.1. Může to být v podstatě jakákoliv iterační metoda pro zmenšení $h(.)$, případně ignorující účelovou funkci.
Protože zajistíme, že přípustný bod nebude přidán do filtru, měla by být tato metoda schopna takový bod z_{k+1} najít.
Nyní je třeba definovat co znamená, že "není možné" najít přípustnou délku kroku. V dalším ukážeme, že platí:

$$h(z_k + \alpha d_k) = h(z_k) - \alpha 2(1-\omega) h(z_k) + O(\alpha^2) \tag{3.16}$$
$$\varphi(z_k + \alpha d_k) = \varphi(z_k) + \alpha \nabla\varphi(z_k)^T d_k + O(\alpha^2) \tag{3.17}$$

Přejdeme tedy do fáze obnovení přípustnosti, pokud nenajdeme přípustnou délku kroku $\alpha > \alpha_{min}$ kde

$\alpha_{min} := min\{\frac{\gamma_h}{2(1-\omega)}, \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k) d_k}, \frac{\gamma_\varphi h(z_k)}{-\nabla\varphi(z_k) d_k}\}$ pokud $-\nabla\varphi(z_k) d_k > 0$
$\alpha_{min} := \gamma_h$ jinak.

Pravidlo 3.1 $\Re_{k+1} := \Re_k \bigcup \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq (1-\gamma_h) h(z_k), \varphi \geq \varphi(z_k) - \gamma_\varphi h(z_k)$

3.4 Algoritmy

3.4.1 Slabá věta o globální konvergenci

Strategie důkazu v této kapitole je převzata z [4].

Algoritmus 1 *Data:* $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h, \varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ *- inicializovaný filtr,* γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2

1. *Inicializace:* $k \leftarrow 0$
2. *Test konvergence: Jestliže* z^k *splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s* z^k*, jako výsledkem.*
3. *Spočti směrový vektor* d_k *z (3.9) a (3.8).*
4. *volba délky kroku -*
   (4.1) nastav $\alpha_{k,0} = 1$, $\alpha_h = 0$ *a* $l \leftarrow 0$
   (4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$ *a* $\alpha_h < \alpha_{min}$*, přejdi na krok 8, pokud* $\alpha_{k,l} < \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k)d_k}$ *nebo* $h(z_k) > \varepsilon_{sml}$ *a* $\alpha_h \geq \alpha_{min}$*, jdi na krok 5 s* α_h*, jinak spočti* $z_k(a_{k,l})$
   (4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$*, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)*
   (4.4) Pokud platí podmínka (3.13) a $\alpha_h = 0$ *nastav* $\alpha_h = \alpha_{k,l}$*, pokud platí Podmínka 3.3 , přejdi na krok 5*
   (4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1\alpha_{k,l}, \tau_2\alpha_{k,l}]$ *a jdi na krok (4.2)*
5. *Akceptuj novou iteraci.*
6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (3.14) ani podmínka 3.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak* $\Re_{k+1} := \Re_k$.
7. $k \leftarrow k + 1$ *Jdi na krok 2.*
8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr a splňující podmínku 3.1, zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

Poznámka 3.1 *Mechanismus filtru zajišťuje, že* $(h(z_k), \varphi(z_k)) \notin \Re_k$ *navíc pravidlo 3.1 dává:* $(\overline{h}, \overline{\varphi}) \notin \Re_k \Rightarrow (h, \varphi) \notin \Re_k$ *pokud* $h \leq \overline{h}$ *a* $\varphi \leq \overline{\varphi}$.

Poznámka 3.2 *Volba délky kroku podle našeho algoritmu sice zajišťuje globální konvergenci, ale v praxi způsobuje prodloužení doby výpočtu. Navrhujeme tedy provádět volbu podle kroku 4 pouze pokud je* $h(z_k)$ *dostatečně malé, tedy pokud platí*

$$h(z_k) \leq \min(h_{mal}, \varepsilon_{mal}\|g(z_k)\|).$$

V opačném případě změňme krok 4 následovně:
(4.1) nastav $\alpha_{k,0} = 1$ *a* $l \leftarrow 0$

(4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8. Jinak spočti $z_k(a_{k,l})$
(4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)
(4.4) Pokud platí podmínka 3.1 nebo 3.3, přejdi na krok 5.
(4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1\alpha_{k,l}, \tau_2\alpha_{k,l}]$ a jdi na krok (4.2)

V dalším textu ukážeme, že metoda podle Algoritmu 1 je globálně konvergentní. Navíc dokážeme, že $h(z_k) \to 0$. Proto h_{mal} není problém. Pokud ovšem změníme krok 4, jak navrhujeme, v případě, že $h(z_k) \geq \varepsilon_{mal}\|g(z_k)\|$ plyne z $h(z_k) \to 0$ slabá věta o globální konvergenci. Následující výsledky tedy nebudou touto poznámkou ovlivněny.

Nejprve zformulujeme předpoklady, za kterých dokážeme konvergenční větu. Označme G_k, A_k matice G a A v bodě z_k

Předpoklady P
Nechť z_k ($z_k = (x_k, u_k)$ $(u := (u_I, u_E))$) je posloupnost generovaná algoritmem 1. Předpokládejme, že fáze obnovení přípustnosti skončí vždy úspěšně a algoritmus neskončí v kroku 2. Dále existuje indexová množina R_P taková, že:

1. Existuje otevřena množina C, tak že $[x_k, x_k(\alpha_{max})] \subseteq C$ pro všechna $k \in R_P$ a $f(.)$, $c(.)$ jsou diferencovatelné a jejich první derivace jsou omezené a Lipschitzovsky spojité na C.
2. $h(.) \leq h_{max}$ na C
3. Nechť $z_{k_j} = (x, u_I, u_E)_{k_j}$ je posloupnost bodů generovaných fází obnovení přípustnosti. Potom existuje $K > 0$ tak, že $|\{u_I, u_E\}_{k_j}| \leq K$ po složkách.
4. Matice soustavy (3.9) je dostatečně regulární ve všech iteracích.
5. Nechť ve všech iteracích platí $|c_i(x)| + |u_i| \geq \varepsilon^* > 0$
6. $\forall x_k$ existuje $\lim\limits_{x \to x_k} c(x)$.
7. Matice G_k jsou stejnoměrně omezené $\forall k \in R_P$.
8. Gradienty aktivních omezení jsou dostatečně lineárně nezávislé $\forall k \in R_P$.
9. Matice G_k jsou stejnoměrně pozitivně definitní na jádru jacobiánu aktivních omezení $\hat{A}_k$ $\forall k \in R_P$. Tedy $\lambda_{min}(Z^T G Z) \geq \varepsilon > 0$, kde Z je ON báze nulového prostoru matice $\hat{A}_k$.
10. Existuje konstanta h_P taková, že $k \in R_P$ kdykoliv $h(z_k) \leq h_P$.

Předpoklady P1 a P7 pouze určují hladkost a omezenost dat. Předpoklad P6 umožňuje použít větu 4. P4 zajišťuje konzistenci soustavy. Pokud budeme používat vhodnou fázi obnovení přípustnosti, tedy takovou, která nevyžaduje regularitu soustavy (3.9) můžeme, v případě, že v kroku 3 je soustava téměř singulární, přejít na krok 8 a předpoklad P4 vypustit - v takovém případě totiž zřejmě postačí předpoklad P8. Nejproblematičtějším se jeví předpoklad P9. Bohužel je nezbytný k zaručení určité spádové vlastnosti nezbytné k důkazu globální konvergence. V dalším textu se pokusíme navrhnout korekce, které zajistí globální konvergenci i bez toho předpokladu. Poznamenejme ještě, že tento předpoklad je užit v [4].

Následující tvrzení poskytuje odhady pro normu řešení Newtonovy soustavy.

Tvrzení 3.2 *Nechť platí předpoklady P. Existují konstanty tak, že pro všechna* $k \in R_P$ *platí:* $\|\Delta x_k\| \le M_x$, $\|(\hat{u}_I + \Delta\hat{u}_I)_k\| \le M_{\hat{I}}$ *a* $\|(u_E + \Delta u_E)_k\| \le M_E$, $\|(\Delta u_I)_k\| < M_{u_I}$. $\|(\Delta u_E)_k\| < M_{u_E}$ *Zejména tedy platí* $\|d_k\| \le M_d$ *pro všechna* $k \in R_P$

Důkaz: Přepišme soustavu (3.9) do následujícího tvaru:

$$(3.18) \qquad \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{M}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\hat{u}_I + \hat{u}_I \\ \Delta u_E + u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{c}_I \\ \hat{c}_I \\ c_E \end{bmatrix},$$

Podle (3.7) a P1 je pravá strana soustavy omezená a podle předpokladu P4 je i řešení omezené.
Označme $u = (u_I, u_E)$. Dále $\exists \widetilde{K} > K > 0$, kde K je konstanta z předpokladu 3, tak, že $|u_k + \Delta u_k| \le \widetilde{K}$ $|u_0| \le \widetilde{K}$. Předpokládejme, že $|u_k| \le \widetilde{K}$ a, že v iteraci k není zavolána fáze obnovení přípustnosti, potom u_{k+1} leží na úsečce $[u_k, u_k + \Delta u_k]$ a tedy $|u_{k+1}| \le \widetilde{K}$. Pokud je v iteraci k zavolána fáze obnovení přípustnosti, máme požadované podle předpokladu 3. A matematická indukce dává výsledek. □

Poznámka 3.3 *Tento postup ukazuje, že není problém zaručit platnost předpokladu P3 pokud jako fázi obnovení přípustnosti použijeme Newtonovu metodu a soustava bude regulární.*

Tvrzení 3.3 *Nechť platí předpoklady P, potom* $h(z_k) \to 0$.

Důkaz: i) Nechť je filtr aktualizován pouze konečně mnohokrát. Potom existuje K, že pro $k > K$ platí:
$\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k) \le -\gamma_h h(z_k)$ nebo
$\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k) \le \eta\alpha(\nabla\varphi(z_k))^T d_k \le -\eta\gamma_\varphi h(z_k)^\theta$ tedy
$\varphi(z_{K+i}) = \varphi(z_K) + \Sigma_{k=K}^{K+i-1}(\varphi(z_{k+1}) - \varphi(x_k)) \le \varphi(z_K) - \Sigma_{k=K}^{K+i-1} min[\gamma_h h(z_k), \gamma_\varphi \eta h(z_k)^\theta]$
Jelikož φ je zdola omezená musí platit požadované.

ii) Nechť je filtr aktualizován pro všechna $k > K$:
Podle předpokladu P1 existují takové konstanty φ_{min}, φ_{max}, h_{max}, že všechny iterace padnou do množiny $A_0 := (0, h_{max}) \times (\varphi_{min} - \gamma_\varphi h_{max}, \varphi_{max})$.

Předpokládejme nyní pro spor, že existuje nekonečná posloupnost k_j na které platí $h_{k_j} \geq \epsilon > 0$.
V každé iteraci je pár (h_{k_j}, φ_{k_j}) příslušný k bodu z_{k_j} přidán do filtru. To znamená, že žádný další bod již nemůže být později přidán do filtru v oblasti $((1-\gamma_h)h_{k_j}, h_{k_j}) \times (\varphi_{k_j} - \gamma_\varphi h_{k_j}, \varphi_{k_j})$, tato oblast má však obsah nejméně $\gamma_h \gamma_\varphi \epsilon^2$. To znamená, že oblast A_0 bude pokryta nejpozději po $\lceil area(A_0)/(\gamma_h \gamma_\varphi \epsilon^2) \rceil$ krocích. A to je spor s nekonečností posloupnosti.

iii)Definujme: A je množina přirozených čísel taková, že pro $k \in A$ je iterace z_k přidána do filtru. Zbývá dokázat případ, že existují k_1, $k_2 > K$, tak že $k_1 \in A$ a $k_2 \notin A$.
Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $limsup_k h(z_k) = M > 0$. Vytvořme nyní dvě podposloupnosti z_{k_i} a z_{l_i} z z_k následovně:

(1) $i \leftarrow 0$ a $k_{-i} = -1$

(2) Vezměme $k_i > k_{i-1}$ tak, že $h(z_{k_i}) \geq M/2$ a $k_i \notin A$. Takové k_i existuje, jinak je to případ ii).

(3) Vezměme $l_i := min\{l \in A : l > k_i\}$. Takové l_i existuje, jinak je to případ i).

(4) $i \leftarrow i+1$ a jdi na krok 2.

Jelikož všechna $k = k_i, ..., l_i - 1 \notin A$

$$\varphi(z_{l_i}) \leq \varphi(z_{(k_i+1)}) \leq \varphi(z_{k_i}) - min[\gamma_h M/2, \eta\gamma_\varphi [M/2]^\theta]$$

Musí tedy pro všechna K existovat $i \geq K$ tak, že $\varphi(z_{k_{i+1}}) \geq \varphi(z_{l_i})$ protože jinak by $\varphi(z_{k_i}) \rightarrow -\infty$. Existuje tedy vybraná posloupnost indexů i_j z i tak, že
$\varphi(z_{k_{(i_j+1)}}) \geq \varphi(z_{l_{i_j}})$
Jelikož $z_{k_{(i_j+1)}} \notin \Re_{k_{(i_j+1)}} \supseteq \Re_{l_{i_j}}$ a $l_{i_j} \in A$, platí podle pravidla 3.1:
$h(z_{k_{(i_j+1)}}) \leq (1-\gamma_h) h(z_{l_{i_j}})$.
Protože $l_{i_j} \in A$ pro všechna j, vztahuje se na posloupnost $z_{l_{i_j}}$ případ ii) a tím pádem $lim_j h(z_{k_{(i_j+1)}}) \leq h(z_{k_{i_j}}) \rightarrow 0$, což je spor.
□
Pro teoretickou analýzu konvergence je vhodné definovat nějakou míru stacionarity. Definujme :

$$\chi(z_k) := \|\Delta x_k\|. \tag{3.19}$$

Poznamenejme, že nyní se zabýváme konkrétním tvarem φ a h, jak jsou definovány v (3.11) a (3.12).

Tvrzení 3.4 *Nechť platí předpoklady P. Nechť*

$$d = (\Delta x^T, \Delta s^T, \Delta u_I^T, \Delta u_E^T)^T$$

je přibližným řešením soustavy (3.9):

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{M}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\hat{\psi}_I \\ c_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ \hat{r}_I \\ r_E \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

označme

$$h(\alpha) := h(z + \alpha d)$$
$$\varphi(\alpha) := \varphi(z + \alpha d)$$

Nechť je soustava řešena s takovou přesností, že

$$-\Delta x^T r_x < \omega' \Delta x^T \hat{G} \Delta x$$

pokud $\Delta x^T \hat{G} \Delta x > 0$ *pro nějaké* $\omega' \in (0, 1)$. *Potom:*

- $h'(0) \leq -2(1 - \omega)h(0)$

- $\chi(z_k)$ *je dobrou mírou stacionarity. Navíc nechť* $\overline{z}$ *je přípustný nestacionární bod potom existuje okolí* $V_{\overline{z}}$ *a konstanta* $\epsilon_2 > 0$ *tak, že kdykoliv* $z_k \in V$ *a* $\chi(z_k) > \epsilon > 0$ *nezávislé na* k *platí v bodě* z_k*:*
  $\varphi'(0) \leq -\epsilon_2$.

Důkaz:
(i)Diferencováním $h(\alpha)$ získáme:

$$h'(0) = \psi_I^T((R_I + C_I)R_I^{-1}A_I^T \Delta x - (R_I - U_I)R_I^{-1}\Delta u_I) + c_E^T A_E^T \Delta x \tag{3.21}$$

a použitím (3.8) a (3.9) dostáváme

$$h'(0) = -\|\psi_I\|^2 - \|c_E\|^2 + \hat{\psi}_I^T(\hat{R}_I + \hat{C}_I)\hat{R}_I^{-1}\hat{r}_I + c_E^T r_E \leq -2(1 - \omega)h(0),$$

protože algoritmus metody sdružených gradientů a Schwarzova nerovnost dává:

$$\hat{\psi}_I^T(\hat{R}_I + \hat{C}_I)\hat{R}_I^{-1}\hat{r}_I + c_E^T r_E \leq \omega(\|\hat{\psi}_I\|^2 + \|c_E\|^2)$$

(ii)Přepíšeme soustavu (3.9) do vhodnějšího tvaru, přičemž $\hat{A} = (\hat{A}_I, A_E)$, $\hat{c}^T = (\hat{c}_I^T, c_E^T)$ a

$$M = \begin{bmatrix} \hat{M}_I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A} \\ \hat{A}^T & -\hat{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \hat{u} + \Delta\hat{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla f + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{c}_I \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ \hat{r} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

Předpokládejme, že platí $h(z) \leq h_P$. Vezmeme-li první řádek soustavy (3.22), máme:

$$\Delta x^T[\hat{G}\Delta x + \hat{A}(\hat{u} + \Delta\hat{u})] = \Delta x^T[\nabla f + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{c}_I] + \Delta x^T r_x,$$

Předpokládejme nejprve, že existuje okolí $\overline{z}$ a konstanta $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tak, že $\Delta x^T \hat{G} \Delta x > \widetilde{\varepsilon}$ pro všechny iterace v tomto okolí.
Potom postačí dokázat, že
$\Delta x^T[\hat{A}(\hat{u} + \Delta\hat{u}) - \check{A}_I \check{M}_I \check{c}_I] \to 0$, $z \to \overline{z}$ protože potom

$$-\Delta x^T \nabla f \to \Delta x^T \hat{G} \Delta x + \Delta x r_x > (1 - \omega')\widetilde{\varepsilon}$$

(1) $\check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{c}_I \to 0$ podle P1 a věty 4
(2)

$$\|\Delta x^T \hat{A}\| = \| - \hat{c} + \hat{M}(\hat{u} + \Delta\hat{u}) + \hat{r}\| \leq \|\hat{c}\| + \omega \|\hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\| \|\psi_I\| + \|\hat{M}(\hat{u} + \Delta\hat{u})\|$$

Podle věty 4 $\hat{M} \to 0$ a zřejmě $\hat{c} \to 0$ a $\psi_I \to$ kdykoliv $z \to \overline{z}$, což spolu s tvrzením 3.2 a tvrzením 3.1 dává $\Delta x^T \hat{A}(\hat{u} + \Delta\hat{u}) \to 0$.
Nyní zbývá dokázat, že $\Delta x^T \hat{G} \Delta x > \widetilde{\varepsilon}$ na okolí $\overline{z}$.
Předně

$$\Delta x^T \hat{G} \Delta x = \Delta x^T G \Delta x + \Delta x^T \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{A}_I \Delta x,$$

jelikož $\check{M}_I^{-1} \to 0$ $z \to \overline{z}$, můžeme se omezit na vyšetření $\Delta x^T G \Delta x$.
Nechť $[Z, Y]$ tvoří bázi R^n, přičemž Z tvoří ON bázi jádra matice $\hat{A}^T$.
Pišme $\Delta x = Zp + Yq$. Protože $\hat{A}^T \Delta x = \hat{A}^T Y q \to 0$ a matice $\hat{A}^T Y$ je podle P8 regulární a tedy $q \to 0$ $z \to \overline{z}$.
Máme tedy $\Delta x^T \hat{G} \Delta x \to pZ^T GZp$, jelikož $\|\Delta x\| \geq \epsilon$ a $q \to 0$, existuje konstanta $\varepsilon^* > 0$ a okolí $\overline{z}$, kde $\|p\| \geq \varepsilon^*$.
Protože potom $p^T Z^T G Z p \geq c_1 \varepsilon^* = \widetilde{\varepsilon}$, pro nějakou konstantu $c_1 > 0$ podle předpokladu P9.Což jsme chtěli dokázat.

Zbývá ukázat, že $\chi(z) = \|\Delta x\|$ je dobrou mírou stacionarity.
Vezměme posloupnost $z_k \to z^*$, z^* přípustné. Nechť nyní $\|\Delta x\| \to 0$ $z_k \to z^*$.
Přenásobíme-li první řádek soustavy (3.22) Z^T, potom máme:

$$Z^T \hat{G} Z p + Z^T \hat{G} Y q = Z^T(\nabla f + \check{A}_I \check{M}_I^{-1} \check{c}_I),$$

podle úvahy výše existuje okolí přípustného bodu z^*, kde je $Z^T\hat{G}Z$ pozitivně definitní, protože dále $q \to 0$, $\check{M}_I^{-1} \to 0$ když $z_k \to z^*$,

$$\|\Delta x\| \to 0 \Leftrightarrow p \to 0 \Leftrightarrow Z^T\nabla f \to 0,$$

což je dobře známá podmínka optimality. □

Tvrzení 3.5 *Nechť platí předpoklady P. Potom existují konstanty $C_h, C_\varphi > 0$ tak ,že pro všechna $k \in R_P$ platí*

$$h(z_k + \alpha d_k) - (1 - 2\alpha(1-\omega))h(z_k) \leq C_h\alpha^2\|d_k\|^2 \tag{3.23}$$

$$\varphi(z_k + \alpha d_k) - \varphi(z_k) - \alpha\nabla\varphi(z_k)^T d_k \leq C_\varphi\alpha^2\|d_k\|^2 \tag{3.24}$$

Důkaz: Tvrzení je aplikací tvrzení 3.4 a věty o střední hodnotě. □

Tvrzení 3.6 *Nechť platí předpoklady P. Potom $H_k := min\{h : (h,\varphi) \in \Re_k\} > 0\ \forall k$*

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí: Pro $k = 0$ výrok zřejmě platí. Předpokládejme, že výrok platí pro nějaké k. Potom pokud $h(z_k) > 0$ a filtr je aktualizován v iteraci k pak $H_{k+1} > 0$ podle pravidla 3.1, protože $\gamma_h \in (0,1)$. Na druhou stranu, pokud $h(z_k) = 0$ pak podle Tvrzení 3.4 a podle volby α_{min} mohl být krok akceptován pouze pokud splňoval podmínku 3.3, a filtr tedy není aktualizován, tedy $H_{k+1} = H_k > 0$. □

Tvrzení 3.7 *Nechť platí předpoklady P. Nechť z_{k_i} $k_i \in R_P$ je podposloupnost na níž platí $(\nabla\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i} < -\epsilon_2$, kde $\epsilon_2 > 0$ nezávisí na i. Potom existuje konstanta $\overline{\alpha} > 0$ tak, že pro všechna k_i a $\alpha < \overline{\alpha}$ platí:*

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) \leq \eta\alpha\nabla(\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i} \tag{3.25}$$

.

Důkaz: Platí:

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) - \alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq C_\varphi\alpha^2\|d_{k_i}\|^2 \leq \alpha(1-\eta)\epsilon_2 < -\alpha(1-\eta)\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i},$$

pro $\alpha \leq \{\frac{(1-\eta)\epsilon_2}{C_\varphi M_d^2}\}$ □

Tvrzení 3.8 *Nechť platí předpoklady P. Nechť z_{k_i} $k_i \in R_P$ je podposloupnost na níž platí $(\nabla\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i} < -\epsilon_2$, $\epsilon_2 > 0$ nezávisí na i. Potom existují konstanty $c_5, c_6 > 0$ tak, že: $(h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}), \varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$ pro všechna $\alpha \leq min\{c_5, c_6 h(z_{k_i})\}$.*

Důkaz: Nechť $c_5 := \epsilon_2/(M_d^2 C_\varphi)$ a $c_6 := 2(1-\omega)/(M_d^2 C_h)$.
Mechanismus filtru zajišťuje (viz poznámka 3.1), že

$$(h(z_{k_i}), \varphi(z_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$$

pro $\alpha \leq c_5$ máme $\alpha^2 \leq \frac{\alpha\epsilon_2}{M_d^2 C_\varphi} \leq \frac{-\alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}}{C_\varphi \|d_{k_i}\|^2}$, nebo ekvivalentně

$$\alpha\nabla\varphi(z_k)^T d_k + C_\varphi \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \leq 0$$

a tedy podle (3.24)

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \leq \varphi(z_{k_i}).$$

Podobně pro $\alpha \leq c_6 h(z_{k_i}) \leq \frac{2(1-\omega)h(z_{k_i})}{\|d_{k_i}\|^2 C_h}$ máme

$$-2(1-\omega)\alpha h(z_{k_i}) + C_h \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \leq 0$$

a podle (3.23) tedy $h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \leq h(z_{k_i})$.
A poznámka 3.1 dává výsledek. □

Tvrzení 3.9 *Nechť platí předpoklady P. Nechť z_{k_i} je podposloupnost na níž platí $\chi > \epsilon$ pro $\epsilon > 0$ nezávislé na k_i. Potom existuje konstanta $K > 0$, tak, že pro všechna $k_i > K$ filtr není aktualizován v iteraci k_i.*

Důkaz: Podle Tvrzení 3.3 a podle Tvrzení 3.4 pro k_i dostatečně velké platí: $(\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq -\epsilon_2$ a

$$h(z_{k_i}) \leq min\{h_P, \frac{\overline{\alpha}}{c_6}, \frac{c_5}{c_6}, (\frac{\tau_1 c_6 \epsilon_2}{\gamma_\varphi})^{\frac{1}{\theta-1}}\}. \tag{3.26}$$

(bez újmy na obecnosti $h(z_{k_i}) > 0$).
Definujme $\beta_{k_i} := c_6 h(z_{k_i}) = \min\{\overline{\alpha}, c_5, c_6 h(z_{k_i})\}$. Podle dvou tvrzení výše je pro $\alpha_{k_i,l} \leq \beta_{k_i}$ splněna jak Armijova podmínka (3.15) tak přijatelnost pro filtr. Podle posledního výrazu v (3.26) platí

$$\gamma_\varphi h(z_{k_i})^{\theta-1} \leq \tau_1 c_6 \epsilon_2,$$

potom tedy $\alpha \geq \tau_1 \beta_{k_i} = \tau_1 c_6 h(z_{k_i}) \geq \frac{\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta}{\epsilon_2}$, čili

$$\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta \leq \alpha\epsilon_2 \leq -\alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}$$

a je splněna Podmínka 3.3 a filtr není aktualizován. □

Věta 5 ***(Slabá věta o globální konvergenci)***
Nechť platí předpoklady P. Posloupnost generovaná algoritmem 1 má stacionární hromadný bod.

Důkaz: Předpokládejme, že posloupnost $\{z_{k_i}\}$ nemá žádný stacionární hromadný bod. Potom je filtr podle Tvrzení 3.9 aktualizován jen konečně mnohokrát a existuje $\widetilde{K}$, že v iteraci k_i platí Podmínka 3.3 pokud $k_i > \widetilde{K}$.
Podle Tvrzení 3.4 a Tvrzení 3.3 existuje $\epsilon_2 > 0$ nezávislé na i a $K > \widetilde{K}$ tak, že $\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq -\epsilon_2$ pro všechna $k_i > K$
Podle 3.15 pro $k_i > K$ platí

$$\varphi(z_{k_i+1}) - \varphi(z_{k_i}) \leq -\alpha_{k_i}\eta\epsilon_2.$$

Protože φ je zdola omezená musí $\alpha_{k_i} \to 0$.
Vezměme naposled odmítnutou délku kroku α_{k_i,l_i} v iteraci k_i. Tato délka kroku leží v intervalu $[\alpha_{k_i}/\tau_2, \alpha_{k_i}/\tau_1]$. Tato délka kroku mohla být zamítnuta pouze ze dvou důvodů. Buď

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) > \alpha_{k_i,l_i}\eta\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \tag{3.27}$$

nebo

$$(h(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}), \varphi(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i})) \in \Re_{k_i} = \Re_{\widetilde{K}}. \tag{3.28}$$

Důkaz uzavřeme tím, že ukážeme, že ani (3.27) ani (3.28) nemůže platit pro dostatečně velké k_i
Ad (3.27): Jelikož $\lim_i \alpha_{k_i} = 0$ platí také $\lim_i \alpha_{k_i,l_i} = 0$ Podle tvrzení 3.7 máme výsledek.
Ad (3.28): Nechť $H_{\widetilde{K}} := \min\{h : (h, \varphi) \in \Re_{\widetilde{K}}\}$. Podle Tvrzení 3.6 $H_{\widetilde{K}} > 0$. Podle (3.23) a podle tvrzení 3.2 máme $h(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}) \leq (1 - \alpha[2(1-\omega)])h(z_{k_i}) + C_h\alpha^2 M_d^2$. Protože $\lim_i h(z_{k_i}) = 0$ a $\lim_i \alpha_{k_i,l_i} = 0$, platí pro dostatečně velké k_i $h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) < H_k$, což je spor. □

Ve zbytku této části se budeme zabývat předpokladem P9. Tento předpoklad platí na okolí řešení splňující postačující podmínky druhého řádu. Nabízí se tedy změnit definici vstupů do filtru následujícím způsobem:

$$h_1(x,u) := \sigma\frac{1}{2}\|g(x,u)\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_I(u_I, -c(x))\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(x)\|^2 \tag{3.29}$$

$$\varphi_1(x) := f(x) \tag{3.30}$$

Algoritmus s takto definovanými vstupy filtru bude zřejmě globálně konvergentní podle Tvrzení 3.3. Metoda nehladkých rovnic s pokutovou funkcí h_1 a $\sigma = 1$ je globálně superlineárně konvergentní, jak je dokázáno v [1]. Bohužel posloupnost definovaná touto metodou může konvergovat k sedlovému bodu. Náš algoritmus dává v okolí přípustného bodu přednost minimalizaci účelové funkce, což by mělo ve výsledku snížit pravděpodobnost konvergence k sedlovému bodu. Je tedy účelné, ač to není k důkazu globální konvergence třeba, dokázat ekvivalent Tvrzení 3.4. Poznamenejme ještě, že předpoklad P9 je v tomto případě ekvivalentní postačujícím podmínkám druhého řádu a není tedy tak problematický jako výše. V tomto případě také zřejmě nepotřebujeme předpoklad P3, omezenost pravé strany v tomto případě zaručí předpoklad P2.

Tvrzení 3.10 *Nechť platí předpoklady P. Nechť*

$$d = (\Delta x^T, \Delta s^T, \Delta u_I^T, \Delta u_E^T)^T$$

je přibližným řešením soustavy (3.9):

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{M}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{R}_I(\hat{R}_I + \hat{C}_I)^{-1}\hat{\psi}_I \\ c_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ \hat{r}_I \\ r_E \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

označme

$$h(\alpha) := h(z + \alpha d)$$
$$\varphi(\alpha) := \varphi(z + \alpha d)$$

Nechť je soustava řešena s dostatečnou přesností, tedy $\|r_x\| < \omega \|g(x, u_I)\|$ *a* $\Delta x^T r_x < \omega' \Delta x^T \hat{G} \Delta x$ *pro nějaké* $\omega' \in (0, 1)$. *Potom:*

- $h_1'(0) \le -2(1 - \omega)h(0)$

- *Nechť* $\overline{z}$ *je přípustný nestacionární bod* ($\chi > \epsilon$ *s* $\epsilon > 0$) *potom existuje okolí* $V_{\overline{z}}$ *a konstanta* $\varepsilon_1 > 0$ *tak, že kdykoliv* $z_k \in V$ *platí v* (z_k)*:*
  $\varphi_1'(0) \le -\varepsilon_1$.

Důkaz: Důkaz (ii) je zcela identický jako u Tvrzení 3.4 dokažme tedy (i):

$$\begin{aligned} h'(0) &= \sigma g^T(G\Delta x + A_I \Delta u_I + A_E \Delta u_E) + \\ &+ \psi_I^T((R_I + C_I)R_I^{-1}A_I^T \Delta x - (R_I - U_I)R_I^{-1}\Delta u_I) + c_E^T A_E^T \Delta x \end{aligned}$$

použití (3.8) a (3.9) dostáváme
$h'(0) = -\sigma\|g\|^2 - \|\psi_I\|^2 - \|c_E\|^2 + \sigma g^T r_x + \hat{\psi}_I^T(\hat{R}_I + \hat{C}_I)\hat{R}_I^{-1}\hat{r}_I + c_E^T r_E \le -2(1 - \omega)h(0)$, protože algoritmus metody sdružených gradientů, Schwarzova nerovnost a předpoklad věty dává:

$$\sigma g^T r_x + \hat{\psi}_I^T(\hat{R}_I + \hat{C}_I)\hat{R}_I^{-1}\hat{r}_I + c_E^T r_E \le \omega(\|\hat{\psi}_I\|^2 + \|c_E\|^2 + \sigma\|g\|^2)$$

□

Bohužel toto řešení má zásadní nevýhodu: Provádět "line-search" s $\|g(x, u_I)\|$ je výpočetně drahé. Navíc tato metoda může stále být náchylnější konvergovat do sedlového bodu. Navrhujeme proto následující dvě možnosti:

Vraťme se nyní k původní definici filtrů (3.11), (3.12).

Podmínka 3.4 *Řekneme, že v iteraci z_k je splněna SR-podmínka platí-li:*

$$h(z_k) < \varepsilon_{SR}\|g(z_k)\| \tag{3.32}$$

$$-\nabla\varphi^T(z_k)d_k < min\{\varepsilon_{RS}(H_k)^\kappa, \varepsilon_{SR}\|g(z_k)\|, \varepsilon_{SR}\} \tag{3.33}$$

H_k je definováno v Tvrzení 3.6
$\varepsilon_{SR} > 0$ velmi malé.
$\kappa \in (0,1)$
$\theta > \kappa + 1$
kde θ je definováno v Podmínce 3.3.

Algoritmus 2 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2, ε_{SR}*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*
2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*
3. *Spočti směrový vektor d_k z (3.9) a (3.8). Pokud je splněna SR-podmínka proveď restart: nastav $\hat{G} = \hat{D}$ ($\hat{D}$ podle (2.4)) a spočti nový směr.*
4. *volba délky kroku*
5. *Akceptuj novou iteraci.*
6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (3.14) ani podmínka 3.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak $\Re_{k+1} := \Re_k$.*
7. *$k \leftarrow k+1$ Jdi na krok 2.*
8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi z_{k+1} přijatelné pro filtr a splňující podmínku 3.1, zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

Algoritmus 3 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2, ε_{SR}*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*
2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*

3. *Spočti směrový vektor* d_k *z (3.9) a (3.8). Pokud je splněna SR-podmínka přejdi na krok 9.*

4. *volba délky kroku*

5. *Akceptuj novou iteraci.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (3.14) ani podmínka 3.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak* $\Re_{k+1} := \Re_k$.

7. $k \leftarrow k+1$ *Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr a splňující podmínku 3.1 zmenšením* $h(.)$*. Jdi na krok 6.*

9. *fáze obnovení stacionarity: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr, splňující podmínku 1 a nesplňující SR-podmínku (3.32) zmenšením*

$$Q(x,u) := \sigma\frac{1}{2}\|g(x,u)\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_I(u_I, -c(x))\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(x)\|^2$$

   a aktualizuj filtr podle pravidla 3.1. A jdi na krok 7.

Důkaz slabé věty o globální konvergenci pro algoritmy 2 a 3 je velmi podobný důkazu Věty 5, jsou zde však některé odlišnosti. Proto důkaz provedeme se stejnou obšírností.

Tvrzení 3.11 *Nechť platí předpoklady P s výjimkou předpokladu P9. Nechť* z_{k_i} $k_i \in R_P$ *je podposloupnost na níž platí*

$$-\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} > \min(\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i}), \epsilon_1),$$

$\epsilon_1 > 0$ *nezávisí na* i*. Potom existuje konstanta* $\overline{\alpha} > 0$ *tak, že pro dostatečně velká* k_i *(taková, že* $\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i}) \leq \varepsilon_1$*) a* $\alpha < \overline{\alpha} h^\kappa(z_k)$ *platí:*

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) \leq \eta\alpha\nabla(\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i}. \tag{3.34}$$

Důkaz: Platí:
$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) - \alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq C_\varphi \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \leq \alpha(1-\eta)\varepsilon_{SR} h(z_{k_i})^\kappa \leq -\alpha(1-\eta)\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}$, pro $\alpha \leq \{\frac{(1-\eta)\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i})}{C_\varphi M_d^2}\} =: \overline{\alpha} h^\kappa(z_{k_i})$ □

Tvrzení 3.12 *Nechť platí předpoklady P s výjimkou předpokladu P9. Nechť* z_{k_i} $k_i \in R_P$ *je podposloupnost na níž platí*

$$-\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} > \min(\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i}), \epsilon_1),$$

$\epsilon_1 > 0$ *nezávisí na* i*. Potom existují konstanty* $c_5, c_6 > 0$ *tak, že:* $(h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}), \varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$ *pro dostatečně velká* k_i *(taková, že* $\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i}) \leq \varepsilon_1$*) a pro*

$$\alpha \leq min\{c_5 h(z_{k_i})^\kappa, c_6 h(z_{k_i})\}.$$

Důkaz: Nechť
$c_5 := \varepsilon_{SR}/(M_d^2 C_\varphi)$ a $c_6 := 2(1-\omega)/(M_d^2 C_h)$.
Mechanismus filtru zajišťuje (viz poznámka 3.1), že

$$(h(z_{k_i}), \varphi(z_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$$

pro $\alpha \le c_5 h(z_{k_i})^\kappa$ máme $\alpha^2 \le \frac{\alpha \varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i})}{M_d^2 C_\varphi} \le \frac{-\alpha \nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}}{C_\varphi \|d_{k_i}\|^2}$, nebo ekvivalentně

$$\alpha \nabla\varphi(z_k)^T d_k + C_\varphi \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \le 0$$

a tedy podle (3.24)

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \le \varphi(z_{k_i}).$$

Podobně pro $\alpha \le c_6 h(z_{k_i}) \le \frac{2(1-\omega)h(z_{k_i})}{\|d_{k_i}\|^2 C_h}$ máme

$$-2(1-\omega)\alpha h(z_{k_i}) + C_h \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \le 0$$

a podle (3.23) tedy $h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \le h(z_{k_i})$.
A poznámka 3.1 dává výsledek. □

Tvrzení 3.13 *Nechť platí předpoklady P s výjimkou předpokladu P9. Nechť z_{k_i} $k_i \in R_P$ je podposloupnost na níž platí*

$$-\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \ge \min(\varepsilon_{SR} h^\kappa(z_{k_i}), \epsilon_1)$$

pro $\epsilon_1 > 0$ nezávislé na k_i. Potom existuje konstanta $K > 0$, tak, že pro všechna $k_i > K$ filtr není aktualizován v iteraci k_i.

Důkaz: Podle Tvrzení 3.3 pro k_i dostatečně velké platí:

$$h(z_{k_i}) \le \min\{h_P, (\frac{\overline{\alpha}}{c_6})h(z_{k_i})^\kappa, (\frac{c_5}{c_6})h(z_{k_i})^\kappa, (\frac{\tau_1 c_6 \varepsilon_{SR} h(z_{k_i})^\kappa}{\gamma_\varphi})^{\frac{1}{\theta-1}}\}. \tag{3.35}$$

(Bez újmy na obecnosti $h(z_{k_i}) > 0$).
Definujme $\beta_{k_i} := c_6 h(z_{k_i}) = \min\{\overline{\alpha} h(z_{k_i})^\kappa, c_5 h(z_{k_i})^\kappa, c_6 h(z_{k_i})\}$. Podle dvou tvrzení výše je pro $\alpha_{k_i,l} \le \beta_{k_i}$ splněna jak Armijova podmínka (3.15) tak přijatelnost pro filtr. Podle posledního výrazu v (3.35) platí

$$\gamma_\varphi h(z_{k_i})^{\theta-1} \le \tau_1 c_6 \varepsilon_{SR} h(z_{k_i})^\kappa,$$

tedy pro $\alpha \ge \tau_1 \beta_{k_i} = \tau_1 c_6 h(z_{k_i}) \ge \frac{\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta}{\varepsilon_{SR} h(z_{k_i})^\kappa}$
tedy $\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta < \alpha \varepsilon_{SR} h(z_{k_i})^\kappa \le -\alpha(\nabla\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i}$ a je splněna Podmínka 3.3 a filtr není aktualizován. □

Tvrzení 3.14 *Nechť platí předpoklady P s výjimkou předpokladu P9. Nechť posloupnost* z_k *nemá stacionární hromadný bod. Potom* $H_k > \epsilon_2$ $\epsilon_2 > 0$ *nezávislé na* k

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat existuje $K > 0$ tak, že pro $k > K$ platí (3.32). (Jinak posloupnost stacionární hromadný bod má) Protože $\lambda_{\min}(Z^T \hat{D} Z) > \varepsilon$, pro $k > K$ platí předpoklady Tvrzení 3.13 a filtr je tedy aktualizován pouze konečně mnohokrát. □

Věta 6 ***Slabá věta o globální konvergenci****

Nechť platí předpoklady P s výjimkou předpokladu P9, potom posloupnost generovaná algoritmem 2 resp. algoritmem 3 má stacionární hromadný bod.

Důkaz: (i) Algoritmus 2: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že existuje K tak, že (3.32) platí pro z_k $k > K$ (jinak věta platí).
Podle minulého tvrzení tedy platí ekvivalent tvrzení 3.4 a to bez předpokladu P9. Můžeme tedy postupovat stejně jako při důkazu věty 5.
(ii) Algoritmus 3: Pokud je fáze obnovení stacionarity zavolána pouze konečně mnohokrát, jde o stejný případ jako (i). Pokud pro každé $K > 0$ existuje $k > K$, že fáze obnovení stacionarity je zavolána v iteraci k potom podle (3.32), neboť fáze obnovení stacionarity vrací bod, kde (3.32) neplatí, a podle Tvrzení 3.3 máme výsledek. □

Poznámka 3.4 *Silnější výsledek jako (*$\lim_k \chi(z_k) = 0$*) nelze dokázat, protože libovolně blízko přípustného bodu může být zavolána fáze obnovení přípustnosti. Tento problém odstraníme v další části.*

3.4.2 Lokální konvergence a silná věta o globální konvergenci

V této podkapitole předpokládáme platnost všech předpokladů P. Nicméně algoritmus v této podkapitole lze modifikovat stejně jako výše, bez ztráty výsledků zde dokázaných.

Jak jsme se zmínili v kapitole 1 filtrové metody mohou trpět Maratosovým jevem a nemusí proto dosahovat superlineární konvergence. V této sekci navrhneme dvou filtrovou variantu algoritmu 1, o které se dá dokázat superlineární konvergence a netrpí problémem popsaným v poznámce 3.4.

Definice 3.6

$$Q(z_k) = Q(x_k, u_k) := \frac{1}{2}\|g(x_k, u_k)\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_I(u_{k_I}, -c(x_k))\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(x_k)\|^2 \tag{3.36}$$

Podmínka 3.5 *Řekneme, že v iteraci z_k je splněna SL-podmínka pokud platí:*

$$Q(z_k) - Q(z_k + d_k) \geq \gamma_{SL} Q(z_k) \tag{3.37}$$

$\gamma_{SL} \in (0, 1)$

Pravidlo 3.2

$\Re_Q^{k+1} := \{(Q, \varphi); Q > Q(z_k) - \gamma_{SL} Q(z_k), \varphi > min\{\varphi(z_k) - \gamma_{SL} Q(z_k), min\{\varphi, (Q, \varphi) \in \Re_Q^k\}\}\}$

Takto definovaný filtr je filtrem jen v tom smyslu, že stejně jako dříve používané filtry definuje určitou zakázanou oblast, kde nemůže dojít k restartu původního filtru. Ve skutečnosti však do paměti ukládáme pouze jednu dvojici čísel.

Algoritmus 4 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h, \varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, $\Re_Q^0 = \emptyset$ γ_h, γ_φ, γ_{SL}, η, τ_1, τ_2*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*
2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*
3. *Spočti směrový vektor d_k z (3.9) a (3.8).*
4. *volba délky kroku -*
   (4.0) Pokud je splněna SL-podmínka (3.37) a $z_k + d_k \notin \Re_Q^k$ potom:
   (i)$\Re_k := \Re_0$ - restart filtru
   (ii)aktualizuj $\Re_Q^k$ podle pravidla 3.2

(iii)akceptuj iteraci $z_k + d_k$ $k \leftarrow k+1$ a jdi na krok 2.
(4.1) nastav $\alpha_{k,0} = \alpha_{max}$, $\alpha_h = 0$ a $l \leftarrow 0$
(4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$ a $\alpha_h < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8, pokud $\alpha_{k,l} < \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k)d_k}$ a $\alpha_h \geq \alpha_{min}$, jdi na krok 5 s α_h, jinak spočti $z_k(a_{k,l})$
(4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)
(4.4) Pokud platí podmínka (3.13) a $\alpha_h = 0$ nastav $\alpha_h = \alpha_{k,l}$, pokud platí Podmínka 3.3, přejdi na krok 5
(4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1\alpha_{k,l}, \tau_2\alpha_{k,l}]$ a jdi na krok (4.2)

5. *Akceptuj novou iteraci.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (3.14) ani podmínka 3.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak $\Re_{k+1} := \Re_k$.*

7. *$k \leftarrow k+1$ Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi z_{k+1} přijatelné pro filtr a splňující podmínku 3.1, zmenšením $h(.)$. Jdi na krok 6.*

Věta 7 *Nechť platí předpoklady P. Nechť $\omega_k :=\rightarrow 0$, když $\|F(z_k)\| \rightarrow 0$, (ω_k a $F(.)$) definovány v kapitole 2). Potom je metoda podle algoritmu 4 lokálně superlineárně konvergentní.*

Důkaz: Newtonova metoda je za těchto předpokladů lokálně superlineárně konvergentní viz například [2]. Stačí tedy dokázat, že existuje okolí řešení na kterém je splněna SL-podmínka a algoritmus bere plné kroky Newtonovy metody.
Vezměme posloupnost z_{k_i}, která konverguje k řešení z^*. Pro tuto posloupnost (ze superlineární konvergence Newtonovy metody a podle $\omega_k \rightarrow 0$) platí:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|z_{k_i} + d_{k_i} - z^*\|}{\|z_{k_i} - z^*\|} \rightarrow 0$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\|}{\|F(z_{k_i})\|} \rightarrow 0 \tag{3.38}$$

Protože $\gamma_{SL} \in (0,1)$, existuje $\bar{i}$ tak, že pokud $i \geq \bar{i}$ platí $\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\| \leq (1-\gamma_{SL})\|F(z_{k_i})\|$ a následně (neboť $Q(z) = \frac{1}{2}\|F(z)\|^2$)

$$\begin{aligned}\frac{Q(z_{k_i} + d_k) - Q(z_{k_i})}{Q(z_{k_i})} &= \frac{(\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\| - \|F(z_{k_i})\|)(\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\| + \|F(z_{k_i})\|)}{\|F(z_k)\|^2} \\ &\leq \frac{\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\| - \|F(z_{k_i})\|}{\|F(z_k)\|} \leq -\gamma_{SL}\end{aligned}$$

□

Věta 8 ***Silná věta o globální konvergenci***
Nechť platí předpoklady P. Každý hromadný bod generovaný algoritmem 4 je stacionární.

Důkaz: Nechť je filtr restartován nekonečně mnohokrát. Protože $\varphi(.)$ je zdola omezená pak podle pravidla 3.2 $\gamma_{SL} Q(z_k) \to 0$, takže posloupnost má stacionární hromadný bod. Pokud je filtr restartován pouze konečně mnohokrát, potom existenci stacionárního hromadného bodu dává Věta 5. Nechť z^* je stacionární hromadný bod.
Protože Newtonova metoda je lokálně superlineárně konvergentní, existují ε_1^* a ε_2^* tak, že:

$$\frac{\|z_k + d_k - z^*\|}{\|z_k - z^*\|} \leq 1, \tag{3.39}$$

když $z_{k_i} \in B(z^*, \varepsilon_1^*)$ a

$$\frac{Q(z_k + d_k)}{Q(z_k)} \leq (1 - \gamma_{SL}), \tag{3.40}$$

když $z_k \in B(z^*, \varepsilon_2^*)$.
Existuje tedy k_1 tak, že $z_{k_1} \in B := B(z^*, \varepsilon_1^*) \bigcap B(z^*, \varepsilon_2^*)$ a $z_{k_1} \notin \Re_Q^{k_1}$, tedy

$$Q(z_{(k_1+1)}) + \gamma_{SL} Q(z_{k_1}) < \min\{Q : (Q, \varphi) \in \Re_Q^{k_1}\}. \tag{3.41}$$

K uzavření důkazu nyní postačí ukázat, že v každé iteraci z_k, $k > k_1$ platí $z_k \notin \Re_Q^k$ a $z_k \in B$ - za těchto podmínek je v kroku (4.0) v algoritmu vzat plný krok.
Tuto skutečnost dokážeme matematickou indukcí. Pro $k_1 + 1$ tvrzení platí, podle (3.41) a podle (3.39). Vezměme nyní $k_2 > k_1 + 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí v z_{k_2} Potom podle pravidla 3.2 a (3.41) $z_{k_2+1} \notin \Re_Q^{k_2+1}$ a podle (3.39) $z_{k_2+1} \in B$.
Pro $k > k_1$ tedy platí $Q(z_k) - Q(z_{k+1}) \leq \gamma_{SL} Q(z_k)$. Posloupnost $Q(z_k)$ je tedy klesající a omezenost $Q(.)$ zdola dává výsledek. □

Poznámka 3.5 *Filtr lze restartovat i v kroku 5, aniž bychom ztratili výsledek o globální nebo lokální konvergenci. Následně bude algoritmus dovolovat delší kroky.*
krok 5: Akceptuj novou iteraci $z_{k+1} := z_k(\alpha_k)$.
pokud $z_{k+1} \notin \Re_Q^k$ potom
(i)$\Re_k := \Re_0$ - restart filtru
(ii) Aktualizuj $\Re_Q^k$ podle pravidla 3.2.

4 Metoda vnitřního bodu

4.1 Úvod

Uvažujme opět obecný problém nelineárního programování.

$$x = \arg \min_{x \in \mathcal{F}_{NP}} f(x), \tag{NP}$$

kde

$$\mathcal{F}_{NP} = \{x \in R^n : c_I(x) \leq 0,\ c_E(x) = 0\}.$$

Přičemž $c_I(x) = [c_i(x) : i \in I]^T$, $c_E(x) = [c_i(x) : i \in E]^T$, kde $I = \{1, \ldots, m_I\}$, $E = \{m_I + 1, \ldots, m_I + m_E = m\}$. Předpokládáme, že funkce $f(x) : R^n \to R$, $c_I(x) : R^n \to R^{m_I}$, $c_E(x) : R^n \to R^{m_E}$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné. Nutné KKT (Karush-Kuhn-Tucker) podmínky pro řešení problému (NP) (pokud platí obvyklé podmínky regularity jako LICQ (lineární nezávislost gradientů aktivních omezení) a podobně) lze zapsat v následující formě

$$\begin{aligned} g(x,u) &= 0, \\ c_I(x) &\leq 0, \quad u_I \geq 0, \quad u_I^T c_I(x) = 0, \\ c_E(x) &= 0, \end{aligned}$$

kde

$$g(x,u) = \nabla f(x) + A_I(x) u_I + A_E(x) u_E,$$

a $A_I(x) = [\nabla c_i(x) : i \in I]$, $A_E(x) = [\nabla c_i(x) : i \in E]$. Zde $u_I = [u_i(x) : i \in I]^T$, $u_E = [u_i(x) : i \in E]^T$ jsou vektory Lagrangeových multiplikátorů. V této kapitole použijeme ideu vnitřního bodu. Zavedeme tedy pomocný vektor $s_I = [s_i(x) : i \in I]^T$ a na místo původního problému budeme řešit posloupnost problémů s logaritmickou bariérovou funkcí:

$$x = \arg \min_{(x,s_I) \in \mathcal{F}_{IP}} \left(f(x) - \mu e^T \ln(S_I) e \right), \tag{IP}$$

kde $\mu > 0$ je bariérový parametr

$$\mathcal{F}_{IP} = \{(x, s_I) \in R^n \times R^{m_I} : c_I(x) + s_I = 0,\ c_E(x) = 0\}.$$

Přičemž e je vektor s jednotkovými složkami a $S_I = \mathrm{diag}(s_i : i \in I)$. Logaritmická bariérová funkce implicitně zajišťuje splnění podmínek $s_I \geq 0$. Bariérová funkce má na okraji povolené oblasti kladnou singularitu. Volba bariérového parametru je zcela zásadní. Jednak pokud $\mu = 0$, potom KKT podmínky pro (IP) jsou totožné s KKT podmínkami pro (NP). Proto je nutné předpokládat, že $\mu \to 0$. Současně však efektivita metod vnitřního bodu silně závisí na rychlost konvergence μ k nule. Pokud μ jde k nule příliš rychle, algoritmus bere velmi krátké kroky a konvergence se může zpomalit, nebo dokonce zastavit. Tato práce se nicméně volbou bariérového parametru nezabývá. Většina prací volí bariérový parametr následujícím způsobem

$$\mu = \lambda s_I^T u_I / m_I, \tag{4.1}$$

kde $0 < \lambda < 1$. V praktické implementaci algoritmů budeme užívat heuristickou formuli

$$\lambda = 0.1 \min\left(0.05\frac{1-\varrho}{\varrho}, 2\right)^3 \tag{4.2}$$

kde

$$\varrho = \frac{\min_{i\in I}(s_i u_i)}{s_I^T u_I / m_I},$$

jež je navržena v [7]. Zřejmě platí $0 < \varrho \leq 1$ a $\varrho = 1$ tehdy a jen tehdy, je-li splněna podmínka $S_I U_I e - \mu e = 0$.
Nutné KKT podmínky lze zapsat v primární nebo primárně-duální formulaci.

Primární formulace:	Primárně-duální formulace:
$g(x,u) = 0,$	$g(x,u) = 0,$
$U_I e - \mu S_I^{-1} e = 0,$	$S_I U_I e - \mu e = 0,$
$c_I(x) + s_I = 0,$	$c_I(x) + s_I = 0,$
$c_E(x) = 0,$	$c_E(x) = 0,$

kde $g(x,u)$ a S_I mají stejný význam jako výše a $U_I = \mathrm{diag}(u_i : i \in I)$. Splnění podmínek $s_I > 0$ a $u_I > 0$ vyžadujeme v každé iteraci. Podmínka $s_I > 0$ je nezbytná pro definování logaritmické bariérové funkce a $u_I > 0$ zlepšuje vlastnosti lineárního systému, který je řešen v každé iteraci a je nezbytná pro konstrukci efektivního předpodmiňovače. Primárně-duální formulace vede k efektivnějším algoritmům. Jedním z důvodů je skutečnost, že primárně-duální rovnice jsou lépe vyškálovány: Pravá strana μe jde k nule, když $\mu \to 0$, ale $\mu S_I^{-1} e$ může mít složky odražené od nuly protože $s_i \to 0$ pokud i-té nerovnostní omezení je aktivní v řešení. Linearizováním primárně-duálních rovnic získáme krok Newtonovy metody:

$$\begin{bmatrix} G & 0 & A_I & A_E \\ 0 & U_I & S_I & 0 \\ A_I^T & I & 0 & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_I \\ \Delta u_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g \\ S_I U_I e - \mu e \\ c_I + s_I \\ c_E \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $g = g(x,u)$ a $G = G(x,u) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i\in I} u_i \nabla^2 c_i(x) + \sum_{i\in E} u_i \nabla^2 c_i(x)$. Předpokládáme, že matice soustavy(4.3) je regulární. Algoritmus metody vnitřního bodu může být zhruba popsán takto. Pro dané vektory $x \in R^n$, $s_I \in R^{m_I}$, $u_I \in R^{m_I}$, $u_E \in R^{m_E}$ tak, že $s_I > 0$, $u_I > 0$ a daný bariérový parametr $\mu > 0$, určíme směrové vektory Δx, Δs_I, Δu_I, Δu_E řešením soustavy lineárních rovnic ekvivalentní (4.3). Dále určíme délku kroku $0 < \alpha \leq \overline{\alpha}$, a položíme $x := x + \alpha\Delta x$, $s_I := s_I(\alpha, \Delta s_I)$, $u_I := u_I(\alpha, \Delta u_I)$, $u_E := u_E + \alpha \Delta u_E$, kde $s_I(\alpha, \Delta s_I) > 0$ a $u_I(\alpha, \Delta u_I) > 0$ jsou funkce α závisející na Δs_I a Δu_I, jež jsou zvoleny vhodnou strategií. Nakonec určíme nový bariérový parametr $\mu > 0$.

4.2 Určení směrového vektoru

(4.3) je nesymetrická soustava dimenze $n + m_E + 2m_I$. Tato soustava může být symetrizována a redukována přímou eliminací Δs_I. Máme

$$\Delta s_I = -U_I^{-1} S_I (u_I + \Delta u_I) + \mu U_I^{-1} e \tag{4.4}$$

tak, že

$$(4.5) \qquad \begin{bmatrix} G & A_I & A_E \\ A_I^T & -U_I^{-1}S_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta u_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g \\ c_I + \mu U_I^{-1} e \\ c_E \end{bmatrix}.$$

Tento systém má jednu nevýhodu. Složky matice $U_I^{-1}S_I$ mohou být neomezené, jelikož $u_i \to 0$ pokud i-té nerovnostní omezení je neaktivní v řešení. Abychom tento problém odstranili rozdělíme, stejně jako v minulé kapitole, omezení na aktivní, kde

$$(4.6) \qquad \hat{s}_I \leq \varepsilon_I \hat{u}_I,$$

a neaktivní, kde

$$(4.7) \qquad \check{s}_I > \varepsilon_I \check{u}_I$$

(přičemž $\varepsilon_I > 0$ je vhodný parametr). Stejným způsobem rozdělíme ostatní proměnné příslušné k nerovnostním omezením. Eliminací neaktivních rovnic máme

$$(4.8) \qquad \Delta \check{u}_I = \check{S}_I^{-1} \check{U}_I (\check{c}_I + \check{A}_I^T \Delta x) + \mu \check{S}_I^{-1} e$$

takže

$$(4.9) \qquad \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{U}_I^{-1}\hat{S}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{c}_I + \mu \hat{U}_I^{-1} e \\ c_E \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{G} &= G + \check{A}_I \check{S}_I^{-1} \check{U}_I \check{A}_I^T, \\ \hat{g} &= g + \check{A}_I \check{S}_I^{-1} \check{U}_I \check{c}_I + \mu \check{A}_I \check{S}_I^{-1} e. \end{aligned}$$

Obě matice $\hat{G}$ a $\hat{U}_I^{-1}\hat{S}_I$ jsou omezené (pokud G a A jsou omezené). Podobně můžeme rozdělit rovnici (4.4) do dvou rovnic

$$\begin{aligned} (4.10) \qquad \Delta \hat{s}_I &= -\hat{U}_I^{-1} \hat{S}_I (\hat{u}_I + \Delta \hat{u}_I) + \mu \hat{U}_I^{-1} e, \\ (4.11) \qquad \Delta \check{s}_I &= -(\check{c}_I + \check{A}_I^T \Delta x + \check{s}_I) \end{aligned}$$

po úpravách. Vektor $\Delta \hat{u}_I$ je určen řešením soustavy (4.9) a vektor $\Delta \check{u}_I$ je spočten podle (4.8). Matice $\check{S}_I^{-1}\check{U}_I$ je omezená.

Definice 4.1 *Řekneme, že $\hat{r}$ vyhovuje, platí-li*

$$\|\hat{r}\| \leq \omega \min(\|\hat{c}\|, \|\hat{b}\|) := \omega \min\left(\left\| \begin{matrix} \hat{c}_I + \hat{s}_I \\ c_E \end{matrix} \right\|, \|\hat{b}\|\right),$$

přičemž všechny veličiny jsou definovány v algoritmu PCG a v této kapitole.

4.3 Volba délky kroku

Kritéria pro volbu délky kroku pro metodu vnitřního bodu se od těch popsaných v části 3.3, liší jen v několika detailech.
Jde v podstatě jen o nutnost zajistit, aby ve všech iteracích platilo $s_I > 0$ a $u_I > 0$, což zajišťuje Definice 4.4.

Definice 4.2 *Nechť* $z = (x, s, u_I, u_E)$
V dalším textu této kapitoly bude $\widetilde{d} = (\Delta x^T, \Delta s^T, \Delta u_I^T, \Delta u_E^T)^T$ *resp.* $\widetilde{d}_k$ *označovat řešení soustavy (4.3) resp. řešení v iteraci k.*
Protože vstupy filtru nebudou ve vyšetřovaných případech záviset na Lagrangeových multiplikátorech, definujme ještě:

$$d = (\Delta x^T, \Delta s^T)^T.$$

Nechť $h(z)$ a $\varphi(z)$ jsou funkce, které budou sloužit jako vstupy filtru.
Nejprve vezmeme dvě přirozené volby:

$$\varphi_1(z) = f(x) - \mu \ln(S_I)e \tag{4.12}$$

$$h_1(z) = \frac{1}{2}(\|c_I + s_I\|^2 + \|c_E\|^2), \tag{4.13}$$

takzvaný bariérový filtr a

$$\varphi_2(z) = f(x) \tag{4.14}$$

$$h_2(z) = \frac{1}{2}(\|c_I + s_I\|^2 + \|c_E\|^2), \tag{4.15}$$

takzvaný Fletcherův-Leyfferův filtr.
Hlavní problém u bariérových metod, je fakt, že bariérový parametr se mění z jedné iterace na druhou. Tato skutečnost může způsobit, že nová iterace se po změně μ, v případě, že používáme bariérový filtr, dostane do zakázané oblasti a neplatí tedy ekvivalent poznámky 3.1. Tato poznámka má však zcela zásadní význam pro důkaz globální konvergence. V této kapitole se proto omezíme na případ jaký je vyšetřován v [4].
Pro bariérový filtr tedy budeme předpokládat, že parametr μ zůstane během celého výpočtu stejný. Věta o globální konvergenci pro bariérový filtr bude platit v tom smyslu, že posloupnost konverguje ke stacionárnímu bodu bariérového problému. V další kapitole potom použijeme ideu restartu filtru, jak byla navržena v kapitole o nehladkých rovnicích, k odstranění tohoto problému.

Poznámka 4.1 *Pro přehlednost důkazů budeme* $\varphi(z)$ *respektive* $h(z)$ *označovat obě definice jak* $\varphi_1(z)$ *tak* $\varphi_2(z)$ *respektive jak* $h_1(z)$ *tak* $h_2(z)$*.*

Stejně jako u metody nehladkých rovnic budeme nyní definovat přípustný bod. Pro zjednodušení důkazů a kvůli možnosti aplikovat výsledky i na bariérový filtr s $\mu_k \to 0$ definujme přípustnost následovně.

Definice 4.3 *Nechť $\mu_k \to 0$, potom řekneme, že bod $(\overline{z}, \overline{\mu})$ je přípustný, platí-li $h(\overline{z}) = 0$ a $\overline{\mu} = 0$.*
Nechť $\mu_k = \mu$, potom řekneme, že bod $(\overline{z}, \overline{\mu})$ je přípustný, platí-li $h(\overline{z}) = 0$ a $\overline{\mu} = \mu$.

Tato definice je pouze formální. Umožní nám při důkazech zachovat stejné postupy jako u metody nehladkých rovnic.

Podmínka 4.1 *Řekneme, že délka kroku α splňuje podmínku postačující redukce v iteraci z_k, pokud splňuje aspoň jednu z následujících nerovností*

$$h(z_k(\alpha)) \leq (1 - \gamma_h)h(z_k) \tag{4.16}$$

$$\varphi(z_k(\alpha)) \leq \varphi(z_k) - \gamma_\varphi h(z_k), \tag{4.17}$$

pro konstanty $\gamma_h, \gamma_\varphi \in (0, 1)$.

Podmínka 4.2 *Řekneme, že délka kroku α splňuje v iteraci z_k Armijovu podmínku, jestliže platí:*

$$\varphi(z_k(\alpha)) - \varphi(z_k) \leq \eta\alpha(\nabla\varphi(z_k))^T d_k, \tag{4.18}$$

kde $\eta \in (0, \frac{1}{2}$.

Podmínka 4.3 $-\nabla\varphi(z_k)^T d_k > 0$ *a* $-\nabla\varphi(z_k)^T d_k\alpha > \gamma_\varphi h(z_k)^\theta$ *pro* $\theta > 1$ *a zároveň platí Armijova podmínka (4.18)*

Definice 4.4

$$z_k(\alpha) = (x_k(\alpha), s_k(\alpha), (u_I)_k(\alpha), (u_E)_k(\alpha))$$

$x_k(\alpha) = x_k + \alpha\Delta x_k$
$s_k(\alpha) = s_k + \alpha\Delta s_k,\ \Delta s_k > 0$
$s_k(\alpha) = s_k + min(\alpha, -\gamma\frac{s_k}{\Delta s_k})\Delta s_k,\ \Delta s_k < 0$
$(u_I)_k(\alpha) = (u_I)_k + \alpha(\Delta u_I)_k,\ (\Delta u_I)_k > 0$
$(u_I)_k(\alpha) = (u_I)_k + min(\alpha, -\gamma\frac{(u_I)_k}{(\Delta u_I)_k})(\Delta u_I)_k,\ (\Delta u_I)_k < 0$
$(u_E)_k(\alpha) = (u_E)_k + \alpha(\Delta u_E)_k)$
Vše myšleno po složkách.

Definice 4.5 $\alpha_k^{max} := \max\{\alpha \in (0, 1] : s_k + \alpha\Delta s_k \geq (1 - \gamma)s_k\}$

Pravidlo 4.1 $\Re_{k+1} := \Re_k \bigcup\{(h, \varphi) \in R^2 : h \geq (1 - \gamma_h)h(z_k), \varphi \geq \varphi(z_k) - \gamma_\varphi h(z_k)$

4.4 Algoritmy

4.4.1 Slabá věta o globální konvergenci

V této kapitole popíšeme obdobné výsledky jako v kapitole 3.4. Algoritmy pro metodu vnitřního bodu se od těch, jež jsou popsány v kapitole 3.4 liší pouze v kroku 3. Směrový vektor je určen ze soustavy (4.3) na místo z (3.5). Pro důkaz obdobných vět jako pro metodu nehladkých rovnic tedy postačí dokázat ekvivalentní tvrzení, která charakterizují směrový vektor. Tedy ekvivalenty tvrzení 3.4 a 3.2. Protože v dalším nebude ani $h(.)$ ani $\varphi(.)$ záviset na u_I, nebudeme potřebovat předpoklad P3.
Zformulujme nyní předpoklady, za nichž dokážeme konvergenční větu.

Předpoklady IP
Nechť z_k ($z_k = (x_k, s_k, u_k)$ $(u := (u_I, u_E))$) je posloupnost generovaná algoritmem 5 (níže). Předpokládejme, že fáze obnovení přípustnosti skončí vždy úspěšně a algoritmus neskončí v kroku 2. Dále existuje indexová množina R_{IP} tak, že:

1. Existuje otevřena množina C, tak že $[x_k, x_k(\alpha_{max})] \subseteq C$ $k \in R_{IP}$ a $f(.)$, $c(.)$ jsou diferencovatelné a jejich první derivace jsou omezené a Lipschitzovsky spojité na C.
2. Matice G_k jsou stejnoměrně omezené pro $k \in R_{IP}$.
3. Matice G_k jsou stejnoměrně pozitivně definitní na jádru $\hat{A}_k$ pro $k \in R_{IP}$. Tedy $\lambda_{min}(Z^T G Z) \geq \varepsilon > 0$, kde Z je ON báze nulového prostoru matice $\hat{A}_k$.
4. $h(.) \leq h_{max}$ na C. (Z čehož podle předpokladu IP1 pro všechny definice h(.) vyplývá $\|s_k\| \leq M$ pro všechna k.)
5. Matice soustavy (4.3) je dostatečně regulární ve všech iteracích.
6. Nechť ve všech iteracích platí $s_i + u_i \geq \varepsilon > 0$
7. $\mu_k > 0$ a pokud používáme Fletcherův-Leyfferův filtr potom $\mu_k \to 0$, pro bariérový filtr $\mu_k = \mu > 0$ ve všech iteracích.
8. Existuje konstanta h_{IP} taková, že $k \in R_{IP}$ kdykoliv $h(z_k) \leq h_{IP}$.

Předpoklady IP mají stejný význam jako obdobné předpoklady P. Předpoklad IP4 si zaslouží bližší vysvětlení - tento předpoklad zaručuje omezenost $\varphi(.)$ zdola.

Poznámka 4.2 *Samostatnou poznámku věnujme předpokladu IP6. Tento předpoklad není tak problematický, jako u metody nehladkých rovnic - u metody vnitřního bodu totiž obvykle nebude žádný ze vstupů filtru záviset na u_I. Můžeme tedy měnit hodnotu u_I v podstatě libovolně, aniž bychom zasáhli teoretické výsledky o konvergenci.*
Navíc, budeme-li předpokládat, že $\mu > \underline{\mu} > 0$ a pro Lagrangeův multiplikátor u_i používáme stejnou délku kroku jako pro s_i, pak z rovnice 4.4 máme tento předpoklad zaručen.

(důkaz: Nechť $u_i, s_i \leq \varepsilon_3$, potom $\varepsilon_3 \Delta s_i + \varepsilon_3 \Delta u_i \geq u_i \Delta s_i + s_i \Delta u_i = -s_i u_i + \mu \geq -\varepsilon_3^2 + \mu$ tedy $\Delta u_i + \Delta s_i > 0$ pro ε_3 dostatečně malé) Za těchto podmínek je tedy pravá strana omezená a s_I je odraženo od nuly (viz níže).

Algoritmus 5 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h, \varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*

2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*

3. *Spočti směrový vektor $\widetilde{d}_k$ z rovnic (4.10), (4.10) a (4.11). Pokud $0 < -\gamma \frac{s_k}{\Delta s_k} < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8.*

4. *volba délky kroku -*
   (4.1) nastav $\alpha_{k,0} = 1$, $\alpha_h = 0$ a $l \leftarrow 0$
   (4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$ a $\alpha_h < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8, pokud $\alpha_{k,l} < \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k) d_k}$ a $\alpha_h \geq \alpha_{min}$, jdi na krok 5 s α_h, jinak spočti $z_k(a_{k,l})$
   (4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)
   (4.4) Pokud platí podmínka (4.16) a $\alpha_h = 0$ nastav $\alpha_h = \alpha_{k,l}$, pokud platí Podmínka 4.3 , přejdi na krok 5
   (4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1 \alpha_{k,l}, \tau_2 \alpha_{k,l}]$ a jdi na krok (4.2)

5. *Akceptuj novou iteraci. Pokud používáme Fletcherův-Leyfferův filtr aktualizuj μ.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (4.17) ani podmínka 4.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak $\Re_{k+1} := \Re_k$.*

7. *$k \leftarrow k + 1$ Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi z_{k+1} přijatelné pro filtr a splňující podmínku 4.1, zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

Pro metodu vnitřního bodu platí bezezbytku poznámka 3.2. Pro přehlednost ji vyslovíme znovu.

Poznámka 4.3 *Volba délky kroku podle našeho algoritmu sice zajišťuje globální konvergenci, ale v praxi způsobuje prodloužení doby výpočtu. Navrhujeme tedy provádět volbu podle kroku 4 pouze pokud je $h(z_k)$ dostatečně malé, tedy pokud platí*

$$h(z_k) \leq \min(h_{mal}, \varepsilon_{mal} \|g(z_k)\|).$$

V opačném případě změňme krok 4 následovně:
(4.1) nastav $\alpha_{k,0} = 1$ a $l \leftarrow 0$
(4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8. Jinak spočti $z_k(a_{k,l})$

(4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)
(4.4) Pokud platí podmínka 4.1 nebo 4.3, přejdi na krok 5.
(4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1 \alpha_{k,l}, \tau_2 \alpha_{k,l}]$ a jdi na krok (4.2)

Poznámka 4.4 *Mechanismus filtru zajišťuje (za předpokladu IP7), že $(h(z_k), \varphi(z_k)) \notin \Re_k$. Navíc pravidlo 4.1 dává: $(\overline{h}, \overline{\varphi}) \notin \Re_k \Rightarrow (h, \varphi) \notin \Re_k$ pokud $h \leq \overline{h}$ a $\varphi \leq \overline{\varphi}$.*

Tvrzení 4.1 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť $(\Delta x_k, \Delta s_k, (\Delta u_I)_k, (\Delta u_E)_k)$ je řešením soustavy (4.3) $k \in R_{IP}$. Potom existují konstanty M_x, M_s, M_u, tak, že $\|\Delta x_k\| \leq M_x$, $\|\Delta s_k\| \leq M_s$, $\|(\Delta u_I + u_I)_k\| \leq M_u$, $\|(\Delta u_E + u_E)_k\| \leq M_u$ a $\|(S^{-1}\Delta s)_k\| \leq M_{\widetilde{s}}$. Speciálně tedy $\|d_k\| \leq M_d$. Navíc existuje konstanta $\overline{\alpha}_{\max} > 0$ tak, že $\alpha_k^{\max} > \overline{\alpha}_{\max}$ pro každé k. Navíc je výraz $\mu_k S_k^{-1} e$ omezený na úsečce $[s_k, s_k + \alpha_k^{\max} \Delta s_k]$.*

Důkaz: Přepišme nejprve soustavu (4.3) následovně:

$$\Delta \hat{s}_I = -\hat{U}_I^{-1} \hat{S}_I (\hat{u}_I + \Delta \hat{u}_I) + \mu \hat{U}_I^{-1} e, \tag{4.19}$$

$$\Delta \check{s}_I = -(\check{c}_I + \check{A}_I^T \Delta x + \check{s}_I) \tag{4.20}$$

$$\Delta \check{u}_I = \check{S}_I^{-1} \check{U}_I (\check{c}_I + \check{A}_I^T \Delta x) + \mu \check{S}_I^{-1} e \tag{4.21}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{A}_I & A_E \\ \hat{A}_I^T & -\hat{U}_I^{-1}\hat{S}_I & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{u}_I + \hat{u}_I \\ \Delta u_E + u_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f + \check{A}_I \check{S}_I^{-1} \check{U}_I \check{c}_I + \mu \check{A}_I \check{S}_I^{-1} e \\ \hat{c}_I + \mu \hat{U}_I^{-1} e + s_I \\ c_E \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Pravá strana v rovnici (4.19), (4.21) a (4.22) je omezená podle IP6 a podle (4.6). Pravá strana rovnice (4.20) je omezená podle IP1 IP4. Podle předpokladu IP5 máme první část tvrzení.
Zvolme index i libovolně pevně - v následujícím důkazu se budeme zabývat složkou s_i. Pro přehlednost zápisu index i vynecháme. Důkaz provedeme matematickou indukcí. $\mu_0 s_0^{-1}$ je omezené. Pokud je $\mu_k s_k^{-1}$ omezené a pokud je $\Delta s_k > 0$ pak i $\mu_{k+1} s_{k+1}^{-1}$ je omezené, pokud je $\Delta s_k < 0$ pak podle (4.4) je $\Delta s_i < 0$ platí-li

$$\mu_k s_k^{-1} < u_k + \Delta u_k \tag{4.23}$$

podle definice 4.4 $s_{k+1} \geq (1 - \gamma_s) s_k$, tedy $\mu_k s_{k+1}^{-1} \leq \frac{u_k + \Delta u_k}{1 - \gamma_s}$, což je omezené (viz výše). Protože $\mu_k > 0$ a $\mu_k \to 0$ je $\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}$ omezené, tedy i $\mu_{k+1} s_{k+1}^{-1} = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \mu_k s_{k+1}^{-1}$ je omezené.
Nyní naopak vynecháme index k. Zbývá dokázat, že výraz $\widetilde{s}_i := s_i^{-1} \Delta s_i$ je omezený. Nejprve předpokládejme, že $\Delta s_i < 0$ potom podle (4.4) a podle (4.23) platí

$$\begin{aligned} |\widetilde{s}_i|^2 &= u_i^{-2}(u_i + \Delta u_i)^2 - 2\mu u_i^{-2} s_i^{-1}(u_i + \Delta u_i) + \mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} \leq \\ &\leq u_i^{-2}(u_i + \Delta u_i)^2 - 2\mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} + \mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} \leq \\ &\leq u_i^{-2}(u_i + \Delta u_i)^2 \end{aligned}$$

Protože Δs je omezené, je vyšetřovaný výraz problematický pouze pro $s_i \to 0$ a podle IP6 je v tomto případě u_i^{-2} omezený.
Pokud $\Delta s_i > 0$ potom

$$\mu s_i^{-1} > u_i + \Delta u_i$$

$$\begin{aligned}
|\widetilde{s}_i|^2 &= u_i^{-2}(u_i + \Delta u_i)^2 - 2\mu u_i^{-2} s_i^{-1}(u_i + \Delta u_i) + \mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} \leq \\
&\leq \mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} - 2u_i^{-2}(u_i + \Delta u_i)^2 + \mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2} \leq \\
&\leq 2\mu^2 u_i^{-2} s_i^{-2}
\end{aligned}$$

Výraz je opět problematický pouze pro malá s_i. Podle IP6 je v tomto případě u_i^{-2} omezený. $\mu^2 s_i^{-2}$ je omezený podle úvahy výše. □

Poznámka 4.5 *Tvrzení beze zbytku platí i pro konstantní μ, neboť rovnice (4.23) zaručuje, že s_i je odraženo od nuly pro všechna i a ve všech iteracích.*

Tvrzení 4.2 *Nechť platí předpoklady IP. Potom $h(z_k) \to 0$*

Důkaz: Podle tvrzení 4.1 je $\varphi(z_k)$ omezená funkce. Dále je důkaz identický, jako u tvrzení 3.3. □

Definujme nyní

$$\chi(z) := \|\Delta x\| + \|\Delta s\| \|SU^{-1}\, e\|$$

Tvrzení 4.3 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť*

$$d = (\Delta x^T, \Delta s^T, \Delta u_I^T, \Delta u_E^T)^T$$

je přibližným řešením soustavy (4.9).

$$\begin{bmatrix} G & 0 & A_I & A_E \\ 0 & S_I^{-1}U_I & I & 0 \\ A_I^T & I & 0 & 0 \\ A_E^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_I \\ \Delta u_I \\ \Delta u_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ U_I e - \mu S_I^{-1} e \\ c_I + s_I \\ c_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r_I \\ r_E \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

Označme

$$h(\alpha) := h(z + \alpha d),$$

$$\varphi(\alpha) := \varphi(z + \alpha d)$$

Nechť je soustava řešena s takovou přesností, že

$$-\Delta x^T r_x < \omega' \Delta x^T \hat{G} \Delta x$$

pokud $\Delta x^T G \Delta x > 0$ *pro nějaké* $\omega' \in (0, 1)$. *Potom:*

- $h'(0) \leq -2(1 - \omega) h(0)$

- $\chi(z_k)$ *je dobrou mírou stacionarity. Navíc nechť* $\overline{z}$ *je přípustný nestacionární bod potom existuje okolí* $V_{\overline{z}}$ *a konstanta* $\epsilon_2 > 0$ *tak, že kdykoliv* $z_k \in V$ *a* $\chi(z_k) > \epsilon > 0$ *nezávislé na* k *platí v bodě* z_k*:*
  $\nabla \varphi(z_k) d_k \leq -\epsilon_2$.

Důkaz: ad (i) Jelikož $s_I > 0$ a $u_I > 0$, máme $s_I(\alpha, \Delta s_I) = s_I + \alpha \Delta s_I$ a $u_I(\alpha, \Delta u_I) = u_I + \alpha \Delta u_I$ pro dostatečně malé hodnoty α. Proto diferencováním $h(\alpha)$, obdržíme

$$h'(0) = (c_I + s_I)^T (A_I^T \Delta x + \Delta s_I) + c_E^T A_E^T \Delta x. \tag{4.25}$$

Užitím rovnice (4.24) obdržíme

$$(c_I + s_I)^T (A_I^T \Delta x + \Delta s_I) = -\|c_I + s_I\|^2 + (\hat{c}_I + \hat{s}_I)^T \hat{r}_I,$$

$$c_E^T A_E^T \Delta x = -\|c_E\|^2 + c_E^T r_E$$

(jelikož $\check{r}_I = 0$ by (4.8)). Jelikož Algoritmus PCG (viz Definice 4.1) a Schwarzova nerovnost zaručuje, že $(\hat{c}_I + \hat{s}_I)^T \hat{r}_I + c_E^T r_E = \hat{c}^T \hat{r} \leq \omega \|\hat{c}\|^2 \leq \omega(\|c_I + s_I\|^2 + \|c_E\|^2)$, rovnice (4.25) dává

$$h'(0) \leq -(1 - \omega)(\|c_I + s_I\|^2 + \|c_E\|^2) = -2(1 - \omega) h(0).$$

ad (ii) Vezměme libovolný přípustný bod $\overline{z}$. Předpokládejme, že platí $h(z) \leq h_{IP}$. Dále v zbytku tohoto důkazu bude $\hat{c}_I$ označovat omezení pro něž platí $\hat{c}_I \to 0$ $z \to \overline{z}$.
Diferencováním $\varphi(\alpha)$, obdržíme

$$\varphi'(0) = (\Delta x)^T \nabla f(x) - \mu (\Delta s_I)^T S_I^{-1} e. \tag{4.26}$$

Stejně jako při důkazu obdobného tvrzení pro metodu nehladkých rovnic nejprve předpokládejme, že $\Delta x^T G \Delta x > \widetilde{\varepsilon} > 0$ na okolí $\overline{z}$, potom přenásobíme-li rovnici

$$\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & S_I^{-1} U_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_I & A_E \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I + \Delta u_I \\ u_E + \Delta u_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ -\mu S_I^{-1} e \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

vektorem $[\Delta x^T, \Delta s_I^T]$ stačí dokázat (neboť matice $S^{-1} U_I$ je pozitivně definitní), že

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_I^T & I \\ A_E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_I \\ r_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_I + s_I \\ c_E \end{bmatrix} \to 0, \tag{4.28}$$

když $z \to \overline{z}$, což je zřejmé neboť $\overline{z}$ je přípustný bod a $\|\hat{r}\| \leq \omega\|\hat{c}\|$.
Potom máme

$$-\Delta x^T \nabla f(x) + \mu \Delta s^T S_I^{-1} e \to \Delta x^T G \Delta x + \Delta s^T S_I^{-1} U_I \Delta s_I - \Delta x^T r > (1-\omega')\widetilde{\varepsilon}$$

Nechť $[Z, Y]$ tvoří bázi R^n, přičemž Z je báze jádra matice $[\hat{A}_I^T, A_E^T]^T$. Obdobně jako u metody nehladkých rovnic pišme $\Delta x = Zp + Yq$. Pokud nyní dokážeme, že $q \to 0$ pro $z \to \overline{z}$, jsme hotovi. (neboť potom $\Delta x^T G \Delta x \to p^T Z^T G Z p$ což je podle předpokladu P3 odraženo od nuly.
Podle rovnice (4.28) máme

$$\|\hat{A}\Delta x\| = \|\hat{A} Y q\| \leq \left\| \begin{matrix} \hat{c}_I + \hat{s}_I + \Delta \hat{s}_I \\ c_E \end{matrix} \right\| + \|\hat{r}\| \leq (1+\omega) \left\| \begin{matrix} \hat{c}_I + \hat{s}_I \\ c_E \end{matrix} \right\| + \|\Delta \hat{s}_I\|.$$

Protože $\overline{z}$ je přípustný bod, stačí dokázat, že $\Delta s \to 0$ když $s \to 0$, což je zřejmé podle (4.4) (podle P6 a P7).
Máme tedy hotov důkaz pro $\varphi_1(z)$. Podle definice 4.3 a protože je výraz $S^{-1}\Delta s$ omezený, platí

$$-\Delta x^T \nabla f(x) + \mu \Delta s^T S_I^{-1} e \to -\Delta x^T \nabla f(x)$$

a máme stejný výsledek pro variantu $\varphi_2(z)$. Zbývá dokázat, že $\chi(z) = \|\Delta x\| + \|S_I^{-1} U_I \Delta s\|$ je dobrou mírou stacionarity.
Vezměme posloupnost $z_k \to z^*$ přípustné. Předpokládejme, že $\chi(z) \to 0$ pro $z \to z^*$. Nejprve pro $\mu_k \to 0$: Z (4.27) víme, že pokud s_i nejde k 0 potom $\breve{u}_i + \Delta \breve{u}_i \to \mu \breve{s}_i^{-1} \to 0$. Přenásobíme-li první řádek rovnice (4.27), platí:

$$0 \leftarrow Z^T G Z p + Z^T G Y q + \breve{A}_I(\breve{u}_I + \Delta \breve{u}_I) = Z^T \nabla f,$$

což je známá podmínka stacionarity.
V případě, že μ je konstanta máme obdobně: $u_i + \Delta u_i \to \mu s_i^{-1} > 0$. Tedy

$$\chi(z) \to 0 \Leftrightarrow Z_E^T(\nabla f(x) + \mu A_I S_I^{-1} e).$$

Což je ekvivalentní (neboť $\|c_I + s_I\| \to 0$) s

$$Z_E^T(\nabla f(x) + \mu A_I c_I^{-1} e) = Z_E^T \nabla (f(x) + \mu ln(c_I) e) \to 0,$$

(kde Z_E je báze jádra jacobiánu rovnostních omezení), což je podmínka stacionarity. $\square$

Poznámka 4.6 *Z důkazu vyplývá smysl konvergenční věty, jež bude dokázána později. Pro bariérový filtr s pevným μ tedy metoda konverguje k řešení bariérového problému.*

Tvrzení 4.4 *Nechť platí předpoklady IP. Potom existují konstanty $C_h, C_\varphi > 0$, tak ,že pro všechna $k \in R_{IP}$ a $\alpha < \overline{\alpha}_{max}$ platí*

$$h(z_k + \alpha d_k) - (1 - 2\alpha(1-\omega))h(z_k) \leq C_h \alpha^2 \|d_k\|^2 \tag{4.29}$$

$$\varphi(z_k + \alpha d_k) - \varphi(z_k) - \alpha \nabla \varphi(z_k)^T d_k \leq C_\varphi \alpha^2 \|d_k\|^2 \tag{4.30}$$

Důkaz: (4.29) plyne bezprostředně z tvrzení 4.3 a předpokladu P1.
(4.30) je komplikovanější pouze o to, že zde je třeba dokázat Lipschitzovskost výrazu derivace $\varphi(\alpha)$ ve směru d_k. Problematický je pouze člen $\mu ln(S_i)e$. Dokážeme, že tento výraz má ve směru Δs_k omezenou druhou derivaci. Tato derivace má tvar:

$$\mu \Delta s^T S^{-2} \Delta s = \mu(\Delta s^T S^{-1})(S^{-1}\Delta s),$$

což je omezené podle tvrzení 4.1. □

Tvrzení 4.5 *Nechť platí předpoklady IP. Potom* $H_k := min\{h : (h, \varphi) \in \Re_k\} > 0\ \forall k$

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí: Pro $k = 0$ výrok zřejmě platí. Předpokládejme, že výrok platí pro nějaké k. Potom pokud $h(z_k) > 0$ a filtr je aktualizován v iteraci k pak $H_{k+1} > 0$ podle pravidla 3.1, protože $\gamma_h \in (0, 1)$. Na druhou stranu, pokud $h(z_k) = 0$ pak podle Tvrzení 3.4 a podle volby α_{min} mohl být krok akceptován pouze pokud splňoval podmínku 3.3, a filtr tedy není aktualizován, tedy $H_{k+1} = H_k > 0$. □

Tvrzení 4.6 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť* z_{k_i} $k_i \in R_{IP}$ *je podposloupnost na níž platí* $(\nabla\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i} < -\epsilon_2$*, kde* $\epsilon_2 > 0$ *nezávisí na i. Potom existuje konstanta* $\overline{\alpha} > 0$ *tak, že pro všechna* k_i *a* $\alpha < \overline{\alpha}$ *platí:*

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) \leq \eta\alpha\nabla(\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i}. \tag{4.31}$$

Důkaz: Platí:

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) - \alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq C_\varphi \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \leq \alpha(1-\eta)\epsilon_2 < -\alpha(1-\eta)\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i},$$

pro $\alpha \leq \min\{\overline{\alpha}_{\max}, \frac{(1-\eta)\epsilon_2}{C_\varphi M_d^2}\}$ □

Tvrzení 4.7 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť* z_{k_i} $k_i \in R_{IP}$ *je podposloupnost na níž platí* $(\nabla\varphi(z_{k_i}))^T d_{k_i} < -\epsilon_2$*,* $\epsilon_2 > 0$ *nezávisí na i. Potom existují konstanty* $c_5, c_6 > 0$ *tak, že:* $(h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}), \varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$ *pro všechna* $\alpha \leq min\{c_5, c_6 h(z_{k_i})\}$.

Důkaz: Nechť $c_5 := \min\{\alpha_{\max}, \epsilon_2/(M_d^2 C_\varphi)\}$ a $c_6 := 2(1-\omega)/(M_d^2 C_h)$.
Mechanismus filtru zajišťuje (viz poznámka 4.4), že

$$(h(z_{k_i}), \varphi(z_{k_i})) \notin \Re_{k_i}$$

pro $\alpha \leq c_5$ máme $\alpha^2 \leq \frac{\alpha\epsilon_2}{M_d^2 C_\varphi} \leq \frac{-\alpha\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}}{C_\varphi \|d_{k_i}\|^2}$, nebo ekvivalentně

$$\alpha\nabla\varphi(z_k)^T d_k + C_\varphi \alpha^2 \|d_{k_i}\|^2 \leq 0$$

a tedy podle (4.30)

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \leq \varphi(z_{k_i}),$$

neboť $\alpha \leq c_5\ \overline{\alpha}_{\max} \leq \alpha_k^{\max}$.
Podobně pro $\alpha \leq c_6 h(z_{k_i}) \leq \frac{2(1-\omega)h(z_{k_i})}{\|d_{k_i}\|^2 C_h}$ máme

$$-2(1-\omega)\alpha h(z_{k_i}) + C_h\alpha^2\|d_{k_i}\|^2 \leq 0$$

a podle (4.29) tedy $h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) \leq h(z_{k_i})$.
A poznámka 4.4 dává výsledek. □

Tvrzení 4.8 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť z_{k_i} je podposloupnost na níž platí $\chi > \epsilon$ pro $\epsilon > 0$ nezávislé na k_i. Potom existuje konstanta $K > 0$, tak, že pro všechna $k_i > K$ filtr není aktualizován v iteraci k_i.*

Důkaz: Podle Tvrzení 4.2 a podle Tvrzení 4.3 pro k_i dostatečně velké platí: $(\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq -\epsilon_2$ a $h(z_{k_i}) < min\{h_{IP}, \frac{\overline{\alpha}}{c_6}, \frac{c_5}{c_6}, (\frac{\tau_1 c_6 \epsilon_2}{\gamma_\varphi})^{\frac{1}{\theta-1}}\}$. (bez újmy na obecnosti $h(z_{k_i}) > 0$).
Definujme $\beta_{k_i} := c_6 h(z_{k_i}) = min\{\overline{\alpha}, c_5, c_6 h(z_{k_i})\}$. Podle dvou tvrzení výše je pro $\alpha_{k_i,l} \leq \beta_{k_i}$ splněna jak Armijova podmínka (4.18) tak přijatelnost pro filtr. Pro $\alpha \geq \tau_1\beta_{k_i} = \tau_1 c_6 h(z_{k_i}) > \frac{\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta}{\epsilon_2}$ tedy $\gamma_\varphi h(z_{k_i})^\theta < \alpha\epsilon_2 \leq -\alpha(\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i}$ a je splněna Podmínka 4.3 a filtr není aktualizován. □

Věta 9 ***(Slabá věta o globální konvergenci)***
Nechť platí předpoklady IP. Potom posloupnost generovaná algoritmem 5 má stacionární hromadný bod.

Důkaz: Předpokládejme, že posloupnost $\{z_{k_i}\}$ nemá žádný stacionární hromadný bod. Potom je filtr podle Tvrzení 4.8 aktualizován jen konečně mnohokrát. Tedy existuje $\widetilde{K}$, že iteraci k_i platí Podmínka 4.3 pokud $k_i > \widetilde{K}$.
Podle Tvrzení 4.3 a Tvrzení 4.2 existuje $\epsilon_2 > 0$ nezávislé na i a $K > \widetilde{K}$ tak, že $\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \leq -\epsilon_2$ pro všechna $k_i > K$
Podle (4.18) pro $k_i > K$ platí

$$\varphi(z_{k_i+1}) - \varphi(z_{k_i}) \leq -\alpha_{k_i}\eta\epsilon_2.$$

Protože φ je zdola omezená musí $\alpha_{k_i} \to 0$.
Vezměme naposled odmítnutou délku kroku α_{k_i,l_i} v iteraci k_i. Tato délka kroku leží v intervalu $[\alpha_{k_i}/\tau_2, \alpha_{k_i}/\tau_1]$. Tato délka kroku mohla být zamítnuta pouze ze dvou důvodů. Buď

$$\varphi(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}) - \varphi(z_{k_i}) > \alpha_{k_i,l_i}\eta\nabla\varphi(z_{k_i})^T d_{k_i} \tag{4.32}$$

nebo

$$(h(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}), \varphi(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i})) \in \Re_{k_i} = \Re_{\widetilde{K}}. \tag{4.33}$$

Důkaz uzavřeme tím, že ukážeme, že ani (4.32) ani (4.33) nemůže platit pro dostatečně

velké k_i
Ad (4.32): Jelikož $\lim_i \alpha_{k_i} = 0$ platí také $\lim_i \alpha_{k_i,l_i} = 0$ Podle tvrzení 4.6 máme výsledek.
Ad (4.33): Nechť $H_{\widetilde{K}} := \min\{h : (h,\varphi) \in \Re_{\widetilde{K}}\}$. Podle Tvrzení 4.5 $H_{\widetilde{K}} > 0$. Podle (4.29) a podle tvrzení 4.1 máme $h(z_{k_i} + \alpha_{k_i,l_i} d_{k_i}) \leq (1-\alpha[2(1-\omega)])h(z_{k_i}) + C_h\alpha^2 M_d^2$. Protože $\lim_i h(z_{k_i}) = 0 \to 0$ a $\lim_i \alpha_{k_i,l_i} = 0$, platí pro dostatečně velké k_i $h(z_{k_i} + \alpha d_{k_i}) < H_k$, což je spor. □

Stejně jako v kapitole o metodě nehladkých rovnic se nyní vrátíme k předpokladu P3. Můžeme obdobně změnit definici vstupů filtru a v toleranci porušení přípustnosti použít normu celé pravé strany. Tedy:

$$h_3(z) := \frac{1}{2}(\sigma_1\|g(z)\|^2 + \sigma_2\|S_I U_I e - \mu e\|^2) + h_1(z) \tag{4.34}$$

Stejně jako u metody nehladkých rovnic bude metoda globálně konvergentní podle Tvrzení 4.2 a předpoklad P3 bude splněn při platnosti postačující podmínek druhého řádu. Bohužel takto definovaná metoda bude také trpět stejnými problémy - vyšší výpočetní náročnost a větší pravděpodobnost konvergence do sedlového bodu.

Možnosti popsané u metody nehladkých rovnic lze použít i zde. Vraťme se k původní definici vstupů filtru respektive k definici podle poznámky 4.1.

Podmínka 4.4 *Řekneme, že v iteraci z_k je splněna SRI-podmínka platí-li:*

$$h(z_k) < \varepsilon_{SRI}(\sigma_1\|g(z_k)\| + \sigma_2\|(S_I U_I)_k e - \mu_k e\|) \tag{4.35}$$

$$-\nabla\varphi^T(z_k)d_k < min\{\varepsilon_{RSI}(H_k)^\kappa, \varepsilon_{SRI}\|g(z_k)\|, \varepsilon_{SRI}\} \tag{4.36}$$

H_k je definováno v Tvrzení 4.5
$\varepsilon_{SRI} > 0$ velmi malé.
$\kappa \in (0,1)$
$\theta > \kappa + 1$
kde θ je definováno v Podmínce 4.3.

Algoritmus 6 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2, ε_{SR}*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*

2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*

3. *Spočti směrový vektor* $\widetilde{d}_k$ *z rovnic (4.10), (4.10) a (4.11). Pokud je splněna SRI-podmínka proveď restart: nastav* $\hat{G} = \hat{D}$ *(*$\hat{D}$ *podle (2.4)) a spočti nový směr.*

4. *volba délky kroku*

5. *Akceptuj novou iteraci.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 4.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (4.17) ani podmínka 4.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak* $\Re_{k+1} := \Re_k$.

7. $k \leftarrow k+1$ *Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr a splňující podmínku 4.1, zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

Algoritmus 7 *Data:* $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h, \varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ *- inicializovaný filtr,* γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2, ε_{SR}

1. *Inicializace:* $k \leftarrow 0$

2. *Test konvergence: Jestliže* z^k *splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s* z^k*, jako výsledkem.*

3. *Spočti směrový vektor* $\widetilde{d}_k$ *z rovnic (4.10), (4.10) a (4.11). Pokud je splněna SRI-podmínka přejdi na krok 9.*

4. *volba délky kroku*

5. *Akceptuj novou iteraci.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 4.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (4.17) ani podmínka (4.3) (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak* $\Re_{k+1} := \Re_k$.

7. $k \leftarrow k+1$ *Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr a splňující podmínku 4.1 zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

9. *fáze obnovení stacionarity: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr, splňující podmínku 1 a nesplňující SR-podmínku (4.35) zmenšením* $Q(x, u) := \sigma_1 \frac{1}{2}\|g(x, u)\|^2 + \sigma_2 \frac{1}{2}\|S_I U_I e - \mu e\|^2 + \frac{1}{2}\|c_I(x) + s_I\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(x)\|^2$ *a aktualizuj filtr podle pravidla 4.1. A jdi na krok 7.*

Důkaz slabé věty o globální konvergenci je stejný jako důkaz Věty 6. Jedinou odlišností je nutnost ohlídat platnost vztahu $\alpha_k \leq \alpha_k^{\max}$. Protože však $\overline{\alpha}_{\max} > 0$ není to problém, jak je patrno z důkazu Věty 9.

Věta 10 ***Slabá věta o globální konvergenci****
Nechť platí předpoklady IP s výjimkou předpokladu IP3 potom posloupnost generovaná algoritmem 6 resp. algoritmem 7 má stacionární hromadný bod.

Poznámka 4.7 *Silnější výsledek jako ($\lim_k \chi(z_k) = 0$) nelze dokázat, protože libovolně blízko přípustného bodu může být zavolána fáze obnovení přípustnosti. Tento problém odstraníme v další části.*

4.4.2 Lokální konvergence a silná věta o globální konvergenci

V této podkapitole předpokládáme platnost všech předpokladů IP. Nicméně algoritmus v této podkapitole lze modifikovat stejně jako výše, bez ztráty výsledků zde dokázaných.

Jak jsme se zmínili v kapitole 1 filtrové metody mohou trpět Maratosovým jevem a nemusí proto dosahovat superlineární konvergence. V této sekci navrhneme dvou filtrovou variantu algoritmu 5, o které se dá dokázat superlineární konvergence a netrpí problémem popsaným v poznámce 4.7.

Definice 4.6

$$Q(z_k) := \frac{1}{2}\|g(z_k)\|^2 + \frac{1}{2}\|S_I U_I e\|^2 + \frac{1}{2}\|c_I + s_I\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(z_k)\|^2 \tag{4.37}$$

Podmínka 4.5 *Řekneme, že v iteraci z_k je splněna SL-podmínka pokud platí:*

$$Q(z_k(0)) - Q(z_k(1)) \geq \gamma_{SL} Q(z_k(0)) \tag{4.38}$$

$\gamma_{SL} \in (0,1)$

Pravidlo 4.2

$\Re_Q^{k+1} := \{(Q,\varphi); Q > Q(z_k) - \gamma_{SL} Q(z_k), \varphi > min\{\varphi(z_k) - \gamma_{SL} Q(z_k), min\{\varphi, (Q,\varphi) \in \Re_Q^k\}\}\}$

Takto definovaný filtr je filtrem jen v tom smyslu, že stejně jako dříve používané filtry definuje určitou zakázanou oblast, kde nemůže dojít k restartu původního filtru. Ve skutečnosti však do paměti ukládáme pouze jednu dvojici čísel.

Algoritmus 8 *Data: $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h,\varphi) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ - inicializovaný filtr, $\Re_Q^0 = \emptyset$ γ_h, γ_φ, γ_{SL}, η, τ_1, τ_2*

1. *Inicializace: $k \leftarrow 0$*
2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*
3. *Spočti směrový vektor $\widetilde{d}_k$ z rovnic (4.10), (4.10) a (4.11). Pokud $0 < -\gamma \frac{s_k}{\Delta s_k} < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8.*
4. *volba délky kroku -*
   (4.0) Pokud je splněna SL-podmínka (4.38) a $z_k(1) \notin \Re_Q^k$ potom:
   (i)$\Re_k := \Re_0$ - restart filtru

(ii)aktualizuj $\Re_Q^k$ podle pravidla 4.2
(iii)akceptuj iteraci $z_k + d_k$ $k \leftarrow k+1$ a jdi na krok 2.
(4.1) nastav $\alpha_{k,0} = \alpha_{max}$, $\alpha_h = 0$ a $l \leftarrow 0$
(4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$ a $\alpha_h < \alpha_{min}$, přejdi na krok 8, pokud $\alpha_{k,l} < \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k)d_k}$ a $\alpha_h \geq \alpha_{min}$, jdi na krok 5 s α_h, jinak spočti $z_k(a_{k,l})$
(4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k$, odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)
(4.4) Pokud platí podmínka (4.16) a $\alpha_h = 0$ nastav $\alpha_h = \alpha_{k,l}$, pokud platí Podmínka 4.3, přejdi na krok 5
(4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1\alpha_{k,l}, \tau_2\alpha_{k,l}]$ a jdi na krok (4.2)

5. *Akceptuj novou iteraci.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 4.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (4.17) ani podmínka 4.3 (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak $\Re_{k+1} := \Re_k$.*

7. *$k \leftarrow k+1$ Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi z_{k+1} přijatelné pro filtr a splňující podmínku 4.1, zmenšením h(.). Jdi na krok 6.*

Věta 11 *Nechť platí předpoklady IP. Nechť $\omega_k :=\rightarrow 0$, když $\|F(z_k)\| \rightarrow 0$, nechť $\mu(z) = o(\|F(z)\|)$ a nechť $\|r\| \leq M_1\|F(z_k)\|^{1+\delta}$ pro nějaké kladné konstanty M_1 a δ. r, ω_k a $F(.)$ definovány v kapitole 2). Potom je metoda podle algoritmu 8 lokálně superlineárně konvergentní.*

Důkaz: Podle [8] je Newtonova metoda je za těchto předpokladů lokálně superlineárně konvergentní. Tedy platí:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|z_{k_i} + d_{k_i} - z^*\|}{\|z_{k_i} - z^*\|} \rightarrow 0$$

A podle předpokladu IP1:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\|}{\|F(z_{k_i})\|} \rightarrow 0$$

na každé posloupnosti z_{k_i}, která konverguje k řešení. Protože $\gamma_{SL} \in (0,1)$, existuje $\bar{i}$ tak, že pokud $i \geq \bar{i}$ platí

$$\|F(z_{k_i} + d_{k_i})\| \leq [1 - \gamma_{SL} - (\gamma_{SL} - 1)o(1)]\|F(z_{k_i})\|.$$

Definujme

$$\widetilde{F}(z) := \begin{bmatrix} g \\ S_I U_I e \\ c_I + s_I \\ c_E \end{bmatrix}$$

a následně (neboť $Q(z) = \frac{1}{2}\|\widetilde{F}(z)\|^2$)

$$\frac{Q(z_{k_i}+d_k)-Q(z_{k_i})}{Q(z_{k_i})} = \frac{(\|\widetilde{F}(z_{k_i}+d_{k_i})\|-\|\widetilde{F}(z_{k_i})\|)(\|\widetilde{F}(z_{k_i}+d_{k_i})\|+\|\widetilde{F}(z_{k_i})\|)}{\|\widetilde{F}(z_k)\|^2}$$

$$\leq \frac{\|\widetilde{F}(z_{k_i}+d_{k_i})\|-\|\widetilde{F}(z_{k_i})\|}{\|\widetilde{F}(z_k)\|} \leq \frac{\|F(z_{k_i}+d_{k_i})\|-\|F(z_{k_i})\|+\mu}{\|F(z_k)\|-\mu} \overset{\frac{\mu(z)}{F(z_k)}=o(1)}{\leq} \quad -\gamma_{SL},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 12 ***Silná věta o globální konvergenci***
Nechť platí předpoklady IP. Potom každý hromadný bod generovaný algoritmem 8 je stacionární.

Důkaz: Důkaz je zcela identický jako pro metodu nehladkých rovnic. □

Poznámka 4.8 *Filtr lze restartovat i v kroku 5, aniž bychom ztratili výsledek o globální nebo lokální konvergenci. Následně bude algoritmus dovolovat delší kroky.*
krok 5: Akceptuj novou iteraci $z_{k+1} := z_k(\alpha_k)$.
pokud $z_{k+1} \notin \Re_Q^k$ *potom*
(i)$\Re_k := \Re_0$ *- restart filtru*
(ii) Aktualizuj $\Re_Q^k$ *podle pravidla 4.2.*

4.4.3 Bariérový filtr s $\mu_k \to 0$

Idea restartu filtru, jak je popsána v poznámce 4.8, nám umožní dokázat konvergenci modifikovaného algoritmu s bariérovým filtrem pro $\mu_k \to 0$, tedy konvergenci k řešení skutečného optimalizačního problému.
Označme μ_k^+ novou hodnotu μ v již přijaté iteraci z_{k+1} spočtenou podle (4.1).

Definice 4.7 *Označme $\Re_k^\mu$ filtr v iteraci k pro hodnotu parametru μ a $\varphi_\mu(z_k)$ hodnotu prvního vstupu filtru v bodě z_k pro hodnotu parametru μ.*
Dále $Q(z_k)(\mu) := \frac{1}{2}\|g(z_k)\|^2 + \frac{1}{2}\|S_I U_I e - \mu e\|^2 + \frac{1}{2}\|c_I + s_I\|^2 + \frac{1}{2}\|c_E(z_k)\|^2$

Pravidlo 4.3 $\Re_{Q(\mu)}^{k+1} := \{(Q(\mu), \varphi); Q(\mu) > Q(z_k)(mu) - \gamma_{SL} Q(z_k)(\mu), \varphi_\mu > min\{\varphi_\mu(z_k) - \gamma_{SL} Q(z_k)(\mu), min\{\varphi_\mu, (Q(\mu), \varphi_\mu) \in \Re_{Q(\mu)}^k\}\}\}$

Pro aktualizaci obou filtrů po změně bariérového parametru bude třeba ukládat do paměti navíc následující čísla příslušná k bodům, které filtry obsahují, $ln(S_I)e$ pro filtr $\Re$ a $\sum s_i u_i$ (pro euklidovskou normu) pro filtr $\Re_Q$. Po změně μ potom všechny hodnoty filtru přepočteme, aby vyhovovaly novému problému. Po tomto přepočtení mohla u původního filtru ze začátku kapitoly nastat situace, kdy neplatí ekvivalent poznámky 3.1. Tomuto se musíme vyhnout, ale zároveň umožnit, aby μ konvergovalo k nule. Algoritmus nyní modifikujeme následujícím způsobem:

Algoritmus 9 *Data:* $z^0 \in R^n$, $\Re_0 = \{(h, \varphi_\mu) \in R^2 : h \geq h_{max}\}$ *- inicializovaný filtr,* γ_h, γ_φ η, τ_1, τ_2

1. *Inicializace:* $k \leftarrow 0$
2. *Test konvergence: Jestliže z^k splňuje KKT podmínky, ukonči algoritmus s z^k, jako výsledkem.*
3. *Spočti směrový vektor $\widetilde{d}_k$ z rovnic (4.10), (4.10) a (4.11). Pokud* $0 < -\gamma\frac{s_k}{\Delta s_k} < \alpha_{min}$, *přejdi na krok 8.*
4. *volba délky kroku -*
   (4.1) nastav $\alpha_{k,0} = 1$, $\alpha_h = 0$ *a* $l \leftarrow 0$
   (4.2) pokud $\alpha_{k,l} < \alpha_{min}$ *a* $\alpha_h < \alpha_{min}$, *přejdi na krok 8, pokud* $\alpha_{k,l} < \frac{\gamma_\varphi h(z_k)^\theta}{-\nabla\varphi(z_k)d_k}$ *a* $\alpha_h \geq \alpha_{min}$, *jdi na krok 5 s* α_h, *jinak spočti* $z_k(a_{k,l})$
   (4.3) Pokud $z_k(a_{k,l}) \in \Re_k^{\mu_k}$, *odmítni délku kroku a přejdi na (4.5)*
   (4.4) Pokud platí podmínka (4.16) a $\alpha_h = 0$ *nastav* $\alpha_h = \alpha_{k,l}$, *pokud platí Podmínka 4.3 , přejdi na krok 5*
   (4.5) Vyber novou délku kroku $\alpha_{k,l+1} \in [\tau_1\alpha_{k,l}, \tau_2\alpha_{k,l}]$ *a jdi na krok (4.2)*
5. *Akceptuj novou iteraci* $z_{k+1} := z_k(\alpha_k)$.
   pokud $z_{k+1} \notin \Re_{Q(\mu_k)}^k$ *potom*
   (i)$\Re_k^{\mu_k} := \Re_0$ *- restart filtru*

(ii) Aktualizuj $\Re^k_{Q(\mu_k)}$ *podle pravidla 4.3.*

Polož $\mu_{k+1} := \mu_k^+$ *pokud* $(\varphi_{\mu_k^+}(z_{k+1}), h(z_{k+1})) \notin \Re^{\mu_k^+}_{k+1}$ *jinak* $\mu_{k+1} := \mu_k$*. Přičemž* $\Re^{\mu}_{k+1}$ *je definováno v následujícím kroku.*

6. *Aktualizuj filtr podle pravidla 3.1, pokud nebyla v kroku 4.4 splněna nerovnost (4.17) ani podmínka 4.3 a pokud nebyl filtr restartován v kroku 5. (tedy i po fázi obnovení přípustnosti). Jinak* $\Re^{\mu_{k+1}}_{k+1} := \Re^{\mu_{k+1}}_{k}$.

7. $k \leftarrow k+1$ *Jdi na krok 2.*

8. *fáze obnovení přípustnosti: Najdi* z_{k+1} *přijatelné pro filtr a splňující podmínku 4.1, zmenšením* $h(.)$*. Jdi na krok 6.*

Věta 13 ***Slabá věta o globální konvergenci***$^\diamond$
Nechť platí předpoklady IP. Nechť $\mu_k > 0$ *a* $\mu_k \to 0$ *potom z posloupnosti generované algoritmem 9 lze vybrat podposloupnost konvergující k řešení problému (NP).*

Důkaz: Podle Slabé věty o globální konvergenci bude filtr v kroku 5 jistě restartován pro každé μ. Předpoklad $\mu_k \to 0$ může tedy být dobře splněn. Zároveň platí ekvivalent poznámky 4.4, což byl problém, který jsme chtěli vyřešit. Dále je tedy důkaz zcela stejný jako u Věty 9. $\square$

5 Numerické výsledky

Metody byly realizovány v programu UFO (universal functional optimization). Nebyla použita žádná fáze obnovení přípustnosti - pokud nebyla nalezena vyhovující délka kroku, byl výpočet označen jako neúspěšný a problém nebyl dále řešen. Algoritmy 1 a 5 byly testovány na třech sadách problémů. Tyto problémy jsou modifikací problémů pro minimalizaci s rovnostními omezeními převzatých z [15]. V první sadě jsou rovnosti $c(x) = 0$ nahrazeny nerovnostmi $c(x) \geq 0$. V druhé sadě jsou rovnosti $c(x) = 0$ nahrazeny nerovnostmi $c(x) \leq 0$. A konečně třetí sada obsahuje nerovnosti $-1 \leq x \leq 1$ a $-1 \leq c(x) \leq 1$. Výsledky testů jsou shrnuty v tabulkách 1-6. Přičemž v tabulkách 1-3 jsou výsledky pro metodu vnitřního bodu a v tabulkách 4-6 výsledky pro metodu nehladkých rovnic. M označuje použitou metodu, přičemž

F Filtrový algoritmus se vstupy po vzoru Fletcherova-Leyfferova filtru.

P Algoritmus používající pro volbu délky kroku pokutovou funkci

M Algoritmus používající pro volbu délky kroku takzvaný Markovův filtr viz [16]. Tedy filtr jenž obsahuje jen jednu dvojici vstupů.

B Filtrový algoritmus používající pro volbu délky kroku bariérový filtr. Jde o modifikovaný algoritmus 5 - $\mu_k \to 0$ a filtr je přepočítáván po každé změně μ. Idea restartu filtru není použita!

NIT označuje celkový počet iterací, NFV celkový počet vyhodnocování funkčních hodnot, NFG je celkový počet vyhodnocování gradientů (NFG je mnohem větší než NIT, jelikož druhé derivace jsou počítány užitím diferencí gradientů), NCG je celkový počet iterací metody sdružených gradientů a NFAIL je počet nevyřešených problémů v dané sadě. Každá řádka obsahuje součet výsledků všech problémů.

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	578	650	4108	12855	3.75	-
P	550	593	3936	21806	4.56	-
M	580	606	4121	12841	3.75	-
B	622	805	4402	15108	4.28	2

Tabulka 1

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	408	467	2975	5630	2.44	-
P	476	925	3403	5654	3.24	-
M	419	457	3061	5722	2.36	-
B	522	627	3843	9565	2.86	2

Tabulka 2

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	535	632	3920	2761	6.86	-
P	572	699	4294	3670	7.45	-
M	530	620	3882	2618	6.84	-
B	526	654	3849	2875	7.27	-

Tabulka 3

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	738	767	7099	15294	5.66	-
P	745	778	7192	14295	5.84	-
M	881	900	8079	28806	7.30	-

Tabulka 4

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	622	1360	4403	12453	4.02	1
P	411	1175	2958	12323	3.95	1
M	385	401	2804	9849	2.88	-

Tabulka 5

M	NIT	NFV	NFG	NCG	TIME	NFAIL
F	471	588	3588	5100	5.20	-
P	435	515	3272	4914	5.09	-
M	543	678	4050	6418	5.40	-

Tabulka 6

6 Závěry

V této práci jsme popsali realizaci Metody nehladkých rovnic a Metody vnitřního bodu. Ukazuje se, že metody nehladkých rovnic mohou konkurovat metodám vnitřního bodu.
Zajímavé jsou výsledky při použití Markovova filtru. Tato metoda dává srovnatelné výsledky s mnohem sofistikovanějšími metodami a často je i předčí. Tento výsledek dává za pravdu minimalistickému přístupu Fletchera a Leyffera popsanému v úvodní kapitole.
Pozoruhodné jsou také výsledky bariérového filtru. Ačkoliv jsme nepoužili navrhovanou strategii pro odstranění problémů s aktualizací bariérového parametru, metoda neselhala tak často, jak se dalo očekávat. Tato skutečnost dává naději, že strategie navržená v části 4.4.3, bude efektivní.
Důležitá je také skutečnost, že absence fáze obnovení přípustnosti neměla v podstatě žádný vliv na výsledky. Filtrový přístup se tak ukazuje jako velmi rozumný.

Reference

[1] L.Lukšan, J.Vlček: Indefinitely Preconditioned Inexact Newton Method for Large Sparse Equality Constrained Nonlinear Programming Problems. Numerical Linear Algebra with Applications, 5, 219-247, 1998.

[2] L.Lukšan, J.Vlček: Introduction to nonsmooth analysis. Theory and algorithms. Technical Report DMSIA 00/1 (serie didattica), Universita degli Studi di Bergamo, 2000.

[3] Ladislav Lukšan, Ctirad Matonoha, Jan Vlček: Nonsmoth Equation Method for Nonlinear Nonconvex Optimization. Institute of Computer Science AVČR, Pod vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8
and Technical University of Liberec, Hálkova 6, 461 17 Liberec, Czech Republic.

[4] Andreas Wächter, Lorentz T. Biegler: Global and Local Convergence of Line Search Filter Methods for Nonlinear Programing. CAPD Technical Report B-01-09, Department of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, 2001, revised 2002.

[5] L.Lukšan, J.Vlček: Sparse and partially separable test problems for unconstrained and equality constrained optimization. Report V-767. Prague, ICS AS CR, 1998.

[6] L.Lukšan, C.Matonoha, J.Vlček: Interior-point method for nonlinear nonconvex optimization. To appear in Numerical Linear Algebra with Applications, 2004.

[7] J.Vanderbei, D.F.Shanno: An interior point algorithm for nonconvex nonlinear programming. Computational Optimization and Applications, 13, 231-252, 1999.

[8] R.H. Byrd, G. Liu, J. Nocedal: On the Local Behavior of an Interior Point Method for Nonlinear Programming, Report 98/02 (1998).

[9] Roger Fletcher, Sven Leyffer: Nonlinear Programming without penalty function. University of Dundee Numerical Analysis Report, NA/171 22 September 1997, revised 22 December 1998, revised 24 August 2000.

[10] Roger Fletcher, Sven Leyffer and Philippe L. Toint: On the Global Convergence of a Filter-SQP Algorithm. Numerical Analysis Report NA/197, October 2000.

[11] C.Keller, N.I.M.Gould, A.J.Wathen: Constraint preconditioning for indefinite linear systems. SIAM J. on Matrix Analysis and Applications, 21, 1300-1317, 2000.

[12] P.E.Gill, W.Murray: Newton type methods for nconstrained and linearly constrained optimization. Mathematical Programming, 7, 311-350, 1974.

[13] Michael Ulbrich, Stefan Ulbrich, Luis N. Vincent: A Globally Convergent Primal-Dual Interior-Point Method for Nonlinear Programming. Department of Computional and Applied Mathemtics -MS134, (April 2000, Revised February 2002).

[14] Stefan Ulbrich: On the superlinear local convergence of a filter-SQP method. Zentrum Mathematik Technische Universität München, Technical Report, October 2002.

[15] L.Lukšan, J.Vlček: Sparse and partially separable test problems for unconstrained and equality constrained optimization. Report V-767. Prague, ICS AS CR, 1998.

[16] Hande Y. Nenson, David F Shanno and Robert J. Vanderbei: Interior-Point Methods for Nonconvex Nonlinear Programming: Filter Methods and Merit Functions. Operations Research and Financial Engineering, Princton University, ORFE-00-06.

[17] Lukšan L., Vlček J.: Interior point method for nonlinear nonconvex optimization. To appear in Numerical Linear Algebra with Applications.

[18] Ladislav Lukšan, Ctirad Matonoha, Jan Vlček: Interior point methods for large-scale nonlinear programming. Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Pod vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8 and Technical University of Liberec, Hálkova 6, 461 17 Liberec