Úvod do funkcionální analýzy

Ladislav Lukšan
Ústav informatiky AV ČR, Pod vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8
Technická universita v Liberci, Hálkova 6, 461 17 Liberec

Tento text byl použit jako podklad pro stejnojmennou přednášku v předmětu Matematika 6 B na Technické Universitě v Liberci (TUL). Tím byl podmíněn výběr látky a způsob výkladu. Protože se na TUL neprobírá teorie Lebesgueova integrálu ani hlubší partie teorie množin a topologie, uvádím některá tvrzení bez důkazů. Hloubavý čtenář nalezne tyto důkazy spolu s dalšími partiemi funkcionální analýzy v doporučené literatuře:

A.E.Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha 1973.

A. Kufner: Geometrie Hilbertova prostoru. SNTL, Praha 1973.

J. Nagy: Vybrané partie z moderní matematiky, SNTL, Praha 1976.

W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha 1977.

J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy. Karolinum, Praha 1998.

Funkcionální analýza vznikla na základě snahy zobecnit pojmy klasické analýzy (zejména pojmy konvergence a spojitosti) na obecnější prostory a objekty. V tomto textu se budeme zabývat vlastnostmi topologických, metrických, Banachových a Hilbertových prostorů (jsou seřazeny od obecnějších ke speciálnějším) a lineárními objekty v těchto prostorech. V textu jsou často použity kvantifikátory $\forall$ (pro každý) a $\exists$ (existuje).

1 Metrické prostory

1.1 Základní pojmy

Definice 1 *Nechť X je množina a $\rho : X \times X \to R$ je reálná funkce taková, že*

(a) $\rho(x,y) \geq 0$
$\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(c) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Pak řekneme, že (X,ρ) je metrickým prostorem. Funkce ρ se nazývá metrika.

Příklad 1 Nechť C je množina komplexních čísel a $\rho(x,y) = |x-y|\ \forall x,y \in C$. Pak platí (a)-(c) a (C,ρ) je metrickým prostorem.

Příklad 2 Nechť R^n je množina n-rozměrných reálných vektorů (budeme používat označení $x = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $y = (\eta_1,\dots,\eta_n)$, $z = (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$), $p \geq 1$ a

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x,y \in R^n$$

Pak platí (a)-(c) a (R^n,ρ) je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé. Pro $p = 1$ plyne (c) z vlastností absolutní hodnoty (jako v příkladu 1). Abychom dokázali (c) pro $p > 1$, dokážeme nejprve Hölderovu nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

kde $1/p + 1/q = 1$, která platí pro $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$. Položme

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Pokud $A = 0$ nebo $B = 0$, platí Hölderova nerovnost triviálně. Budeme tedy předpokládat, že $A \neq 0$ a $B \neq 0$. Z vlastností exponenciální funkce plyne, že existují čísla u_k, v_k taková, že

$$\frac{a_k}{A} = \exp\left(\frac{u_k}{p}\right), \quad \frac{b_k}{B} = \exp\left(\frac{v_k}{q}\right)$$

Z konvexity exponenciální funkce plyne nerovnost

$$\exp\left(\frac{u_k}{p} + \frac{v_k}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\exp(u_k) + \frac{1}{q}\exp(v_k)$$

neboli

$$\left(\frac{a_k}{A}\right)\left(\frac{b_k}{B}\right) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a_k}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b_k}{B}\right)^q$$

a sečtením dostaneme

$$\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{1}{p}\frac{1}{A^p}\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q}\frac{1}{B^q}\sum_{k=1}^{n} b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Vynásobením této rovnosti číslem AB a dosazením za A a B dostaneme Hölderovu nerovnost. Nyní dokážeme Minkovského nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

kde $p > 1$ a $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$. Použitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

což po sečtení dává

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

neboť z $1/p + 1/q = 1$ plyne $p + q = pq$ a tedy $(p-1)q = pq - q = p$. Dělíme-li tuto nerovnost posledním výrazem na její pravé straně a přihlédneme-li k tomu že $1 - 1/q = 1/p$ dostaneme Minkovského nerovnost. Nyní použijeme Minkovského nerovnost k důkazu trojúhelníkové nerovnosti. Platí

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\zeta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k-\zeta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x,y)+\rho(y,z)
\end{aligned}$$

V R^n se zpravidla používá eukleidovská metrika, kdy $p = q = 2$.

Příklad 3 Nechť l_p, $p \geq 1$, je množina posloupností reálných čísel (budeme používat označení $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$, $z = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots\}$) takových, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p < \infty \quad \forall x \in l_p$$

Položme

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x, y \in l_p$$

Pak platí (a)-(c) a (l_p, ρ) je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 2. Používá se přitom Minkovského nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

která platí pro nezáporné posloupnosti $\{a_k\} \subset l_p$, $\{b_k\} \subset l_p$ a kterou dostaneme z Minkovského nerovnosti z příkladu 2 limitním přechodem $n \to \infty$ (součty na obou stranách této nerovnosti jsou podle definice prostoru (l_p, ρ) konečné). Nejčastěji se používá prostor l_2, který má velmi výhodné vlastnosti (jak uvidíme později, je l_2 Hilbertovým prostorem).

Příklad 4 Nechť l_∞ je množina všech posloupností reálných čísel (budeme používat označení $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$, $z = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots\}$) takových, že

$$\sup_{k \in N} |\xi_k| < \infty \quad \forall x \in l_\infty$$

Položme

$$\rho(x, y) = \sup_{k \in N} |\xi_k - \eta_k| \quad \forall x, y \in l_\infty$$

Pak platí (a)-(c) a (l_∞, ρ) je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sup_{k \in N} |\xi_k - \zeta_k| \leq \sup_{k \in N} (|\xi_k - \eta_k| + |\eta_k - \zeta_k|) \\ &\leq \sup_{k \in N} |\xi_k - \eta_k| + \sup_{k \in N} |\eta_k - \zeta_k| \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

Příklad 5 Nechť $C[a, b]$ je množina všech funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ a

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} (|x(t) - y(t)|) \quad \forall x, y \in C[a, b]$$

Pak platí (a)-(c) a $(C[a, b], \rho)$ je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \max_{t \in [a, b]} (|x(t) - z(t)|) \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} (|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|) \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} (|x(t) - y(t)|) + \max_{t \in [a, b]} (|y(t) - z(t)|) \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

Příklad 6 Nechť $\mathcal{L}_p[a,b]$, $p \geq 1$, je množina všech funkcí, jejichž p-tá mocnina je integrovatelná (v Lebesgueově smyslu) na intervalu $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ a platí

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \quad \forall x \in \mathcal{L}_p[a,b]$$

Nechť $L_p[a,b]$ je množina tříd funkcí z $\mathcal{L}_p[a,b]$ (třídy označujeme vlnovkou), přičemž $x_1 \in \tilde{x}$, $x_2 \in \tilde{x}$, pokud $x_1 = x_2$ skoro všude v $[a,b]$, a

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}$$

Pak platí (a)-(c) a $(L_p[a,b],\rho)$ je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé, (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 2. Používá se přitom Minkovského nerovnost

$$\left(\int_a^b (a(t)+b(t))^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b a^p(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b b^p(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

která platí pro nezáporné funkce $a(t) \subset L_p[a,b]$, $b(t) \subset L_p[a,b]$. Nejčastěji se používá prostor $L_2[a,b]$, který má velmi výhodné vlastnosti (jak uvidíme později, je $L_2[a,b]$ Hilbertovým prostorem).

Příklad 7 Nechť $\mathcal{L}_\infty[a,b]$ je množina všech funkcí omezených skoro všude v $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, takže

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{L}_\infty[a,b]$$

(výraz na levé straně je nejmenší číslo $c \geq 0$ takové, že množina těch $t \in [a,b]$, pro něž $|x(t)| > c$, má Lebesgueovu míru nula). Nechť $L_\infty[a,b]$ je množina tříd funkcí z $\mathcal{L}_\infty[a,b]$ (třídy označujeme vlnovkou), přičemž $x_1 \in \tilde{x}$, $x_2 \in \tilde{x}$ pokud $x_1 = x_2$ skoro všude v $[a,b]$ a

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| - y(t)| \quad \forall x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}$$

Pak platí (a)-(c) a $(L_\infty[a,b],\rho)$ je metrickým prostorem. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé, (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 5.

Definice 2 *Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Množinu*

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

nazveme otevřenou koulí se středem v bodě $x \in X$ a poloměrem $\varepsilon > 0$.

Definice 3 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $G \subset X$. Jestliže $\forall x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subset G$, řekneme, že množina $G \subset X$ je otevřená. Nechť $F \subset X$. Jestliže množina $X \backslash F \subset X$ je otevřená, řekneme, že množina F je uzavřená (symbolem $X \backslash F$ označujeme doplněk množiny F v X).*

Věta 1 *Platí toto:*

(a) Množiny X a $\emptyset$ (celý prostor a prázdná množina) jsou otevřené.

(b) Jsou-li $G_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$, otevřené, je $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ otevřená.

(c) Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz: (a) Podle definice 2 leží každá otevřená koule v X. Prázdna množina neobsahuje žádný bod, takže definice 3 je pro ní v pořádku.

(b) Nechť $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ a $x \in G$. Pak $x \in G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Jelikož G_i, $1 \leq i \leq n$, jsou otevřené, existují čísla $\varepsilon_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, taková že $B(x, \varepsilon_i) \subset G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Položíme-li $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, platí $B(x, \varepsilon) \subset G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$ a tedy $B(x, \varepsilon) \subset G$.

(c) Nechť x leží v sjednocení G otevřených množin. Pak x leží alespoň v jedné z nich spolu s nějakou otevřenou koulí $B(x, \varepsilon)$. Pak ale $B(x, \varepsilon)$ leží také v G.

Příklad 8 Konečnost počtu množin v (b) je podstatná. Uvažujme metrický prostor (R^n, ρ) z příkladu 2. Nechť

$$G_i = B\left(0, 1 + \frac{1}{i}\right) \quad \forall i \in N$$

Pak

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{x \in R_n : \rho(x, 0) \leq 1\}$$

a tato množina (uzavřená jednotková koule) není otevřená.

Důsledek 1 Platí toto:

(a) Množiny X a $\emptyset$ jsou uzavřené.

(b) Jsou-li $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$, uzavřené, je $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ uzavřená.

(c) Průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

(plyne to z věty 1 a De Morganových pravidel).

Vlastnosti otevřených množin jsou základním prostředkem pro vyšetřování konvergence posloupností a spojitosti zobrazení. Při zavádění otevřených množin se často obejdeme bez metriky. Proto má velký význam pojem topologického prostoru.

Definice 4 *Nechť X je množina a $\mathcal{T}$ je systém podmnožin X takových, že*

(a) $X \in \mathcal{T}$ a $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(b) Jestliže $G_i \in \mathcal{T}$, $1 \leq i \leq n$, pak $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

(c) Sjednocení libovolného počtu množin z $\mathcal{T}$ je prvkem $\mathcal{T}$.

Pak řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je topologickým prostorem. Množiny $G \in \mathcal{T}$ nazýváme otevřenými množinami. Jestliže $G \in \mathcal{T}$ a $F = X \setminus G$, řekneme, že množina F je uzavřená.

Definice 5 *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $x \in G \in \mathcal{T}$. Pak řekneme, že G je okolím bodu x. Systém všech okolí bodu x označíme $\mathcal{O}(x)$. Platí tedy $\mathcal{O}(x) = \{G \in \mathcal{T} : x \in G\}$.*

Definice 6 *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Jestliže $\forall x \in X$ a $\forall G \in \mathcal{O}(x)$ existuje $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ tak, že $B \subset G$, řekneme, že $\mathcal{B}$ je báze topologie $\mathcal{T}$.*

Poznámka 1 Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je báze topologie $\mathcal{T}$. Pak $G \in \mathcal{T}$ právě tehdy, jestliže pro libovolný prvek $x \in G$ existuje $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ tak, že $B \subset G$.

Poznámka 2 Systém otevřených koulí $B(x, \varepsilon)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, je bází topologie v metrickém prostoru (X, ρ) (dokonce když $\varepsilon > 0$ jsou racionální).

Definice 7 *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $A \subset X$. Vnitřkem A^0 množiny A nazveme největší otevřenou množinu obsaženou v A, neboli*

$$A^0 = \bigcup_{G \subset A} G, \quad G - \text{otevřené}$$

Uzávěrem $\overline{A}$ množiny A nazveme nejmenší uzavřenou množinu obsahující A, neboli

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F, \quad F - \text{uzavřené}$$

Hranicí množiny A nazveme množinu $A' = \overline{A} \setminus A^0$. Jestliže $\overline{A} = X$, řekneme, že množina A je hustá v X. Je-li množina $X \setminus \overline{A}$ hustá v X, řekneme, že množina A je řídká v X.

Poznámka 3 Platí $(X\backslash A)^0 = X\backslash\overline{A}$, $\overline{(X\backslash A)} = X\backslash A^0$ a $(X\backslash A)' = A'$. Stačí použít De Morganova pravidla

$$X\backslash\bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X\backslash A_\alpha)$$

$$X\backslash\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X\backslash A_\alpha)$$

Poznámka 4 Nechť $A \subset B \subset X$. Z definice 7 plyne, že je-li A hustá je i B hustá a je-li B řídká je i A řídká. Je-li A řídká, je i $\overline{A}$ řídká.

Věta 2 *Množina $A \subset X$ je hustá v X právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ platí $A \cap G \neq \emptyset$. Množina $A \subset X$ je řídká v X právě tehdy, když $(\overline{A})^0 = \emptyset$ (její uzávěr má prázdný vnitřek).*

Důkaz: (a) Nechť $\overline{A} = X$. Pak z $A \cap G = \emptyset$ plyne $G \subset (X\backslash A)^0 = X\backslash\overline{A}$ a tedy $\overline{A} \neq X$, což je spor (používáme toho, že G je otevřená, takže z $G \subset X\backslash A$ plyne $G \subset (X\backslash A)^0$). Nechť $\overline{A} \neq X$. Pak $X\backslash\overline{A}$ je otevřená množina taková, že $A \cap (X\backslash\overline{A}) = 0$.
(b) Množina A je řídká v X právě tehdy, když $\overline{X\backslash\overline{A}} = X$. Ale

$$\overline{X\backslash\overline{A}} = X\backslash(\overline{A})^0$$

a $X\backslash(\overline{A})^0 = X$ právě tehdy, když $(\overline{A})^0 = \emptyset$.

Definice 8 *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $\{x_n\} \subset X$ (posloupnost bodů z X) a $x \in X$. Jestliže ke každému okolí $G \in \mathcal{O}(x)$ existuje index $n_G \in N$ takový, že $x_n \in G$ $\forall n \geq n_G$, řekneme, že $\{x_n\}$ konverguje k bodu x a píšeme $x_n \to x$.*

Poznámka 5 Stačí uvažovat pouze $G \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ (konvergenci lze definovat pomocí báze topologie).

Poznámka 6 Metrický prostor (X, ρ) je topologickým prostorem ve smyslu definice 3. Tento prostor má speciální vlastnost. Je-li $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ a $x_1 \neq x_2$, existují okolí $V_1 \in \mathcal{O}(x_1)$, $V_2 \in \mathcal{O}(x_2)$ taková, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Takovéto topologické prostory se nazývají Hausdorfovými prostory.

Věta 3 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$. Pak $x_n \to x$ právě tehdy, jestliže $\rho(x_n, x) \to 0$ (takto se většinou definuje konvergence v metrických prostorech).*

Důkaz: (a) Nechť $x_n \to x$ podle definice 8. Pak pro každou otevřenou kouli $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{O}(x)$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový že $x_n \in B(x, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_\varepsilon$, neboli $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Platí tedy $\rho(x_n, x) \to 0$.

(b) Nechť $\rho(x_n, x) \to 0$ a $G \in \mathcal{O}(x)$. Jelikož množina G je otevřená, existuje otevřená koule $B(x, \varepsilon) \subset G$ a jelikož $\rho(x_n, x) \to 0$, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset G$ $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Definice 9 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ a $x \in X$. Jestliže existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A$ tak, že $x_n \to x$, řekneme, že x je limitním bodem množiny A.*

Věta 4 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{A}$ (uzávěr) je množinou všech limitních bodů množiny A.*

Důkaz: (a) Nechť $x \in X \backslash \overline{A}$. Jelikož množina $\overline{A}$ je uzavřená, je $X \backslash \overline{A}$ otevřená. Existuje tedy otevřená koule $B(x, \varepsilon) \subset X \backslash \overline{A}$. Pak ale $\rho(x, y) \geq \varepsilon \ \forall y \in \overline{A} \supset A$, takže x není hromadným bodem množiny A.

(b) Nechť $x \in \overline{A}$ není hromadným bodem množiny A. Pak existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $\rho(x, y) \geq \varepsilon \ \forall y \in A$, neboli $A \subset X \backslash B(x, \varepsilon)$. Uzavřená množina $\overline{A} \cap X \backslash B(x, \varepsilon)$ tedy obsahuje A ale neobsahuje $\overline{A}$, což je ve sporu s definicí 7.

1.2 Úplné prostory

Definice 10 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\} \subset X$. Jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.*

Definice 11 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže ke každé cauchyovské posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ existuje bod $x \in X$ takový, že $x_n \to x$, řekneme, že prostor (X, ρ) je úplný.*

Příklad 9 Prostor (R^n, ρ) z příkladu 2 je úplný (neboť množina reálných čísel je úplná).

Příklad 10 Prostor (Q^n, ρ) n-rozměrných racionálních vektorů s metrikou z příkladu 2 není úplný (neboť množina racionálních čísel není úplná). Platí však $\overline{Q^n} = R^n$, takže Q^n je hustý v R^n.

Příklad 11 Prostor (l_p, ρ) z příkladu 3 je úplný:

(a) Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset l_p$ cauchyovská pak i posloupnost složek je cauchyovská neboť, označíme-li $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots\}$, platí

$$|\xi_l^m - \xi_l^n| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^m - \xi_k^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x_m, x_n)$$

$\forall l \in N$. Existují tedy limity $\xi_l^n \to \xi_l \ \forall l \in N$. Označme $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

(b) Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \ \forall n, m \geq n_\varepsilon$. Pak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ a $l \in N$ můžeme psát.

$$\left(\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$$

Jelikož $\xi_k^m \to \xi_k$ $\forall 1 \leq k \leq l$ a l je konečné (děláme l limitních přechodů), platí

$$\left(\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^n - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon/2$$

Limitním přechodem pro $l \to \infty$ dostaneme $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ a podle věty 2 platí $x_n \to x$.

(c) Ukážeme, že $x \in l_p$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $m \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < 1$ $\forall n \geq m$. Označme $M = \rho(x_m, 0) + 1$. Nechť $n \geq m$ a $l \in N$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\left(\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho(x_n, 0) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, 0) < 1 + \rho(x_m, 0) = M$$

Jelikož $\xi_k^n \to \xi_k$ $\forall 1 \leq k \leq l$ a l je konečné (děláme l limitních přechodů), platí

$$\sum_{k=1}^{l} |\xi_k|^p \leq M^p$$

Limitním přechodem pro $l \to \infty$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leq M^p < \infty$$

Příklad 12 Prostor (l_∞, ρ) z příkladu 4 je úplný:

(a) Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset l_\infty$ cauchyovská pak i posloupnost složek je cauchyovská neboť, označíme-li $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots\}$, platí

$$|\xi_l^m - \xi_l^n| \leq \sup_{k \in N} |\xi_k^m - \xi_k^n| = \rho(x_m, x_n)$$

$\forall l \in N$. Existují tedy limity $\xi_l^n \to \xi_l$ $\forall l \in N$. Označme $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

(b) Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ $\forall n, m \geq n_\varepsilon$. Pak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ můžeme psát

$$|\xi_l^n - \xi_l^m| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$$

$\forall l \in N$, což v limitě pro $m \to \infty$ dává $|\xi_l^n - \xi_l| \leq \varepsilon/2$ $\forall l \in N$. Tedy $\rho(x_n, x) = \sup_{k \in N} |\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ a podle věty 3 platí $x_n \to x$.

(c) Ukážeme, že $x \in l_\infty$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $m \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < 1 \ \forall n \geq m$. Označme $M = \rho(x_m, 0) + 1$. Nechť $n \geq m$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|\xi_l^n| \leq \sup_{k \in N} |\xi_k^n| = \rho(x_n, 0) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, 0) < 1 + \rho(x_m, 0) = M$$

$\forall l \in N$. Jelikož $\xi_l^n \to \xi_l$, platí $|\xi_l| \leq M \ \forall l \in N$ a tedy $\sup\limits_{k \in N} |\xi_k| \leq M < \infty$.

Příklad 13 Prostor $(C[a,b], \rho)$ z příkladu 5 je úplný:

(a) Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset C[a,b]$ cauchyovská je i bodově cauchyovská, neboť pro libovolnou hodnotu $t \in [a,b]$ platí

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| = \rho(x_m, x_n)$$

Existují tedy limity $x_n(t) \to x(t) \ \forall t \in [a,b]$. Získali jsme tak funkci $x : [a,b] \to R$.

(b) Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \ \forall n, m \geq n_\varepsilon$. Pak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ dostaneme $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \ \forall t \in [a,b]$, což v limitě pro $m \to \infty$ dává $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon/2 \ \forall t \in [a,b]$. Můžeme tedy psát

$$\rho(x_n, x) = \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

a podle věty 3 platí $x_n \to x$.

(c) Ukážeme, že $x \in C[a,b]$. Stačí dokázat, že x je spojitá. Jelikož $x_n \to x$, existuje k danému číslu $\varepsilon > 0$ index $n \in N$ takový, že $\rho(x_n, x) < \varepsilon/3$. Jelikož funkce $\{x_n\}$ je spojitá na $[a,b]$, je tam stejnoměrně spojitá (věta 21). Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $\|x_n(t) - x_n(s)\| < \varepsilon/3$, kdykoliv $|t - s| < \delta$. Platí tedy

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(s)| + |x(s) - x_n(s)| < 2\rho(x_n, x) + \varepsilon/3 < \varepsilon$$

kdykoliv $|t - s| < \delta$. Funkce x je tedy stejnoměrně spojitá a tedy spojitá na $[a,b]$.

Příklad 14 Prostor $(C[a,b], \rho)$ s metrikou

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

není úplný, neboť konvergence v této metrice není stejnoměrnou konvergencí a může se stát, že $x_n \to x$ a funkce x není spojitá. Uvažujme posloupnost $\{x_n\} \subset C[a,b]$ takovou, že

$$x_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan(t)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Pak platí $x_n \to x$, kde funkce $x : [a, b] \to R$ je definovaná vztahy

$$\begin{aligned} x(t) &= -1, \quad a \le t < 0 \\ x(t) &= 0, \quad t = 0 \\ x(t) &= 1, \quad 0 < t \le b \end{aligned}$$

Funkce $x(t)$ je sice integrovatelná ale není spojitá v bodě $t = 0$ takže $x \notin C[a, b]$.

Příklad 15 Prostor $(L_p[a, b], \rho)$ z příkladu 6 je úplný (úplnost tohoto prostoru byla jedním z důvodů pro zavedení Lebesgueova integrálu).

Příklad 16 Prostor $(L_\infty[a, b], \rho)$ z příkladu 7 je úplný (limita posloupností funkcí omezených skoro všude je funkce omezená skoro všude). Princip důkazu je prakticky stejný jako u příkladu 12.

Věta 5 *Nechť* (X, ρ) *je metrický prostor, který není úplný. Pak existuje úplný metrický prostor* $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ *takový, že* $\overline{X} = \tilde{X}$ *(*X *je hustý v* $\tilde{X}$*) a* $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$ *pokud* $\tilde{x} = x \in X$ *a* $\tilde{y} = y \in X$*.*

Důkaz: (a) (Konstrukce prostoru $\tilde{X}$) Cauchyovské posloupnosti $\{x_k\} \subset X$, $\{y_k\} \subset X$ nazveme ekvivalentní, jestliže $\rho(x_k, y_k) \to 0$. Že jde o ekvivalenci, plyne bezprostředně z podmínek (a)–(c) v definici 1. Například tranzitivita plyne z (c), neboť $\rho(x_k, y_k) \to 0$ a $\rho(y_k, z_k) \to 0$ implikují

$$\rho(x_k, z_k) \le \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k) \to 0$$

Prostor $\tilde{X}$ je množina všech tříd ekvivalence Cauchyovských posloupností. Pokud $\{x, x, x, \dots\} \in \tilde{x}$ ztotožníme $\tilde{x}$ s x (píšeme $\tilde{x} = x$).

(b) (Metrika na $\tilde{X}$) Metriku na $\tilde{X}$ definujeme vztahem

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k)$$

pokud $\{x_k\} \in \tilde{x}$ a $\{y_k\} \in \tilde{y}$. Korektnost této definice plyne ze zavedené ekvivalence posloupností a z trojúhelníkové nerovnosti. Je také zřejmé, že pokud $\tilde{x} = x$ a $\tilde{y} = y$ (t.j. $\{x, x, x, \dots\} \in \tilde{x}$ a $\{y, y, y, \dots\} \in \tilde{y}$), platí $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$. Platnost podmínek (a), (b) z definice 1 je zřejmá. Trojúhelníkovou nerovnost dokážeme takto

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{z}) &= \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, z_k) \le \lim_{k\to\infty} (\rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k)) \\ &\le \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k) + \lim_{k\to\infty} \rho(y_k, z_k) \\ &= \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\rho}(\tilde{y}, \tilde{z}) \end{aligned}$$

(c) (Hustota X v $\tilde{X}$) Nechť $\{x_k\} \in \tilde{x} \in \tilde{X}$ a $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{x_k\}$ je cauchyovská, existuje index $n \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_k) < \varepsilon/2\ \forall k \geq n$. Nechť $\{x_n, x_n, x_n, \dots\} \in \tilde{x}_n$, takže $\tilde{x}_n = x_n \in X$. Pak platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_n) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

(d) (Úplnost prostoru $\tilde{X}$) Nechť posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{X}$ je cauchyovská. Jelikož X je hustý v $\tilde{X}$, existuje ke každému prvku $\tilde{x}_n \in \tilde{X}$ prvek $y_n \in X$ takový že $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$, kde $\{y_n, y_n, y_n, \dots\} \in \tilde{y}_n$. Uvažujme posloupnost $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \subset \tilde{X}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \geq 4/\varepsilon$ takový, že

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon$$

Pak platí

$$\rho(y_m, y_n) = \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{y}_n) \leq \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{x}_m) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

$\forall m, n \geq n_\varepsilon$, takže posloupnost $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset X$ je cauchyovská. Existuje tedy prvek $\tilde{x} \in \tilde{X}$ takový, že $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \in \tilde{x}$. Ukážeme, že $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to 0$. Jelikož jsme dokázali, že pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(y_m, y_n) < 3/4\varepsilon$, $\forall m, n \geq n_\varepsilon$, platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_m, y_n) \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ a tedy $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) \to 0$ Jelikož zároveň $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to 0$ (neboť $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$), platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{x}_n) \to 0$$

Definice 12 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $A \subset X$. Číslo*

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y\in A} \rho(x, y)$$

nazveme vzdáleností bodu x od množiny A. Číslo

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x, y)$$

nazveme diametrem množiny A. Jestliže $\operatorname{diam}(A) < \infty$*, řekneme, že množina A je omezená.*

Věta 6 *(Cantorova věta o průniku) Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor. Nechť $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \dots$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X taková, že $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Pak existuje právě jeden bod $x \in X$ takový, že*

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Důkaz: (a) (Existence) Jelikož množiny F_n, $n \in N$, jsou neprázdné, existují body $x_n \in F_n$, $n \in N$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $F_n \subset F_{n_\varepsilon}$ a $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$. Jelikož pro $m \geq n \geq n_\varepsilon$ platí $\rho(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská. Jelikož prostor (X,ρ) je úplný a množina $F_{n_\varepsilon} \subset X$ je uzavřená, existuje bod $x \in F_{n_\varepsilon}$ takový, že $x_n \to x \in F_{n_\varepsilon}$. Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

(b) (Jednoznačnost). Jestliže $x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, $x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ a $x_1 \neq x_2$, pak $x_1 \in F_n$ a $x_2 \in F_n\ \forall n \in N$ a tudíž $\operatorname{diam}(F_n) \geq \rho(x_1, x_2) > 0\ \forall n \in N$, což je ve sporu s tím že $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$.

Věta 7 *(Baireova věta) Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor. Nechť A_1, A_2, $A_3 \dots$ je posloupnost otevřených množin hustých v X. Pak množina*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

(spočetný průnik hustých otevřených množin) je hustá v X.

Důkaz: Nechť $G \subset X$ je libovolná otevřená množina. Ukážeme, že $A \cap G \neq \emptyset$. Protože A_1 je hustá v X, platí $A_1 \cap G \neq \emptyset$, takže existuje bod $x_1 \in A_1 \cap G$ a jelikož $A_1 \cap G$ je otevřená, existuje číslo $0 < \varepsilon_1 \leq 1$ takové, že $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset A_1 \cap G$. Předpokládejme, že pro $n > 1$ je vybrán bod x_{n-1} a číslo ε_{n-1}. Protože A_n je hustá v X, platí $A_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \neq \emptyset$, takže existuje bod $x_n \in A_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ a jelikož $A_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ je otevřená, existuje číslo $0 < \varepsilon_n \leq 1/n$ takové, že $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset A_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$. Indukcí se tak sestrojí posloupnost neprázdných uzavřených množin $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \supset \overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \supset \overline{B(x_3, \varepsilon_3)} \dots$ takových, že $\operatorname{diam}(\overline{B(x_n, \varepsilon_n)}) \leq 1/n \to 0$. Podle věty 6 tedy existuje bod $x \in X$ takový, že

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap G$$

(podle konstrukce je tento bod limitou posloupnosti $\{x_n\} \subset X$).

Důsledek 2 Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor. Nechť A_1, A_2, $A_3 \dots$ je posloupnost množin řídkých v X. Nechť

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(tato množina se nazývá množinou první kategorie). Pak $X \backslash A$ je hustá v X.

Důkaz: Podle De Morganových pravidel platí

$$X \backslash A = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{A}_n)$$

Jelikož množiny A_n jsou řídké v X, jsou otevřené množiny $X \backslash \overline{A}_n$ husté v X, takže podle věty 7 a poznámky 4 je množina $X \backslash A$ hustá v X.

Věta 8 *(Banachova věta o kontrakci) Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $T : X \to X$ je kontrahující zobrazení, t.j. pro $\forall x, y \in X$ platí*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

kde $0 \leq \alpha < 1$. Pak existuje alespoň jeden bod $x^* \in X$, takový, že $T(x^*) = x^*$.

Důkaz: Zvolíme bod $x_0 \in X$ libovolně a konstruujeme posloupnost $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1), \ldots$. Pak platí

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq \alpha \rho(x_k, x_{k-1}) \leq \ldots \leq \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

a

$$\begin{aligned} \rho(x_{k+p}, x_k) &\leq \sum_{i=1}^{p} \rho(x_{k+i}, x_{k+i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha^{k+i-1} \rho(x_1, x_0) = \alpha^k \rho(x_1, x_0) \sum_{i=1}^{p} \alpha^{i-1} \\ &\leq \alpha^k \rho(x_1, x_0) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\forall p \in N$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nechť $n \in N$ je číslo takové, že

$$\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Pak pro libovolné dva body x_k, x_{k+p}, kde $k \geq n$ a $p \in N$, platí

$$\rho(x_{k+p}, x_k) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

takže posloupnost $\{x_k\}$ je cauchyovská. Protože prostor (X, ρ) je úplný, existuje bod $x^* \in X$ takový, že $x_k \to x^*$. Jelikož platí

$$\begin{aligned}\rho(x^*, T(x^*)) &\leq \rho(x^*, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, T(x^*)) = \rho(x^*, x_{k+1}) + \rho(T(x_k), T(x^*)) \\ &\leq \rho(x_{k+1}, x^*) + \alpha\rho(x_k, x^*)\end{aligned}$$

a jelikož $\rho(x_k, x^*) \to 0$ (neboť $x_k \to x^*$), dostaneme $\rho(x^*, T(x^*)) = 0$. Platí tedy $T(x^*) = x^*$.

1.3 Separabilní prostory

Definice 13 *Řekneme, že množina A je spočetná, jestliže je buď konečná nebo existuje prosté zobrazení množiny přirozených čísel N na A.*

Příklad 17 Množina všech sudých čísel je spočetná, neboť existuje prosté zobrazení $n \leftrightarrow 2n$.

Věta 9 *Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

Důkaz: Nechť množina A je spočetná a $B \subset A$. Je-li B konečná, není co dokazovat. Budeme tedy předpokládat, že B je nekonečná. Jelikož množina A je spočetná, lze její prvky uspořádat v posloupnost $\{a_n\}$ (neboť existuje prosté zobrazení množiny přirozených čísel N na A). V tomto případě můžeme B chápat jako podposloupnost $B = \{b_i : b_i = a_{n_i}, i \in N\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$. Pak ale $i \leftrightarrow b_i = a_{n_i}$ je prosté zobrazení N na B.

Věta 10 *Kartézský součin spočetných množin (množina všech dvojic) je spočetná množina.*

Důkaz: Nechť $A = \{a_i : i \in N\}$, $B = \{b_j : j \in N\}$ jsou spočetné množiny a

$$X = A \times B = \{x_{ij} : x_{ij} = (a_i, b_j), i \in N, j \in N\}$$

Zapišme prvky X do dvojrozměrné tabulky

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Tyto prvky můžeme uspořádat podle vedlejších diagonál

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\} = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \dots\}$$

takže existuje prosté zobrazení

$$n \leftrightarrow \frac{(i + j - 2)(i + j - 1)}{2} + i$$

N na $A \times B$.

Důsledek 3 Množina racionálních čísel je spočetná.

Věta 11 *Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina.*

Důkaz: Nechť A_i, $i \in N$, je spočetný systém množin a každá množina $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$ je spočetná. Pak máme stejnou situaci jako v důkazu věty 10

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Poznámka 7 Věty 10 a 11 můžeme použít ke konstrukci různých spočetných množin. Z věty 10 plyne indukcí, že počet n-tic spočetných množin je spočetný, takže systém všech n-rozměrných vektorů, jejichž prvky mohou nabývat racionálních hodnot spočetný. Podle věty 11 je pak spočetný systém všech konečných posloupností jejichž prvky mohou nabývat racionálních hodnot. Podle toho je například spočetná každá množina po částech konstantních nebo po částech lineárních funkcí nabývajících racionálních hodnot na každém konečném dělení konečného intervalu.

Věta 12 *Množina reálných čísel z jakéhokoliv intervalu (s různými koncovými body) je nespočetná.*

Důkaz: Stačí se omezit na interval $[0, 1]$ (existuje prosté zobrazení intervalu $[0, 1]$ na jakýkoliv interval s různými koncovými body). Předpokládejme, že čísla z $[0, 1]$ lze uspořádat v posloupnost $x_1, x_2, \dots$, kde v dekadickém tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0,\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^1\dots \\ x_2 & = & 0,\xi_2^1\xi_2^2\xi_3^2\dots \\ & \dots & \end{array}$$

a $\xi_j^i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Zkonstruujme číslo $x = 0,\xi_1\xi_2\xi_3\dots \in [0, 1]$ tak, aby

$$\begin{array}{cccc} \xi_1 \neq \xi_1^1 & \text{a} & \xi_1 \neq 0, & \xi_1 \neq 9, \\ \xi_2 \neq \xi_2^2 & \text{a} & \xi_2 \neq 0, & \xi_2 \neq 9, \\ & \dots & & \end{array}$$

Pak zřejmě $x \neq x_1$, $x \neq x_2$, $\dots$, takže x není prvkem posloupnosti $x_1, x_2, \dots$

Definice 14 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje spočetná množina A hustá v X (t.j. $\overline{A} = X$), řekneme, že prostor (X, ρ) je separabilní.*

Příklad 18 Prostor (R^n, ρ) z příkladu 2 je separabilní, neboť množina n-rozměrných racionálních vektorů Q^n je spočetná a hustá v R^n (každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel).

Příklad 19 Prostor (l_p, ρ) z příkladu 3 je separabilní. Označme $\tilde{l}_p \subset l_p$ množinu posloupností majících konečný počet nenulových prvků, které jsou navíc racionální. Tato množina je podle poznámky 7 spočetná. Dokážeme, že je hustá v l_p. Nechť $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in l_p$ a $\varepsilon > 0$. Jelikož

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$$

existuje číslo $n \in N$ takové, že

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \leq \frac{1}{2}\varepsilon^p$$

Najdeme $y = \{y_1, y_2, \ldots\} \in \tilde{l}_p$ tak, aby $y_k = 0$ pro $k \geq n+1$ a $|x_k - y_k| < \varepsilon/(2n)^{1/p}$ pro $k \leq n$. Pak platí

$$\rho^p(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < n\frac{\varepsilon^p}{2n} + \frac{1}{2}\varepsilon^p = \varepsilon^p$$

takže $\rho(x, y) < \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné je $\tilde{l}_p$ hustá v l_p.

Příklad 20 Prostor (l_∞, ρ) z příkladu 4 není separabilní. Nechť $\{x_n\} \subset l_\infty$ je libovolná spočetná množina v l_∞. Její prvky označíme $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots\}$. Položme $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, kde $\xi_k = \xi_k^k + 1$, pokud $|\xi_k^k| \leq 1$ a $\xi_k = 0$, pokud $|\xi_k^k| > 1$. Pak pro libovolný index $k \in N$ platí $|\xi_k - \xi_k^k| \geq 1$. Nechť x_n je libovolný prvek spočetné posloupnosti $\{x_n\} \subset l_\infty$. Pak platí

$$\rho(x, x_n) = \sup_{k \in N} |\xi_k - \xi_k^n| \geq |\xi_n - \xi_n^n| \geq 1$$

takže $\{x_n\}$ není hustá v l_∞.

Příklad 21 Prostor $(C[a, b], \rho)$ z příkladu 5 je separabilní (stačí uvažovat prostor $C[0, 1]$, neboť interval $[0, 1]$ lze převést na obecný interval jednoduchou lineární transformací). Spojité po částech lineární funkce, které nabývají v uzlových bodech $t_k = k/n$, $0 \leq k \leq n$, racionálních hodnot a jsou lineární na každém subintervalu $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq k \leq n$, tvoří podle poznámky 7 spočetnou množinu $M_n \subset C[0, 1]$. Ukážeme, že spočetná množina $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ je hustá v $C[0, 1]$. Stačí ukázat, že ke každé funkci $x \in C[0, 1]$ a ke každému číslu ε lze nalézt po částech lineární funkci $l \in M$ takovou, že $\rho(x, l) < \varepsilon$. Jelikož funkce x je stejnoměrně spojitá (věta 21), existuje číslo δ takové, že $|x(t) - x(s)| < \varepsilon/2$, pokud

$|t-s| \le \delta$. Zvolme $n \in N$ tak, aby platilo $1/n < \delta$ a vyberme $l \in M_n$ tak, aby $|l(t_k) - x(t_k)| < \varepsilon/2$ $\forall 0 \le k \le n$ (to lze, neboť množina racionálních čísel je hustá v R). Pak pro libovolné $t \in [t_{k-1}, t_k]$ platí

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} l(t_k) + \frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}} l(t_{k-1}) \\ x(t) &= \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} x(t) + \frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}} x(t) \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} |l(t)-x(t)| &\le \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} |l(t_k)-x(t)| + \frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}} |l(t_{k-1})-x(t)| \\ &\le \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} (|l(t_k)-x(t_k)| + |x(t_k)-x(t)|) \\ &+ \frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}} (|l(t_{k-1})-x(t_{k-1})| + |x(t_{k-1})-x(t)|) \\ &< \left(\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} + \frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}}\right)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Jelikož toto platí pro každý subinterval $[t_k, t_{k-1}]$, $1 \le k \le n$, dostáváme požadovanou nerovnost.

Příklad 22 Prostor $(L_p[a,b], \rho)$ z příkladu 6 je separabilní, neboť množina jednoduchých (po částech konstantních) funkcí nabývajících racionálních hodnot a definovaných pomocí intervalů s racionálními konečnými body je spočetná a hustá v $(L_p[a,b], \rho)$.

Příklad 23 Prostor $(L_\infty[a,b], \rho)$ z příkladu 7 není separabilní.

Věta 13 *Metrický prostor (X, ρ) je separabilní právě tehdy, existuje-li v něm spočetná báze topologie.*

Důkaz: (a) Nechť $A \subset X$ je spočetná množina hustá v X. Nechť $\mathcal{B} = \{B(a, 1/n) : a \in A, n \in N\}$. Podle věty 10 je systém $\mathcal{B}$ spočetný. Nechť $x \in X$ a $G \in \mathcal{O}(x)$. Jelikož množina G je otevřená, existuje otevřená koule $B(x, \varepsilon) \subset G$. Nechť $n > 2/\varepsilon$. Jelikož A je hustá v X, existuje podle věty 2 bod $a \in B(x, 1/n) \cap A$. Pak ale $x \in B(a, 1/n)$ a $\forall z \in B(a, 1/n)$ platí

$$\rho(z, x) \le \rho(z, a) + \rho(a, x) < 2/n < \varepsilon$$

takže $B(a, 1/n) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$. Jelikož $x \in X$ a $G \in \mathcal{O}(x)$ byly zvoleny libovolně a jelikož jsme dokázali existenci množiny $B(a, 1/n) \subset \mathcal{B}$ takové, že $x \in B(a, 1/n) \subset G$, je $\mathcal{B}$ bází topologie metrického prostoru (X, ρ).

(b) Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze topologie metrického prostoru (X,ρ). V každé neprázdné množině $B \in \mathcal{B}$ vybereme jeden bod $a \in B$. Nechť $A \subset X$ je množina těchto vybraných bodů. Pak A je spočetná. Nechť $G \subset X$ je libovolná otevřená množina a $x \in G$. Jelikož $\mathcal{B}$ je báze topologie, existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in B \subset G$. Nechť $a \in A$ je bod, který byl vybrán z množiny B. Pak platí $a \in A \cap B \subset A \cap G$, takže $A \cap G \neq \emptyset$ a A je hustá v X (věta 2).

Definice 15 *Systém otevřených množin $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ nazveme otevřeným pokrytím X, jestliže platí*

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = X$$

Věta 14 *Metrický prostor (X,ρ) je separabilní právě tehdy, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat spočetný podsystém, který je též pokrytím X.*

Důkaz: Využijeme toho, že metrický prostor je separabilní právě tehdy, existuje-li v něm spočetná báze topologie (věta 13).

(a) Nechť metrický prostor (X,ρ) je separabilní. Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze topologie a $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí X. Pak ke každému bodu $x \in X$ existuje otevřená množina $G_x \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G_x$ a množina $B_x \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in B_x \subset G_x$. Zřejmě $\cup_{x \in X} B_x = X$. Jelikož systém $\mathcal{B}$ je spočetný, existuje spočetná množina $A \in X$ taková, že $\cup_{x \in A} B_x = X$, a jelikož $B_x \subset G_x$, platí také $\cup_{x \in A} G_x = X$. Existuje tedy spočetný podsystém $\{G_x \in \mathcal{G} : x \in A\} \subset \mathcal{G}$, který pokrývá X.

(b) Předpokládejme, že z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat spočetné podpokrytí. Označme $\mathcal{G}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\}$, takže $\cup_{G \in \mathcal{G}_n} G = X$. Pak existuje spočetný podsystém $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{G}_n$ takový, že $\cup_{B \in \mathcal{B}_n} B = X$. Označme $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Systém $\mathcal{B}$ je podle věty 11 spočetný. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ je bází topologie. Nechť $x \in X$ a $G \in \mathcal{O}(x)$. Pak existuje otevřená koule $B(x,\varepsilon) \subset G$. Zvolme $n \in N$ tak, aby platilo $n > 2/\varepsilon$. Jelikož $\cup_{B \in \mathcal{B}_n} B = X$, existuje bod $y \in X$ takový, že $x \in B(y, 1/n) \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$. Pak $\forall z \in B(y, 1/n)$ platí

$$\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < 2/n < \varepsilon$$

takže $B(y,1/n) \subset B(x,\varepsilon) \subset G$. Jelikož $x \in X$ a $G \in \mathcal{O}(x)$ byly zvoleny libovolně a jelikož jsme dokázali existenci množiny $B(y,1/n) \subset \mathcal{B}$ takové, že $x \in B(y,1/n) \subset G$, je $\mathcal{B}$ bází topologie metrického prostoru (X,ρ).

Věta 15 *Nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ je systém (neprázdných) disjunktních otevřených množin v separabilním metrickém prostoru (X,ρ). Pak $\mathcal{G}$ je spočetný.*

Důkaz: Nechť A je spočetná množina hustá v X a $G \in \mathcal{G}$. Jelikož G je otevřená, existuje otevřená koule $B(x,\varepsilon) \subset G$. Jelikož A je hustá, leží v této otevřené kouli alespoň jeden bod $y \in A$, tedy $y \in G \cap A$. Nechť G_1, G_2 jsou různé množiny z $\mathcal{G}$ a $y_1 \in G_1 \cap A$, $y_2 \in G_2 \cap A$. Protože $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, platí $y_1 \neq y_2$. To tedy znamená, že počet bodů v A nemůže být menší než počet množin v $\mathcal{G}$. Jelikož množina A je spočetná, musí bý i systém $\mathcal{G}$ spočetný.

1.4 Kompaktní prostory

Definice 16 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$ obsahuje podposloupnost, která má limitu v X, řekneme, že prostor X je kompaktní.*

Definice 17 *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $M_\varepsilon \subset X$ taková, že*

$$\mathrm{dist}(x, M_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall x \in X,$$

řekneme, že (X, ρ) je totálně omezený.

Věta 16 *Každý totálně omezený metrický prostor je omezený.*

Důkaz: Zvolme nějaké $\varepsilon > 0$ (například $\varepsilon = 1$). Nechť $M_\varepsilon \subset X$ je konečná množina taková, že $\mathrm{dist}(x, M_\varepsilon) < \varepsilon \; \forall x \in X$. Pak pro libovolné dva body $x, y \in X$ platí

$$\rho(x, y) \le \mathrm{dist}(x, M_\varepsilon) + \mathrm{diam}(M_\varepsilon) + \mathrm{dist}(y, M_\varepsilon) < 2\varepsilon + \mathrm{diam}(M_\varepsilon) < \infty,$$

neboť diametr konečné množiny M_ε je konečný. Můžeme tedy psát

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} \rho(x, y) \le 2\varepsilon + \mathrm{diam}(M_\varepsilon) < \infty$$

Věta 17 *Prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, je-li úplný a totálně omezený.*

Důkaz: (a) Nechť (X, ρ) je kompaktní a posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je cauchyovská. Pak existuje vybraná posloupnost $\{x_m\} \subset \{x_n\}$ taková, že $x_m \to x \in X$ (indexy $m \in M \subset N$ nemusí nabývat všech hodnot z N). Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ tedy existuje index $m_\varepsilon \in M \subset N$ takový, že $\rho(x_m, x) < \varepsilon/2$ pokud $m \ge m_\varepsilon$. Jelikož původní posloupnost je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ pokud $m, n \ge n_\varepsilon$. Nechť $m, n \ge \max(m_\varepsilon, n_\varepsilon)$. Pak platí

$$\rho(x_n, x) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, x) < \varepsilon$$

a jelikož číslo $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí $x_n \to x$. Prostor (X, ρ) je tedy úplný. Předpokládejme, že (X, ρ) není totálně omezený. Pak pro nějaké číslo $\varepsilon > 0$ je nekonečná každá množina taková, že

$$\mathrm{dist}(x, M_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall x \in X,$$

Můžeme tedy zkonstruovat nekonečnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ takovou, že $\rho(x_i, x_j) \ge \varepsilon \; \forall i \ne j \in N$, neboť v opačném případě by pro nějaký index $n \in N$ muselo platit $\mathrm{dist}(x, \{x_1, \ldots, x_n\}) < \varepsilon \; \forall x \in X$. Z posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ takové, že $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \ \forall i \neq j \in N$, nelze vybrat žádnou konvergentní podposloupnost, takže prostor (X, ρ) není kompaktní.

(b) Nechť (X, ρ) je úplný a totálně omezený a nechť $\{x_n\} \subset X$. Z této posloupnosti vybereme induktivně podposloupnosti $\{x_n\} = \{x_n^{(0)}\} \supset \{x_n^{(1)}\} \supset \{x_n^{(2)}\} \dots$ Nechť $\{x_n^{(k-1)}\}$ je již vybrána. Jelikož (X, ρ) je totálně omezený, existuje konečná množina $M_{1/k} \subset X$ taková, že $\mathrm{dist}(x, M_{1/k}) < 1/k \ \forall x \in X$. Jelikož $M_{1/k}$ je konečná, existuje bod $y_k \in M_{1/k}$ takový, že $\rho(y_k, x_n^{(k-1)}) < 1/k$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in N$. Nechť $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$ je posloupnost bodů s těmito indexy. Pak platí $\rho(y_k, x_n^{(k)}) < 1/k \ \forall n \in N$. Tím jsme ukončili indukční krok. Uvažujme nyní posloupnost $\{x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots\} \subset \{x_n\}$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak pro $n_\varepsilon > 2/\varepsilon$ a pro $m, n \geq n_\varepsilon$ platí

$$\rho(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leq \rho(x_n^{(n)}, y_{n_\varepsilon}) + \rho(x_m^{(m)}, y_{n_\varepsilon}) < 2/n_\varepsilon < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n^{(n)}\} \subset \{x_n\}$ je tedy cauchyovská a jelikož (X, ρ) je úplný, je konvergentní.

Věta 18 *Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat konečný podsystém, který je též pokrytím X.*

Důkaz: Využijeme toho, že metrický prostor je kompaktní právě tehdy, je-li úplný a totálně omezený (věta 17).

(a) Nechť (X, ρ) je úplný a totálně omezený. Předpokládejme, že existuje otevřené pokrytí $X \subset \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí. Zkonstruujeme induktivně posloupnost uzavřených množin $X = F^{(0)} \supset F^{(1)} \supset F^{(2)} \dots$ takových že $\mathrm{diam}(F^{(n)}) \leq 1/n$ a $F^{(n)}$ nelze pokrýt konečným počtem množin z pokrytí G_α, $\alpha \in A$. Nechť $F^{(n-1)}$ je již vybrána. Jelikož $F^{(n-1)} \subset X$, je tato množina totálně omezená. Existuje tedy konečná množina $M_{1/n} = \{y_1^{(n)}, \dots y_{l_n}^{(n)}\}$ taková, že $\mathrm{dist}(x, M_{1/n}) < 1/n \ \forall x \in F^{(n-1)}$. Zřejmě

$$F^{(n-1)} = \bigcup_{i=1}^{l_n} \overline{B(y_i, 1/n)} \cap F^{(n-1)} = \bigcup_{i=1}^{l_n} F_i^{(n-1)},$$

kde $\mathrm{diam}(F_i^{(n-1)}) \leq 1/n$. Jelikož $F^{(n-1)}$ nelze pokrýt konečným počtem množin z pokrytí G_α, $\alpha \in A$, musí existovat index $1 \leq k_n \leq l_n$ takový, že $F_{k_n}^{(n-1)}$ nelze pokrýt konečným počtem množin z pokrytí G_α,$\alpha \in A$. Označme $F^{(n)} = F_{k_n}^{(n-1)}$, čímž jsme provedli indukční krok. Nyní máme posloupnost uzavřených množin $X = F^{(0)} \supset F^{(1)} \supset F^{(2)} \dots$ takových že $\mathrm{diam}(F^{(n)}) \leq 1/n \to 0$ a jelikož prostor (X, ρ) je úplný, existuje podle věty 6 bod

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{(n)} \subset X.$$

Tento bod musí být pokryt alespoň jednou množinou z pokrytí G_α, $\alpha \in A$. Označme tuto množinu G. Jelikož G je otevřená a $x \in G$, musí existovat číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset G$. Zvolme $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$. Pak jelikož $\mathrm{diam}(F^{(n_\varepsilon)}) \leq 1/n_\varepsilon < \varepsilon$ a $x \in F^{(n_\varepsilon)}$, musí platit $F^{(n_\varepsilon)} \subset B(x, \varepsilon) \subset G$, což je spor, neboť jsme předpokládali, že množinu $F^{(n_\varepsilon)}$ nelze pokrýt konečným počtem množin z pokrytí G_α, $\alpha \in A$.

(b) Předpokládejme, že z každého pokrytí X lze vybrat konečné podpokrytí. Nechť $\varepsilon > 0$. Uvažujme speciální pokrytí

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon).$$

K tomuto pokrytí existuje konečné podpokrytí

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{m} B(x_n, \varepsilon)$$

a označíme-li $M_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_m\}$ platí $\mathrm{dist}(x, M_\varepsilon) < \varepsilon \ \forall x \in X$. Zbývá dokázat úplnost. Nechť $\{x_n\} \subset X$ je cauchyovská posloupnost. Označme $P_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ a $F_n = \overline{P}_n$. Pak $F_1 \supset F_2 \supset F_2 \ldots$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X. Ukážeme, že $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Předpokládejme naopak, že $F = \emptyset$. Pak platí

$$X = X \backslash F = X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash F_n).$$

Z tohoto pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí

$$X = \bigcup_{k=1}^{m} (X \backslash F_{n_k}) = X \backslash \bigcap_{k=1}^{m} F_{n_k} = X \backslash F_{n_k},$$

takže $F_{n_k} = \emptyset$, což je spor, neboť podle konstrukce je $F_{n_k} \neq \emptyset$. Nechť $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ (takže $x \in X$). Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \ \forall m, n \geq n_\varepsilon$. Platí tedy $\mathrm{diam}(F_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$ a jelikož $x \in F_{n_\varepsilon}$, dostaneme $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí $x_n \to x \in X$.

Poznámka 8 Tímto ekvivalentním způsobem se definuje kompaktnost v topologických prostorech. Topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktní, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat konečný podsystém, který je též pokrytím X.

Důsledek 4 Kompaktní prostor je separabilní.

Důsledek 5 Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor. Nechť $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \dots$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X. Pak platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

Toto tvrzení je dokázáno v části (b) důkazu věty 18.

Věta 19 *Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, lze-li z každého systému uzavřených množin, který má prázdný průnik vybrat konečný podsystém, který má prázdný průnik.*

Důkaz: Tvrzení bezprostředně plyne z věty 18 a z De Morganových pravidel.

Definice 18 *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $K \subset X$. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset K$ obsahuje podposloupnost, která má limitu v K, řekneme, že množina K je kompaktní.*

Poznámka 9 Každá kompaktní množina v úplném metrickém prostoru je totálně omezená a uzavřená. Plyne to z věty 17 a z toho, že v úplném metrickém prostoru je množina K úplná právě tehdy je-li uzavřená.

Příklad 24 V prostoru (R^n, ρ) z příkladu 2 je množina $K \subset R^n$ kompaktní právě tehdy, je-li omezená a uzavřená.

Příklad 25 V prostoru $(C[a, b], \rho)$ z příkladu 5 je množina $K \in C[a, b]$ kompaktní právě tehdy obsahuje-li funkce stejnoměrně omezené a stejnoměrně spojité (Arzelova-Ascoliho věta).

Příklad 26 V neomezených nekonečněrozměrných prostorech není uzavřená jednotková koule kompaktní, i když je omezená a uzavřená (Rieszovo lemma). Zvolíme-li například v l_p (nebo v l_∞) posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že

$$\begin{aligned} x_1 &= \{1, 0, 0, \dots\} \\ x_2 &= \{0, 1, 0, \dots\} \\ x_3 &= \{0, 0, 1, \dots\} \\ &\dots \end{aligned}$$

platí $\rho(x_n, 0) = 1 \; \forall x_n$ (takže $\{x_n\}$ leží v uzavřené jednotkové kouli) a $\rho(x_m, x_n) \geq 1$ pro $m \neq n$ (takže z $\{x_n\}$ nelze vybrat cauchyovskou a tudíž ani konvergentní podposloupnost).

Věta 20 *Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $f : X \to R$ je funkce spojitá na K. Pak existují body $u, v \in K$ takové, že*

$$
\begin{aligned}
f(u) &= \inf_{y \in K} f(y) \\
f(v) &= \sup_{y \in K} f(y)
\end{aligned}
$$

Důkaz: Podle definice infima existuje posloupnost $\{y_n\} \subset K$ tak, že $f(y_n) \to \inf_{y \in K} f(y)$. Jelikož K je kompaktní, lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost $\{z_n\} \subset K$. Označme $u \in K$ limitu této podposloupnosti (tedy $z_n \to u$). Jelikož funkce f je spojitá, platí

$$f(u) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \inf_{y \in K} f(y)$$

Důkaz pro supremum je analogický.

Důsledek 6 Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $x \in X$. Pak existují body $u, v \in K$ takové, že

$$
\begin{aligned}
\rho(x, u) &= \inf_{y \in K} \rho(x, y) \\
\rho(x, v) &= \sup_{y \in K} \rho(x, y)
\end{aligned}
$$

Funkce $\rho(x, \cdot) : K \to R$ je totiž spojitá na K neboť z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \le \rho(y, z)$$

Věta 21 *Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $f : X \to R$ je funkce spojitá na K. Pak f je stejnoměrně spojitá na K (ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x, y \in K$ platí implikace*

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Důkaz: Předpokládejme, že funkce f je spojitá ale není stejnoměrně spojitá na K. Pak musí existovat číslo $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\} \subset K$ a $\{y_n\} \subset K$ tak, že $\rho(x_n, y_n) < 1/n$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ $\forall n \in N$. Jelikož K je kompaktní, lze z těchto posloupností vybrat podposloupnosti $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ a $\{y_{n_i}\} \subset \{y_n\}$ (indexy n_i jsou společné oběma podposloupnostem) takové, že $x_{n_i} \to x \in K$ a $y_{n_i} \to y \in K$. Pak ale

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, y) \to 0$$

takže $x = y$, Ze spojitosti funkce f pak plyne

$$|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \leq |f(x_{n_i}) - f(x)| + |f(y_{n_i}) - f(y)| \to 0$$

což je ve sporu s předpokladem že $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$.

Poznámka 10 Kompaktní množiny mají podobné vlastnosti jako omezené uzavřené intervaly $[a, b] \subset R$. Proto lze definovat prostory $C(K)$, $L_p(K)$, $L_\infty(K)$, které mají podobné vlastnosti jako $C[a, b]$, $L_p[a, b]$, $L_\infty[a, b]$.

2 Banachovy prostory

2.1 Základní pojmy

Budeme předpokládat, že čtenář má základní znalosti o lineárních prostorech, alespoň v rozsahu jaký se používá v R^n. Nebudeme tedy vysvětlovat pojmy jako lineární podprostor, lineární kombinace, lineární obal, lineární nezávislost. Připomeňme, že v abstraktním lineárním prostoru nemusí existovat konečná báze. Takový prostor se nazývá nekonečněrozměrný. I v nekonečněrozměrném prostoru však existuje báze (spočetná nebo nespočetná).

Definice 19 *Nechť X je lineární prostor a $\mathcal{T}$ je topologie na X (ve smyslu definice 4). Jestliže součet a skalární násobek jsou spojitými funkcemi v topologii $\mathcal{T}$, řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je lineárním topologickým prostorem.*

Poznámka 11 Je-li topologie určená metrikou mluvíme o lineárních metrických prostorech. K tomu, aby (X, ρ) byl lineárním metrickým prostorem stačí, aby platilo

$$\begin{aligned} \rho(x + z, y + z) &= \rho(x, y) \\ \rho(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| \rho(x, y) \end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in X$ a $\forall \lambda \in R$. Skutečně, pokud $x_n \to x$, $y_n \to y$ a $\lambda_n \to \lambda$, platí

$$\begin{aligned} \rho(x_n + y_n, x + y) &= \rho(x_n - x, y - y_n) \leq \rho(x_n - x, 0) + \rho(0, y - y_n) \\ &= \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0 \\ \rho(\lambda_n x_n, \lambda x) &\leq \rho(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + \rho(\lambda_n x, \lambda x) \\ &= |\lambda_n| \rho(x_n, x) + |\lambda_n - \lambda| \rho(x, 0) \to 0 \end{aligned}$$

Poznámka 12 Splňuje-li metrika podmínky uvedené v poznámce 11, platí

$$\rho(y,z) = \rho(y-z,0)$$

V tomto případě stačí zavést funkci jedné proměnné $\|x\| = \rho(x,0)$. Snadno se lze přesvědčit, že tato funkce vyhovuje následujícím podmínkám definujícím normu.

Definice 20 *Nechť X je lineární prostor a $\|\cdot\| : X \to R$ je funkce taková, že*

(a) $\|x\| \geq 0$
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pak řekneme, že $(X, \|\cdot\|)$ je normovaným lineárním prostorem. Funkce $\|\cdot\|$ se nazývá normou (symbol $\|\cdot\|$ v označení normovaného lineárního prostoru budeme v dalším textu vynechávat).

Poznámka 13 Je-li zadána norma splňující podmínky (a)–(c), můžeme definovat metriku $\rho(x,y) = \|x-y\|$, která splňuje podmínky (a)–(c) z definice 1. V tomto případě říkáme, že metrika ρ je indukovaná normou. Snadno se ukáže, že metrika indukovaná normou splňuje podmínky uvedené v poznámce 11. Skutečně

$$\begin{aligned}
\rho(x+z, y+z) &= \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = \rho(x,y) \\
\rho(\lambda x, \lambda y) &= \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|x-y\| = |\lambda|\rho(x,y)
\end{aligned}$$

Definice 21 *Banachovým prostorem nazveme normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice indukované normou.*

Příklad 27 Prostory z příkladů 1–7 jsou normovanými lineárními prostory, zavedeme-li normy

$$\begin{aligned}
\|x\| &= |x|, \quad x \in C \\
\|x\| &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in R^n \\
\|x\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in l_p \\
\|x\| &= \sup_{k \in N} |x_k|, \quad x \in l_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad x \in C[a,b] \\
\|x\| &= \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L_p[a,b] \\
\|x\| &= \operatorname{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad x \in L_\infty[a,b]
\end{aligned}$$

Všechny tyto prostory jsou Banachovými prostory.

Definice 22 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak prostor $X \times Y$ všech dvojic (x,y), $x \in X$, $y \in Y$, kde součet a skalární násobek jsou definovány vztahy*

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$$

nazveme kartézským součinem prostorů X a Y. Normu v $X \times Y$ lze definovat různým způsobem (jako v R^2), zde se omezíme se na kartézské součiny s normou $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Poznámka 14 Podmínka (a) pro normu je zřejmá. Dále platí

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x,y)\| &= \|(\lambda x,\lambda y)\| = \|\lambda x\| + \|\lambda y\| \\
&= |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|y\| = |\lambda|(\|x\| + \|y\|) = |\lambda|\|(x,y)\| \\
\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| &= \|(x_1+x_2,y_1+y_2)\| = \|x_1+x_2\| + \|y_1+y_2\| \\
&\le \|x_1\| + \|y_1\| + \|x_2\| + \|y_2\| = \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|
\end{aligned}$$

Věta 22 *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Pak kartézský součin $X \times Y$ je Banachovým prostorem.*

Důkaz: Máme dokázat, že prostor $X \times Y$ je úplný. Nechť $\{(x_n,y_n)\} \in X \times Y$ je cauchyovská posloupnost. Pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový že

$$\|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\| = \|x_m-x_n\| + \|y_m-y_n\| < \varepsilon$$

$\forall n,m \ge n_\varepsilon$. Pak ale nutně $\|x_m-x_n\| < \varepsilon$ a $\|y_m-y_n\| < \varepsilon$ $\forall n,m \ge n_\varepsilon$. Jelikož prostory X a Y jsou úplné, existují body $x \in X$ a $y \in Y$ takové, že $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Pak platí $\|(x_n,y_n)-(x,y)\| \le \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \to 0$, takže $(x_n,y_n) \to (x,y)$.

Definice 23 *Nechť X, je normovaný lineární prostor a Y je jeho vlastní uzavřený podprostor (takže $Y = \overline{Y} \ne X$). Pak prostor X/Y všech tříd ekvivalence $\tilde{x}$ takových, že $x_1 \in \tilde{x}$ a $x_2 \in \tilde{x}$ právě tehdy, když $x_1 - x_2 \in Y$, kde součet a skalární násobek jsou definovány vztahy*

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in \tilde{x}_1, x_2 \in \tilde{x}_2\}$$
$$\lambda\tilde{x} = \{\lambda x : x \in \tilde{x}\}$$

nazveme faktorovým prostorem prostoru X vzhleden k podprostoru Y. Normu v X/Y definujeme vztahem $\|\tilde{x}\| = \mathrm{dist}(0, \tilde{x})$.

Poznámka 15 Podmínka (a) pro normu plyne z toho, že $\tilde{0} = Y$ a Y je uzavřený podprostor prostoru X. Dále platí

$$\begin{aligned}
\|\lambda\tilde{x}\| &= \inf_{z\in\lambda\tilde{x}} \|z\| = \inf_{x\in\tilde{x}} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf_{x\in\tilde{x}} \|x\| = |\lambda|\|\tilde{x}\| \\
\|\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\| &= \inf_{z\in\tilde{x}_1+\tilde{x}_2} \|z\| = \inf_{x_1\in\tilde{x}_1, x_2\in\tilde{x}_2} \|x_1 + x_2\| \le \inf_{x_1\in\tilde{x}_1, x_2\in\tilde{x}_2} (\|x_1\| + \|x_2\|) \\
&= \inf_{x_1\in\tilde{x}_1} \|x_1\| + \inf_{x_2\in\tilde{x}_2} \|x_2\| = \|\tilde{x}_1\| + \|\tilde{x}_2\|
\end{aligned}$$

Věta 23 *Nechť X, je Banachův prostor a Y jeho vlastní uzavřený podprostor. Pak faktorový prostor X/Y je Banachovým prostorem.*

Důkaz: Máme dokázat, že prostor X/Y je úplný. Nechť $\{\tilde{x}_n\} \in X/Y$ je cauchyovská posloupnost. Jelikož ke každému číslu $\varepsilon_k = 2^{-k}$ existuje index $n_k \in N$ takový, že $\|\tilde{x}_m - \tilde{x}_{n_k}\| \le 2^{-k}$, pokud $m \ge n_k$, můžeme sestrojit vybranou posloupnost $\{\tilde{x}_{n_k}\} \subset X/Y$ takovou, že $\|\tilde{x}_{n_{k+1}} - \tilde{x}_{n_k}\| < 2^{-k}$. Zvolme $x_{n_1} \in \tilde{x}_{n_1}$ libovolně a předpokládejme, že jsme již zkonstruovali bod $x_{n_k} \in \tilde{x}_{n_k}$. Z definice normy v X/Y (infimum) plyne, že existuje bod $x_{n_{k+1}} \in \tilde{x}_{n_{k+1}}$ takový, že $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$. Posloupnost $\{x_{n_k}\} \subset X$ je zřejmě cauchyovská (neboť geometrická řada s kvocientem $1/2$ je konvergentní) a jelikož X je úplný, existuje bod $x \in X$ takový, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Nechť $\tilde{x}$ je třída ekvivalence obsahující bod x. Pak platí $\|\tilde{x}_{n_k} - \tilde{x}\| \le \|x_{n_k} - x\| \to 0$, takže $\tilde{x}_{n_k} \to \tilde{x}$. Jelikož vybraná posloupnost má stejnou limitu jako původní cauchyovská posloupnost, platí $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$.

2.2 Spojitá lineární zobrazení

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Pak se zavádějí tři důležité množiny, definiční obor zobrazení $\mathcal{D}(T) \subset X$, nulový prostor zobrazení $\mathcal{N}(T) \subset X$ a obor hodnot zobrazení $\mathcal{R}(T) \subset Y$. Platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T) &= \{x \in X : Tx \in Y\} \\
\mathcal{N}(T) &= \{x \in X : Tx = 0\} \\
\mathcal{R}(T) &= \{y \in Y : y = Tx,\ x \in \mathcal{D}(T)\}
\end{aligned}$$

Pokud píšeme $T : X \to Y$, předpokládáme obvykle, že $\mathcal{D}(T) = X$. Pokud $\mathcal{D}(T) = X$ a $\mathcal{R}(T) = Y$, říkáme, že T je zobrazení X na Y. Je-li zobrazení T lineární (definice 25) jsou množiny $\mathcal{D}(T)$ a $\mathcal{N}(T)$ lineárními podprostory X a množina $\mathcal{R}(T)$ je lineárním podprostorem Y.

Definice 24 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Nechť $x \in X$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\| < \varepsilon$, řekneme, že zobrazení T je spojité v bodě x. Je-li zobrazení T spojité v každém bodě $x \in X$, řekneme, že je spojité (na X).*

Poznámka 16 Z definice 24 plyne, že zobrazení T je spojité v bodě $x \in X$, právě tehdy, jestliže ke každé otevřené kouli $B(T(x), \varepsilon) \subset Y$ existuje otevřená koule $B(x, \delta) \subset X$ taková, že $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon)$ nebo, obecněji, jestliže ke každému okolí $V \in \mathcal{O}(T(x))$ existuje okolí $U \in \mathcal{O}(x)$ takové že $T(U) \subset V$.

Věta 24 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení X na Y. Pak T je spojité právě tehdy, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$ je $T^{-1}(G)$ otevřená množina (používáme označení $T^{-1}(G) = \{x \in X : T(x) \in G\}$).*

Důkaz: (a) Nechť zobrazení T je spojité a $G \subset Y$ je otevřená množina. Pak pro každý bod $x \in T^{-1}(G)$ existuje otevřená koule $B(T(x), \varepsilon) \subset G$ a otevřená koule $B(x, \delta) \subset X$ tak, že $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon) \subset G$. Tedy $B(x, \delta) \subset T^{-1}(G)$ a $T^{-1}(G)$ je otevřená množina.

(b) Nechť $x \in X$ a nechť pro otevřenou množinu $B(T(x), \varepsilon)$ je $T^{-1}(B(T(x), \varepsilon))$ otevřená množina. Tato množina obsahuje bod x a nějakou otevřenou kouli $B(x, \delta)$. Pak ale platí $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon)$ a zobrazení T je spojité v bodě x.

Definice 25 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Jestliže platí*

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y)\,, \\ T(\lambda x) &= \lambda T(x) \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X$ a $\forall \lambda \in R$ řekneme, že zobrazení T je lineární. Jestliže navíc $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in X$, řekneme, že zobrazení T je izometrické. Existuje-li prosté spojité izometrické lineární zobrazení X na Y (izometrický izomorfizmus), řekneme, že prostory X a Y jsou izometricky izomorfní a píšeme $X = Y$ (izometricky izomorfní prostory mohou obsahovat různé prvky ale mají vždy stejnou strukturu). Lineární zobrazení často nazýváme lineárním operátorem a píšeme $Tx = T(x)$.

Definice 26 *Řekneme, že lineární zobrazení $T : X \to Y$ je omezené, existuje-li konstanta $M > 0$ taková, že $\|Tx\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$.*

Věta 25 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak buď T je spojité v každém bodě $x \in X$ nebo není spojité v žádném bodě $x \in X$. Lineární zobrazení $T : X \to Y$ je spojité právě tehdy, je-li omezené.*

Důkaz:(a) Nechť $x_1, x_2 \in X$ a T je spojité v x_1. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|y_1 - x_1\| < \delta \Rightarrow \|Ty_1 - Tx_1\| < \varepsilon$. Nechť $\|y_2 - x_2\| < \delta$. Položme $d = x_1 - x_2$ a $y_1 = y_2 + d$. Pak $\|y_1 - x_1\| = \|(y_2 + d) - (x_2 + d)\| < \delta$, takže $\|Ty_1 - Tx_1\| < \varepsilon$. Z linearity pak plyne $\|Ty_2 - Tx_2\| = \|T(y_1 - d) - T(x_1 - d)\| < \varepsilon$.

(b) Je-li zobrazení T omezené, je spojité v nule, neboť $\|Tx\| \leq M\|x\|$, takže $\|x\| \to 0 \Rightarrow \|Tx\| \to 0$ (využíváme toho, že $T(0) = 0$). Je-li naopak T spojité v nule, existuje $\delta > 0$ tak, že $\|Tx\| < 1$, pokud $\|x\| < \delta$. Nechť $y \in X$. Položme $x = (\delta/2)(y/\|y\|)$, takže $\|x\| = \delta/2 < \delta$. Pak platí $y = (2/\delta)\|y\|x$ a

$$\|Ty\| = (2/\delta)\|y\|Tx < (2/\delta)\|y\|$$

Položíme-li $M = (2/\delta)$, platí $\|Ty\| \leq M\|y\| \; \forall y \in X$.

Definice 27 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Označme $[X, Y]$ prostor všech spojitých lineárních zobrazení x X do Y. Prostor $[X, Y]$ je lineárním prostorem, definujeme-li součet a skalární násobek vztahy*

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$$
$$(\lambda T)x = \lambda T x$$

Jelikož každé spojité lineární zobrazení je omezené můžeme definovat normu v $[X, Y]$ vztahem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Poznámka 17 Je to skutečně norma. Podmínka (a) je zřejmá. Dále platí

$$\begin{aligned}
\|\lambda T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda T)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(\lambda x)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\|T\| \\
\|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1 x\| + \|T_2 x\|) \leq \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|
\end{aligned}$$

Věta 26 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Prostor $[X, Y]$ všech spojitých lineárních zobrazení $T : X \to Y$ s normou z definice 27 je normovaným lineárním prostorem. Je-li Y úplný je i $[X, Y]$ úplný.*

Důkaz: To že $[X, Y]$ je normovaným lineárním prostorem plyne z poznámky 17. Předpokládejme, že prostor Y je úplný. Nechť posloupnost $\{T_n\} \in [X, Y]$ je cauchyovská a $\varepsilon > 0$ (libovolné). Pak existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\|T_m - T_n\| < \varepsilon \ \forall m, n \geq n_\varepsilon$. Nechť $x \in X$. Pak

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

$\forall m, n \geq n_\varepsilon$, takže posloupnost $\{T_n x\} \subset Y$ je také cauchyovská a protože prostor Y je úplný, má tato posloupnost limitu v Y. Definujme zobrazení $T : X \to Y$ předpisem

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \quad \forall x \in X$$

Zobrazení T je lineární (neboť limitní přechod zachovává lineární operace). Jelikož posloupnost $\{T_n\}$ je cauchyovská, je omezená, takže existuje konstanta M taková že $\|T_n\| \leq M \ \forall n \in N$. Pro libovolný prvek $x \in X$, tedy platí $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ $\forall n \in N$, což pro $n \to \infty$ dává $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Zobrazení T je tedy omezené, a podle věty 25 platí $T \in [X, Y]$. Ukážeme, že $T_n \to T$. Již jsme dokázali, že $\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon\|x\| \ \forall m, n \geq n_\varepsilon$, což pro $m \to \infty$ dává $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon\|x\|$ a protože bod $x \in X$ je libovolný, dostaneme $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí $\|T - T_n\| \to 0$, neboli $T_n \to T$.

Věta 27 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak inverzní lineární zobrazení $T^{-1} : Y \to X$ existuje a je omezené právě tehdy, existuje-li konstanta $m > 0$ taková, že*

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X \tag{$*$}$$

Důkaz: Jestliže platí $(*)$, pak z $Tx_2 = Tx_1$ plyne $x_2 = x_1$, neboť

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{m}\|T(x_2 - x_1)\| = \frac{1}{m}\|Tx_2 - Tx_1\| = 0$$

Zobrazení T^{-1} tedy existuje. Z $Tx = y$ plyne $x = T^{-1}y$, takže použitím $(*)$ dostaneme

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \quad \forall y \in Y$$

Zobrazení T^{-1} je tedy omezené. Existuje-li naopak T^{-1} a je-li omezené, musí existovat konstanta $M > 0$ taková, že

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\| \quad \forall y \in Y$$

Z $T^{-1}y = x$ plyne $y = Tx$, takže platí $(*)$ s $m = 1/M$.

Věta 28 *(Banach, Steinhaus) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Nechť $\{T_\alpha\} \subset [X, Y]$ je množina spojitých lineárních zobrazení. Je-li množina $\{T_\alpha x\}$ omezená $\forall x \in X$, je i množina $\{\|T_\alpha\|\}$ omezená.*

Důkaz: Označme

$$\varphi(x) = \sup_\alpha \|T_\alpha x\|$$

a

$$A_n = \{x \in X : \varphi(x) > n\}$$

Jelikož pro každé α je zobrazení $T_\alpha : X \to Y$ spojité a také norma v Y je spojitá, je každá funkce $x \to \|T_\alpha x\|$ spojitá. Proto je každá množina A_n otevřená. Jestliže jedna z nich, například A_m, není hustá v X, existuje bod $x_m \in X$ a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x_m, \varepsilon) \cap A_m = \emptyset$. To znamená, že $\varphi(x_m + x) \leq m$, pokud $\|x\| < \varepsilon$, takže pro libovolné α platí $\|T_\alpha(x_m + x)\| \leq m$, pokud $\|x\| < \varepsilon$. Jelikož T_α je lineární zobrazení, dostaneme

$$\|T_\alpha x\| = \|T_\alpha(x_m + x - x_m)\| \leq \|T_\alpha(x_m + x)\| + \|T_\alpha x_m\| \leq 2m$$

pokud $\|x\| < \varepsilon$, takže

$$\|T_\alpha\| \leq \frac{2m}{\varepsilon}$$

Množina $\{\|T_\alpha\|\}$ je tedy omezená. Je-li naopak každá množina A_n hustá v X, je podle věty 7 i množina

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

hustá v X (tedy zcela jistě neprázdná). Pak pro $x \in A$ platí $\varphi(x) > n \ \forall n \in N$, takže

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| = \varphi(x) = \infty$$

Množina $\{T_\alpha x\}$ tedy není omezená pro $x \in A$.

Věta 29 *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\} \subset [X, Y]$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existuje $\forall x \in X$. Pak existuje spojité lineární zobrazení $T \subset [X, Y]$ takové, že $T_n x \to Tx \ \forall x \in X$.*

Důkaz: Pro libovolné $x \in X$ je posloupnost $\{T_n x\}$ omezená, neboť je konvergentní. Podle Věty **??** je i množina $\{\|T_n\|\}$ omezená. Existuje tedy číslo $M > 0$ (které nezávisí na $n \in N$) takové, že

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$$

Definujme zobrazení T tak, že

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \quad \forall x \in X$$

Pak T je lineární (neboť limitní přechod zachovává lineární operace) a platí

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

takže T je omezené a tedy spojité.

Věta 30 *(O otevřeném zobrazení) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení X na Y (t.j. $\mathcal{R}(T) = Y$). Pak T zobrazuje otevřenou množinu G na otevřenou množinu $T(G)$, kde*

$$T(G) = \{y \in Y : y = Tx, \ x \in G\}$$

Důkaz: V poznámce 16 je ukázáno, že zobrazení T je spojité právě tehdy, když k $B(T(x), \varepsilon) \subset Y$ existuje $B(x, \delta) \subset X$ tak, že

$$T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon)$$

což platí právě tehdy (věta 24), když pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$ je $T^{-1}(G)$ otevřená. Nyní máme dokázat, že pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ je $T(G)$ otevřená, čili že k $B(x, \varepsilon) \subset X$ existuje $B(T(x), \delta) \subset Y$ tak, že

$$T(B(x, \varepsilon)) \supset B(T(x), \delta)$$

Jelikož zobrazení T je lineární, můžeme položit $x = 0$ a $\varepsilon = 1$ a dokazovat, že $T(B(0, 1)) \supset B(0, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

(a) Jelikož $X = \cup_{n=1}^{\infty} B(0, n)$ a $T(X) = Y$, platí

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B(0, n))$$

Podle důsledku 2 tedy nemohou být všechny množiny $T(B(0, n))$ řídké. Existuje tedy alespoň jeden index $m \in N$ takový, že $\overline{T(B(0, m))}$ má neprázdný vnitřek, čili existuje otevřená množina $G \subset \overline{T(B(0, m))} \subset Y$. Každý bod $z \in G$ je tedy limitou nějaké posloupnosti $\{T(u_i)\} \subset Y$, kde $u_i \in B(0, m) \subset X$. Nechť $z \in G$. Jelikož G je otevřená, existuje číslo $\gamma > 0$ takové, že $B(z, \gamma) \subset G$. Pro každý bod $y \in B(0, \gamma) \subset Y$ pak platí $z + y \in B(z, \gamma) \subset G$, takže existují posloupnosti $\{u_i\}, \ \{v_i\} \subset B(0, m) \subset X$ takové, že $T(u_i) \to z, \ T(v_i) \to z + y$. Jelikož zobrazení T je lineární, můžeme psát

$$y = z + y - z = \lim_{i\to\infty} T(v_i) - \lim_{i\to\infty} T(u_i) = \lim_{i\to\infty} T(x_i)$$

kde $x_i = v_i - u_i$, takže $\|x_i\| \leq \|u_i\| + \|v_i\| < 2m$. Dokázali jsme tedy, že ke každému $y \in B(0,\gamma) \subset Y$ existuje posloupnost $\{x_i\} \subset B(0,2m) \subset X$, taková, že $T(x_i) \to y$, neboli (vzhledem k linearitě T), že ke každému $y \in B(0,\delta) \subset Y$, kde $\delta = \gamma/(2m)$, existuje posloupnost $\{x_i\} \subset B(0,1) \subset X$, taková, že $T(x_i) \to y$. Kdyby posloupnost $\{x_i\}$ byla cauchyovská nebo kdyby množina $\overline{B(0,1)} \subset X$ byla kompaktní, byly bychom z důkazem hotovi. Obecně však tento předpoklad neplatí. Víme pouze, že ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt bod $x \in B(0,1) \subset X$ (člen posloupnosti $\{x_i\}$) takový, že $\|y - Tx\| < \varepsilon$.

(b) Nyní induktivně zkonstruujeme caychyovskou posloupnost $\{s_n\} \subset B(0,1+\varepsilon) \subset X$ takovou, že $T(s_n) \to y$ (tato umělá konstrukce je poměrně komplikovaná a je třeba pečlivě sledovat jednotlivé kroky). Zvolme $y \in B(0,\delta) \subset Y$ a $\varepsilon > 0$. Pak podle (a) existuje bod $x_1 \in B(0,1) \subset X$, takový, že $\|y - T(x_1)\| < 2^{-1}\varepsilon\delta$. Předpokládejme, že body $x_1, \ldots, x_n$ byly zvoleny tak, že

$$\|y - T(x_1) - \ldots - T(x_n)\| < 2^{-n}\varepsilon\delta \qquad (*)$$

(pro $n = 1$ jsme tak učinili). Jelikož z $(*)$ plyne, že $y - T(x_1) - \ldots - T(x_n) \in B(0, 2^{-n}\varepsilon\delta) \subset Y$ a zobrazení T je lineární, můžeme podle (a) nalézt bod $x_{n+1} \in B(0, 2^{-n}\varepsilon) \subset X$ takový, že

$$\|(y - T(x_1) - \ldots - T(x_n)) - T(x_{n+1})\| < 2^{-(n+1)}\varepsilon\delta$$

Tím je indukční krok dokončen. Položíme-li $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in N$, je posloupnost $\{s_n\}$ cauchyovská (normy $\|x_n\|$ klesají tak rychle jako geometrická posloupnost s kvocientem 1/2), platí $\|s_n\| \leq \|x_1\| + \varepsilon$ (součet geometrické řady) a $(*)$ implikuje $T(s_n) \to y$. Jelikož prostor X je úplný, existuje bod $x \in B(0,1+\varepsilon) \subset X$ (neboť $\|x\| \leq \|x_1\| + \varepsilon < 1 + \varepsilon$) takový že $s_n \to x$, a jelikož operátor T je spojitý platí $T(x) = y$. Zatím jsme dokázali, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$T(B(x, 1+\varepsilon)) \supset B(T(x), \delta)$$

neboli (vzhledem k linearitě T)

$$T(B(x,1)) \supset B(T(x), (1+\varepsilon)^{-1}\delta)$$

Sjednocením množin na pravé straně této inkluze dostaneme

$$T(B(x,1)) \supset \bigcup_{\varepsilon>0} B(T(x), (1+\varepsilon)^{-1}\delta) = B(T(x), \delta)$$

Věta 31 *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je prosté spojité lineární zobrazení. Pak T^{-1} je prosté spojité lineární zobrazení.*

Důkaz: Je to bezprostřední důsledek Věty 30 a Věty 24.

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Není-li podprostor $\mathcal{D}(T) \subset X$ (definiční obor) uzavřený v X, může se snadno stát, že lineární zobrazení T není spojité (je to ukázáno v příkladu 28). V tomto případě je vhodné závést pojem uzavřenosti zobrazení, který v jistém smyslu nahrazuje pojem spojitosti zobrazení.

Definice 28 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\mathcal{D}(T) \subset X$ a $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ je lineární zobrazení. Jestliže množina $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$ je uzavřená v $X \times Y$, řekneme, že zobrazení T je uzavřené. Množina $\mathcal{G}(T)$, která je lineárním podprostorem $X \times Y$, se nazývá grafem zobrazení T.*

Poznámka 18 Normu v $X \times Y$ můžeme zvolit libovolně. V dalším textu budeme předpokládat, že platí $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Věta 32 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ je prosté uzavřené lineární zobrazení. Pak $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ je prosté uzavřené lineární zobrazení.*

Důkaz: Definičním oborem zobrazení T^{-1} je množina $\mathcal{R}(T)$. Jelikož

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y), y \in \mathcal{R}(T)\} = \{(Tx, x), x \in \mathcal{D}(T)\}$$

a množina na pravé straně (která se liší od $\mathcal{G}(T)$ pouze pořadím prvků ve dvojici) je uzavřená, je i množina na levé straně uzavřená.

Příklad 28 Existují uzavřená lineární zobrazení, která nejsou spojitá. Nechť $C^1[0,1] \subset C[0,1]$ je množina funkcí, které mají spojitou derivaci v $[0,1]$. Definujme zobrazení $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ předpisem $Tx = x'$ (derivace). Zřejmě T je lineární zobrazení. Je-li $x_n = t^n$ $\forall n \in N$, platí $Tx_n = nt^{n-1}$ $\forall n \in N$ a tudíž

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \max_{t \in [0,1]} (t^n) = 1 \\ \|Tx_n\| &= \max_{t \in [0,1]} (nt^{n-1}) = n \end{aligned}$$

$\forall n \in N$. Zobrazení T není omezené, neboť

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \sup_{n \in N} \|Tx_n\| = \sup_{n \in N} n = \infty$$

a není tedy spojité. Nechť $\{x_n\} \subset C^1[0,1]$ a $(x_n, Tx_n) \to (x, x') \in C[0,1] \times C[0,1]$. Jelikož $\|(x_n, Tx_n) - (x, x')\| = \|x_n - x\| + \|Tx_n - x'\|$, znamená to, že $x_n \to x$ a $Tx_n \to x'$. Jelikož prostor $C[0,1]$ je úplný, platí $x \in C[0,1]$ a $x' \in C[0,1]$ Jelikož konvergence $Tx_n \to x'$ je stejnoměrná na $[0,1]$, platí $Tx = x'$ (při stejnoměrné konvergenci je limitou derivací opět derivace). Čili

$$(x_n, Tx_n) \to (x, Tx) \in C^1[0,1] \times C[0,1]$$

Zobrazení T je tedy uzavřené.

Věta 33 *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ je lineární zobrazení s definičním oborem $\mathcal{D}(T) \subset X$. Je-li množina $\mathcal{D}(T)$ uzavřená (v X) a je-li zobrazení T spojité, je T uzavřené.*

Důkaz: Předpokládejme, že množina $\mathcal{D}(T)$ je uzavřená a zobrazení T je spojité ale není uzavřené. Pak graf $\mathcal{G}(T) \subset X \times Y$ není uzavřený, takže množina $(X \times Y) \backslash \mathcal{G}(T)$ není otevřená. Existuje tedy dvojice $(x, y) \in (X \times Y) \backslash \mathcal{G}(T)$ taková, že $B((x, y), 1/n) \cap \mathcal{G}(T) \neq 0\ \forall n \in N$. To znamená, že existuje posloupnost $\{(x_n, Tx_n)\} \subset \mathcal{G}(T)$ taková, že $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, neboli $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$. Jelikož množina $\mathcal{D}(T)$ je uzavřená, platí $x \in \mathcal{D}(T)$, takže nutně $y \neq Tx$ (neboť $(x, y) \notin \mathcal{G}(T)$), což je ve sporu se spojitostí zobrazení T.

Věta 34 *(O uzavřeném zobrazení) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je uzavřené lineární zobrazení (s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = X$). Pak T je spojité.*

Důkaz: Kartézský součin $X \times Y$ s normou $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ je podle věty 22 Banachovým prostorem. Protože zobrazení T je uzavřené, je lineární podprostor $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ uzavřený v $X \times Y$, takže je to Banachův prostor. Definujme lineární zobrazení $P : \mathcal{G}(T) \to X$ předpisem

$$P(x, Tx) = x$$

Jelikož pro libovolný bod $x \in X$ platí

$$\|P(x, Tx)\| \leq \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$$

je P omezené (a tedy spojité). Jelikož P je prosté, existuje inverzní zobrazení definovné předpisem

$$P^{-1}x = (x, Tx)$$

Podle Věty 31 je P^{-1} spojité, takže i T je spojité, neboť pro libovolný bod $x \in X$ platí

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|P^{-1}x\| \leq \|P^{-1}\|\,\|x\|$$

Definice 29 *Nechť X je normovaný lineární prostor. Lineární zobrazení $x^* : X \to R$ nazveme lineárním funkcionálem a píšeme*

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle$$

Prostor $[X, R]$ všech spojitých lineárních funkcionálů s normou z definice 27, nazveme duálním prostorem k prostoru X a označíme ho X^*.

Poznámka 19 V prostoru X^* jsou lineární operace definovány takto

$$\begin{aligned}\langle x^* + y^*, x\rangle &= \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, x\rangle \\ \langle \lambda x^*, x\rangle &= \lambda\langle x^*, x\rangle\end{aligned}$$

$\forall x \in X$ a norma vztahem

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x^*, x\rangle|$$

Jelikož množina reálných čísel je úplná, je prostor $X^* = [X, R]$ úplný (věta 26).

Vyslovíme nyní větu, která je zásadní pro vyšetřování vlastností spojitých lineárních funkcionálů. Tuto větu nedokážeme, neboť její důkaz používá prostředky, které se vymykají rozsahu tohoto kurzu. Důkaz lze nalézt například v Rudinově knize, uvedené na začátku textu.

Věta 35 *(Hahn, Banach) Nechť X je normovaný lineární prostor a $V \subset X$ jeho vlastní lineární podprostor. Je-li $v^* \in V^*$, existuje $x^* \in X^*$ takový, že $\langle x^*, v\rangle = \langle v^*, v\rangle$ $\forall v \in V$ a $\|x^*\| = \|v^*\|$.*

Věta 36 *Nechť X je normovaný lineární prostor a $x \in X$. Pak existuje lineární funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\|x^*\| = 1$ a $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. Navíc*

$$\max_{\|x^*\|=1} \langle x^*, x\rangle = \|x\|$$

Důkaz: Nechť $V = \{\lambda x : \lambda \in R\}$. Pak $V \subset X$ je (jednorozměrný) lineární podprostor X. Nechť $v^* \in V^*$ je definován vztahem $\langle v^*, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|$. Zřejmě $\|v^*\| = 1$ a $\langle v^*, x\rangle = \|x\|$. Je-li $V = X$ jsme z důkazem hotovi. Je-li V vlastním podprostorem X, použijeme větu 35, podle které existuje lineární funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\langle x^*, x\rangle = \langle v^*, x\rangle = \|x\|$ a $\|x^*\| = \|v^*\| = 1$. Jelikož podle poznámky 19 platí $|\langle x^*, x\rangle| \le \|x^*\|\|x\|$, můžeme psát

$$\sup_{\|x^*\|=1} \langle x^*, x\rangle = \|x\|$$

Protože jsme sestrojili funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$, je supremum zároveň maximem.

Důsledek 7 Nechť X je normovaný lineární prostor a $x \in X$. Jestliže $\langle x^*, x\rangle = 0$ $\forall x^* \in X$ pak $x = 0$.

Věta 37 *Nechť X je Banachův prostor, $V \subset X$ je jeho vlastní uzavřený podprostor a $y \notin V$. Pak existuje lineární funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\|x^*\| = 1$, $\langle x^*, v\rangle = 0$ $\forall v \in V$ a $\langle x^*, y\rangle = \operatorname{dist}(y, V)$.*

Důkaz: Nechť $Y = \{v + \lambda y : v \in V, \lambda \in R\}$. Zřejmě $V \subset Y \subset X$ a V je vlastní podprostor Y. Nechť $y^* \in Y^*$ je definován vztahem $\langle y^*, v + \lambda y\rangle = \lambda \operatorname{dist}(y, V)$. Pak $\langle y^*, v\rangle = 0 \ \forall v \in V$ a označíme-li $d = \operatorname{dist}(y, V)$, můžeme pro libovolný bod $x = v + \lambda y \in Y$ psát

$$\begin{aligned}
\langle y^*, x\rangle &= \lambda d = \frac{\lambda\|x\|d}{\|x\|} = \frac{\lambda\|x\|d}{\|v + \lambda y\|} = \frac{\|x\|d}{\|v/\lambda + y\|} \\
&= \frac{\|x\|d}{\|y - (-v/\lambda)\|} \le \frac{\|x\|d}{\operatorname{dist}(y, V)} = \|x\|
\end{aligned}$$

takže $\|y^*\| \le 1$. Z definice 12 plyne existence posloupnosti $\{v_n\} \subset V$ takové, že $\|v_n - y\| \to \operatorname{dist}(y, V)$. Protože $\langle y^*, v_n\rangle = 0$ a $\langle y^*, y\rangle = \operatorname{dist}(y, V)$, platí

$$\operatorname{dist}(y, V) = |\langle y^*, v_n\rangle - \langle y^*, y\rangle| \le \|y^*\|\|v_n - y\|$$

a limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme $\operatorname{dist}(y, V) \le \|y^*\| \operatorname{dist}(y, V)$, neboli $\|y^*\| \ge 1$. Spojením obou nerovností dostaneme $\|y^*\| = 1$. Funkcionál $y^* \in Y^*$ můžeme podle věty 35 rozšířit na $x^* \in X^*$, tak, že že $\|x^*\| = 1$, $\langle x^*, v\rangle = 0$ $\forall v \in V$ a $\langle x^*, y\rangle = \operatorname{dist}(y, V)$.

Věta 38 *Nechť X je Banachův prostor. Je-li X^* separabilní, je i X separabilní.*

Důkaz: Nechť $\{x_n^*\} \subset X^*$ je spočetná hustá podmnožina bodů na jednotkové sféře v X^* (takže $\|x_n^*\| = 1 \ \forall n \in N$). Pro libovolný funkcionál $x_n^* \in \{x_n^*\}$ lze nalézt bod $x_n \in X$ takový, že $\|x_n\| = 1$ a $\langle x_n^*, x_n\rangle > 1/2$. Nechť $Y \subset X$ je uzavřený podprostor generovaný body x_n, $n \in N$ (t.j. uzávěr množiny všech konečných lineárních kombinací bodů x_n, $n \in N$). Prostor Y je separabilní, neboť konečné lineární kombinace s racionální koeficienty tvoří hustou podmnožinu v Y. Stačí tedy dokázat, že $X = Y$. Pokud $X \ne Y$, existuje podle věty 37 lineární funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\|x^*\| = 1$ a $\langle x^*, y\rangle = 0 \ \forall y \in Y$. Jelikož množina $\{x_n^*\} \subset X^*$ je hustá na jednotkové sféře v X^*, existuje index $n \in N$ takový, že $\|x_n^* - x^*\| < 1/4$. Pak ale platí

$$\begin{aligned}
|\langle x^*, x_n\rangle| &= |\langle x_n^*, x_n\rangle - (\langle x_n^*, x_n\rangle - \langle x^*, x_n\rangle)| \\
&\ge |\langle x_n^*, x_n\rangle| - |\langle x_n^*, x_n\rangle - \langle x^*, x_n\rangle| \\
&\ge |\langle x_n^*, x_n\rangle| - \|x^* - x_n^*\|\|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

což je spor, neboť $x_n \in Y$, takže musí platit $\langle x^*, x_n\rangle = 0$.

Příklad 29 Nechť l_p, kde $1 < p < \infty$, je prostor posloupností $x = \{\xi_n\} \subset R$ takových, že

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Pak l_p^* je prostor posloupností $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ takových, že

$$\|x^*\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

kde $(1/p) + (1/q) = 1$ (tedy $l_p^* = l_q$) a platí

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^* \xi_k$$

Podobně $L_p^*[a,b] = L_q[a,b]$ a

$$\langle x^*, x\rangle = \int_a^b x^*(t)x(t)dt$$

Příklad 30 Nechť l_1 je prostor posloupností $x = \{\xi_n\} \subset R$ takových, že

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$$

Pak l_1^* je prostor posloupností $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ takových, že

$$\|x^*\| = \sup_{k\in N} |\xi_k^*|$$

(tedy $l_1^* = l_\infty$) a platí

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^* \xi_k$$

Podobně $L_1^*[a,b] = L_\infty[a,b]$ a

$$\langle x^*, x\rangle = \int_a^b x^*(t)x(t)dt$$

Příklad 31 Neplatí $l_\infty^* = l_1$ (l_1 je separabilní ale l_∞ není separabilní, což odporuje větě 38). Označíme-li $c_0 \subset l_\infty$ podprostor posloupností $\{\xi_k\} \subset R$ takových, že

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$$

Pak $c_0^* = l_1$.

Definice 30 *Nechť X je Banachův prostor a V je jeho uzavřený podprostor. Pak uzavřený podprostor*

$$V^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

nazveme anihilátorem podprostoru V.

Věta 39 *Nechť X je Banachův prostor a $V \subset X$ je jeho uzavřený podprostor. Pak V^* je izometricky izomorfní faktorovému prostoru $X^*/V^\perp$.*

Důkaz: Prvky z $X^*/V^\perp$ jsou třídy ekvivalence $\tilde{x}^*$ takové, že $x_1^* \in X^*$ a $x_2^* \in X^*$ leží ve stejné třídě $\tilde{x}^* \in X^*/V^\perp$, pokud $x_1^* - x_2^* \in V^\perp$, čili pokud $\langle x_1^*, v\rangle = \langle x_2^*, v\rangle$ $\forall v \in V$. Pro danou třídu $\tilde{x}^* \in X^*/V^\perp$ tedy můžeme definovat funkcionál $v^* \in V^*$ rovností $\langle v^*, v\rangle = \langle x^*, v\rangle$, kde x^* je libovolný prvek z $\tilde{x}^*$. Pak platí

$$|\langle v^*, v\rangle| = |\langle x^*, v\rangle| \leq \|x^*\|\|v\| \quad \forall x^* \in \tilde{x}^*$$

což podle definice normy v $X^*/V^\perp$ (definice 23) dává $\|v^*\| \leq \|\tilde{x}^*\|$. Věta 35 naopak říká, že existuje $x^* \in X^*$ tak, že $\langle x^*, v\rangle = \langle v^*, v\rangle$ $\forall v \in V$ (neboli $x^* \in \tilde{x}^*$) a $\|x^*\| = \|v^*\|$. Platí tedy

$$\|\tilde{x}^*\| = \inf_{x^* \in \tilde{x}^*} \|x^*\| \leq \|v^*\|$$

Spojením obou nerovností dostaneme rovnost $\|\tilde{x}^*\| = \|v^*\|$. Lineární zobrazení $T : X^*/V^\perp \to V^*$ definované předpisem $T\tilde{x}^* = v^*$ je tedy izometrické. Zbývá dokázat, že $\mathcal{R}(T) = V^*$. Nechť $v^* \in V^*$. Pak podle věty 35 existuje $x^* \in X^*$ tak, že $\langle x^*, v\rangle = \langle v^*, v\rangle$ $\forall v \in V$. Je-li $\tilde{x}^* \in X^*/V^\perp$ třída ekvivalence obsahující x^*, platí $T\tilde{x}^* = v^*$

Definice 31 *Nechť X je normovaný lineární prostor a $X^{**} = (X^*)^*$ (prostor duální k duálnímu prostoru). Jestliže $X^{**} = X$ (prostory X^{**} a X jsou izometricky izomorfní), řekneme, že X je reflexivní.*

Věta 40 *Normovaný lineární prostor X je reflexivní právě tehdy, jestliže ke každému prvku $x^{**} \in X^{**}$ existuje bod $x \in X$ takový, že $\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$ $\forall x^* \in X^*$.*

Důkaz: Označme $I : X \to X^{**}$ zobrazení definované rovností $\langle Ix, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$ $\forall x^* \in X^*$. Korektnost této definice plyne z toho, že $|\langle Ix, x^*\rangle| = |\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\|\|x\|$ $\forall x^* \in X^*$, neboli $\|Ix\| \leq \|x\|$, takže Ix je omezeným a tedy spojitým lineárním funkcionálem (čili $Ix \in X^{**}$). Zobrazení $I : X \to X^{**}$ se nazývá kanonickým zobrazením z X do X^{**}. Snadno se dokáže, že kanonické zobrazení je lineární a prosté. Ukážeme, že toto zobrazení je izometrické. Jak již víme, platí $\|Ix\| \leq \|x\|$. Dokážeme, že $\|Ix\| \geq \|x\|$. Pro $x = 0$ je toto tvrzení zřejmé. Nechť $x \neq 0$. Pak podle věty 36 existuje prvek $x^* \in X^*$ takový, že $\|x^*\| = 1$ a $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. Pak ale

$$\|Ix\| = \sup_{\|x^*\|=1} |\langle Ix, x^*\rangle| = \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x^*, x\rangle| \geq \|x\|$$

Spojením obou nerovností dostaneme $\|Ix\| = \|x\| \ \forall x \in X$, takže I je izometrické. Aby prostory X a X^{**} byly izometricky izomorfní, je nutné a stačí aby platilo $\mathcal{R}(I) = X^{**}$, což je jinými slovy vyjádřeno v dokazovaném tvrzení.

Věta 41 *Nechť X je Banachův prostor. Je-li X reflexivní, je každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.*

Důkaz: Nechť $V \subset X$ je uzavřený lineární podprostor. Máme dokázat, že ke každému prvku $v^{**} \in V^{**}$ existuje bod $v \in V$ takový, že $\langle v^{**}, v^*\rangle = \langle v^*, v\rangle$ $\forall v^* \in V^*$. Nechť $v^{**} \in V^{**}$ a nechť $x^{**} \in X^{**}$ je prvek definovaný rovností $\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle v^{**}, T\tilde{x}^*\rangle \ \forall x^* \in X^*$, kde $T : X^*/V^\perp \to V^*$ je zobrazení použité v důkazu věty 39. Protože X je reflexivní, existuje bod $x \in X$ takový, že $\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \ \forall x^* \in X^*$. Ukážeme, že $x \in V$. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by podle věty 37 prvek $x^* \in V^\perp$ takový, že $\langle x^*, x\rangle \neq 0$. Z $x^* \in V^\perp$ však plyne $\tilde{x}^* = 0$, takže $T\tilde{x}^* = 0$. Platí tedy

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle = \langle v^{**}, T\tilde{x}^*\rangle = 0$$

což je ve sporu s tím, že $\langle x^*, x\rangle \neq 0$. Označme takto zkonstruovaný prvek $x \in V$ písmenem v. Je-li v^* libovolný prvek z V^*, existuje podle věty 39 třída $\tilde{x}^* \in X^*/V^\perp$ taková, že $v^* = T\tilde{x}^*$. Pro libovolný prvek $x^* \in \tilde{x}^*$ pak platí $\langle v^*, v\rangle = \langle x^*, v\rangle$. Můžeme tedy psát

$$\langle v^{**}, v^*\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, v\rangle = \langle v^*, v\rangle$$

což dokazuje reflexivitu podprostoru V.

Věta 42 *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li X reflexivní, je i X^* reflexivní.*

Důkaz: Nechť $I : X \to x^{**}$ a $I^* : X^* \to x^{***}$ jsou příslušná kanonická zobrazení (viz důkaz věty 40). Máme dokázat, že $\mathcal{R}(I^*) = X^{***}$. Nechť $x^{***} \in X^{***}$. Definujme lineární funkcionál x^* rovností $\langle x^*, x\rangle = \langle x^{***}, Ix\rangle \ \forall x \in X$. Jelikož

$$|\langle x^*, x\rangle| = |\langle x^{***}, Ix\rangle| \leq \|x^{***}\|\|Ix\| = \|x^{***}\|\|x\|$$

je tento funkcionál omezený, takže $x^* \in X^*$. Jelikož X je reflexivní, existuje ke každému prvku $x^{**} \in X^{**}$ jednoznačně určený bod $x \in X$ takový, že $x^{**} = Ix$ a $\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$. Po dosazení dostaneme

$$\langle x^{***}, x^{**}\rangle = \langle x^{***}, Ix\rangle = \langle x^*, x\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle \quad \forall x^{**} \in X^{**}$$

takže $x^{***} = I^*x^*$ a tedy $x^{***} \in \mathcal{R}(I^*)$.

Příklad 32 Prostory l_p a $L_p[a,b]$ jsou reflexivní pro $1 < p < \infty$ (viz příklad 29). Prostory l_1 a $L_1[a,b]$ nejsou reflexivní (viz příklad 30 a větu 38). Prostory l_∞ a $L_\infty[a,b]$ nejsou reflexivní (viz příklad 31 a větu 41). Prostor $C[a,b]$ není reflexivní.

Definice 32 *Nechť X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$. Jestliže*

$$\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle \quad \forall x^* \in X^*$$

řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k bodu $x \in X$ a píšeme $x_n \stackrel{w}{\to} x$.

Věta 43 *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Jestliže $x_n \to x$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$.*

Důkaz: Jestliže $x_n \to x$, pak $\|x_n - x\| \to 0$. Pro každý spojitý lineární funkcionál $x^* \in X$ existuje číslo $\|x^*\| < \infty$ tak, že

$$|\langle x^*, x_n - x\rangle| \leq \|x^*\| \, \|x_n - x\| \to 0$$

takže $(x_n - x) \stackrel{w}{\to} 0$, čili $(x_n) \stackrel{w}{\to} x$.

Poznámka 20 Slabou konvergenci lze definovat zavedením slabé topologie. Tento způsob není příliš názorný. Definice 32 je pro naše účely postačující.

Poznámka 21 Slabá konvergence je slabší než konvergence definovaná pomocí normy, neboť $x_n \stackrel{w}{\to} x$ obvykle neimplikuje $x_n \to x$. V konečněrozměrných prostorech však oba pojmy splývají.

Příklad 33 Uvažujme posloupnost $\{x_k\} \in l_2$ takovou, že

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \{1, 0, 0, \ldots\} \\ x_2 & = & \{0, 1, 0, \ldots\} \\ x_3 & = & \{0, 0, 1, \ldots\} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Jelikož $\|x_m - x_n\| = \sqrt{2}\ \forall m, n \in N$, není tato posloupnost cauchyovská a tudíž ani konvergentní. Zvolme libovolný spojitý lineární funkcionál $x^* \in l_2^*$. Pak $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ a

$$\|x^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^*|^2} < \infty$$

(viz příklad 29). Platí tedy $\xi_k^* \to 0$ a tedy $\langle x^*, x_k\rangle = \xi_k^* \to 0$. Jelikož to platí pro libovolný spojitý lineární funkcionál $x^* \in l_2^*$, je posloupnost $\{x_k\}$ slabě konvergentní.

Poznámka 22 Obdobou slabé konvergence v X je bodová konvergence v X^*. Nechť $\{x_n^*\} \subset X^*$ a $x^* \in X^*$. Jestliže

$$\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle \quad \forall x \in X$$

řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\} \subset X$ konverguje bodově k prvku $x^* \in X^*$ a píšeme $x_n^* \xrightarrow{p} x^*$.

Věta 44 *Nechť X je lineární normovaný prostor. Je-li X separabilní, obsahuje každá omezená posloupnost $\{x_n^*\} \subset X^*$ bodově konvergentní podposloupnost.*

Důkaz: Nechť $\{x_n^*\} \subset X^*$ je posloupnost omezená v X^* (takže $\|x_n^*\| \le C$ $\forall n \in N$) a $\{x_n\} \subset X$ je posloupnost hustá v X. Jelikož $\{\langle x_n^*, x_1\rangle\} \subset R$ je omezená posloupnost reálných čísel, lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost $\{\langle x_{n1}^*, x_1\rangle\}$. Podobně z $\{\langle x_{n1}^*, x_2\rangle\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{\langle x_{n2}^*, x_2\rangle\}$. Takto lze neomezeně pokračovat. V k-tém indukčním kroku dostaneme podposloupnost $\{x_{nk}^*\} \subset X^*$ takovou, že všechny posloupnosti $\{\langle x_{nk}^*, x_i\rangle\}$, $1 \le i \le k$, jsou konvergentní. Uvažujme nyní posloupnost $\{x_{nn}^*\} \subset X^*$. Zřejmě $\{\langle x_{nn}^*, x_k\rangle\}$ je konvergentní pro libovolný prvek $x_k \in \{x_n\}$. Zvolme libovolně $x \in X$. Ukážeme že posloupnost $\{\langle x_{nn}^*, x\rangle\}$ je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je hustá v X, existuje bod $x_k \in \{x_n\}$ takový, že $\|x - x_k\| < \varepsilon/(3C)$. Jelikož posloupnost $\{\langle x_{nn}^*, x_k\rangle\}$ je konvergentní a tedy cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $|\langle x_{mm}^*, x_k\rangle - \langle x_{nn}^*, x_k\rangle| < \varepsilon/3$ $\forall m, n \ge n_\varepsilon$. Pak ale platí

$$\begin{aligned} |\langle x_{mm}^*, x\rangle - \langle x_{nn}^*, x\rangle| &\le |\langle x_{mm}^*, x\rangle - \langle x_{mm}^*, x_k\rangle| + |\langle x_{mm}^*, x_k\rangle - \langle x_{nn}^*, x_k\rangle| \\ &+ |\langle x_{nn}^*, x_k\rangle - \langle x_{nn}^*, x\rangle| < 2C\|x_k - x\| + \varepsilon/3 < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall m, n \ge n_\varepsilon$, takže posloupnost $\{\langle x_{nn}^*, x\rangle\}$ je cauchyovská a tedy konvergentní (množina reálných čísel je úplná). Definujeme-li $x^* \in X^*$ tak, že $\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_{nn}^*, x\rangle$ $\forall x \in X$, je x^* omezeným (a tedy spojitým) lineárním funkcionálem (takže $x^* \in X^*$) a posloupnost $\{x_{nn}^*\} \subset X^*$ konverguje bodově k x^*.

Definice 33 *Nechť X je Banachův prostor a nechť $K \subset X$. Jestliže z $\{x_n\} \subset K$ a $x_n \xrightarrow{w} x$ plyne $x \in K$, řekneme, že množina K je slabě uzavřená.*

Poznámka 23 Každá slabě uzavřená množina je uzavřená, neboť podle věty 43 $x_n \to x$ implikuje $x_n \xrightarrow{w} x$, takže $x \in K$.

Definice 34 *Nechť X je Banachův prostor a nechť $K \subset X$. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset K$ obsahuje podposloupnost, která je slabě konvergentní v K, řekneme, že množina K je slabě kompaktní.*

Věta 45 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak množina $K \subset X$ je slabě kompaktní právě tehdy je-li omezená a slabě uzavřená.*

Důkaz: (a) Je li $K \subset X$ slabě kompaktní, je slabě uzavřená (neboť každá slabě konvergentní posloupnost musí mít limitu v K). Předpokládejme, že K není omezená. Pak lze zkonstruovat posloupnost $\{x_n\} \subset K$ takovou, že $\|x_n\| \geq n \ \forall n \in N$. Podle věty 36 existuje ke každému bodu $x_n \in \{x_n\}$ lineární funkcionál $x_n^* \in X^*$ takový, že $\|x_n^*\| = 1$ a $\langle x_n^*, x_n \rangle = \|x_n\| \geq n$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ tedy nelze vybrat žádnou slabě konvergentní podposloupnost.

(b) Nechť posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je omezená v X. Nechť $Y \subset X$ je uzavřený podprostor generovaný body x_n, $n \in N$ (t.j. uzávěr množiny všech konečných lineárních kombinací bodů x_n, $n \in N$). Prostor Y je separabilní (neboť konečné lineární kombinace s racionální koeficienty tvoří hustou podmnožinu v Y) a podle věty 41 je též reflexivní. Prostor Y^{**} je tedy separabilní a podle věty 38 je i Y^* separabilní. Kanonické zobrazení $I : Y \to Y^{**}$ převádí omezenou posloupnost $\{x_n\} \subset Y$ na omezenou posloupnost $\{x_n^{**}\} \subset Y^{**}$. Podle věty 44 obsahuje tato posloupnost bodové konvergentní podposloupnost (body leží v Y^*). Této podposloupnosti odpovídá (prostřednictvím kanonického zobrazení I) slabě konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{x_n\} \subset Y$. Jelikož každý lineární funkcionál $x^* \in Y$ lze podle věty 35 rozšířit na X^* a jiné lineární funkcionály již v X^* nejsou, je i $\{x_n\} \subset X$ slabě konvergentní.

Poznámka 24 Platí i věta v jistém smyslu obrácená. Je-li každá omezená a slabě uzavřená množina $K \subset X$ slabě kompaktní, je prostor X reflexivní. Důkaz této věty však používá mnohem hlubší vlastnosti slabé topologie.

Definice 35 *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Jestliže pro každou omezenou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ lze z posloupnosti obrazů $\{Tx_n\} \subset Y$ vybrat podposloupnost, která je konvergentní v Y, řekneme, že zobrazení T je kompaktní (nebo totálně spojité).*

Věta 46 *Kompaktní lineární zobrazení $T : X \to Y$ zobrazuje slabě konvergentní posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ na konvergentní posloupnosti $\{Tx_n\} \subset Y$.*

Poznámka 25 Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Jestliže prostor Y je konečněrozměrný, pak zobrazení T je kompaktní.

Věta 47 *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\} \subset [X, Y]$ je posloupnost kompaktních lineárních zobrazení. Jestliže $T_n \to T$, pak T je kompaktní.*

Poznámka 26 Často, zejména v Hilbertových prostorech, je spojité lineární zobrazení T limitou posloupnosti konečněrozměrných spojitých lineárních zobrazení. Pak podle poznámky 17 a podle věty 47 je T kompaktní. Kompaktní lineární zobrazení jsou zobecněním konečněrozměrných spojitých lineárních zobrazení a jejich řada vlastností se na ně přenáší. Kompaktní lineární zobrazení mají velký význam ve spektrální teorii a v teorii integrálních rovnic.

3 Hilbertovy prostory

Vlastnosti Hilbertových prostorů jsou založeny na použití skalárního součinu, který zobrazuje $X \times X$ do tělesa skalárů vystupujícího v definici lineárního prostoru. Z hlediska aplikací je výhodné pracovat s tělesem komplexních čísel. Abychom formálně zjednodušili výklad, omezíme se na reálné Hilbertovy prostory, i když v části týkající se ortonormálních posloupností a Fourierových koeficientů jsou důkazy vedeny tak, že je lze použít i pro komplexní Hilbertovy prostory.

3.1 Základní pojmy

Definice 36 *Nechť X je (reálný) lineární prostor a $(\cdot,\cdot) : X \times X \to R$ je funkce taková, že*

(a) $(x,x) \geq 0$
$(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $(x,y) = (y,x)$

(c) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
$(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

Pak řekneme, že $(X,(\cdot,\cdot))$ je reálným lineárním prostorem se skalárním součinem. Funkce $(\cdot,\cdot)$ se nazývá skalárním součinem.

Poznámka 27 V komplexním lineárním prostoru se skalární součin $(\cdot,\cdot) : X \times X \to C$ definuje tak, že podmínky (a), (c) zůstanou stejné a podmínka (b) se nahradí rovností

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

(komplexně sdružené číslo). Zřejmě $(x,x) = \overline{(x,x)}$, takže (x,x) je reálné číslo a podmínka (a) má smysl.

Věta 48 *Nechť X je lineární prostor se skalárním součinem. Pak X je lineárním normovaným prostorem s normou definovanou vztahem*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

Důkaz: Podmínky (a), (b) pro normu plynou bezprostředně z podmínek (a), (b) pro skalární součin. Abychom dokázali (c), dokážeme Schwartzovu nerovnost

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Jelikož $\forall x,y \in X$ a $\forall \lambda \in R$ platí

$$
\begin{aligned}
\|x+\lambda y\|^2 &= (x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + (x,\lambda y) + (\lambda y, x) + \lambda^2 (y,y) \\
&= \|x\|^2 + 2\lambda (x,y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

musí být diskriminant této nerovnosti nekladný, takže

$$(x,y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

což dává Schwartzovu nerovnost. Nyní

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

což dává trojúhelníkovou nerovnost.

Definice 37 *Norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ se nazývá normou indukovanou skalárním součinem. Metrika $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ se nazývá metrikou indukovanou skalárním součinem.*

Věta 49 *Skalární součin je spojitý v indukované metrice.*

Důkaz: Platí

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \\
\|x-y\|^2 &= (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

takže

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

a spojitost skalárního součinu plyne ze spojitosti normy.

Věta 50 *Norma indukovaná skalárním součinem splňuje rovnoběžníkovou rovnost*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Splňuje-li nějaká norma rovnoběžníkovou rovnost, můžeme zavést skalární součin vztahem

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{$*$}$$

Důkaz: (a) Pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)\\ &= \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2+\|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2\\ &= 2\|x\|^2+2\|y\|^2\end{aligned}$$

(b) Ze vztahu ($*$) plynou bezprostředně podmínky (a), (b) pro skalární součin. Platí totiž $(x,x)=\|2x\|^2/4=\|x\|^2$, takže $(x,x)\geq 0$ a $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Symetrie je zřejmá. Z rovnoběžníkové rovnosti plyne

$$\begin{aligned}\|u+z+v\|^2+\|u+z-v\|^2 &= 2\|u+z\|^2+2\|v\|^2\\ \|u-z+v\|^2+\|u-z-v\|^2 &= 2\|u-z\|^2+2\|v\|^2\end{aligned}$$

což po odečtení dává

$$\left(\|u+z+v\|^2-\|u-z+v\|^2\right)+\left(\|u+z-v\|^2-\|u-z-v\|^2\right)=2\|u+z\|^2-2\|u-z\|^2$$

neboli (podle ($*$) po vydělení číslem 4)

$$(u+v,z)+(u-v,z)=2(u,z)$$

Položíme-li $v=u$, dostaneme

$$(2u,z)=2(u,z)$$

Položíme-li $x=u+v$, $y=u-v$, a použijeme-li předchozí výsledek, dostaneme

$$(x,z)+(y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right)=(x+y,z)$$

což je vzorec pro součet. Přímo z ($*$) plyne $(-x,y)=-(x,y)$. Nechť $m,n\in N$. Pak můžeme psát

$$(mx,y)=(\underbrace{x+x+\ldots x}_{m},y)=\underbrace{(x,y)+(x,y)+\ldots(x,y)}_{m}=m(x,y)$$

a

$$\left(n\frac{1}{n}x,y\right)=n\left(\frac{1}{n}x,y\right)$$

neboli

$$\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}(x, y)$$

Pro libovolné $\lambda \in Q$ (racionální) tedy platí

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

a protože funkce $(\cdot, y)$ je spojitá, platí to i pro libovolné $\lambda \in R$.

Definice 38 *Hilbertovým prostorem nazveme lineární prostor se skalárním součinem, který je úplný v metrice indukované skalárním součinem.*

Poznámka 28 Hilbertův prostor je Banachovým prostorem s normou indukovanou skalárním součinem.

Příklad 34 Prostor R^n se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

je Hilbertovým prostorem (viz příklad 2 s $p = 2$).

Příklad 35 Prostor l_2 se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

je Hilbertovým prostorem. Jelikož $\forall n \in N$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

(Schwartzova nerovnost, která je speciálním případem Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$), dostaneme v limitě

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} < \infty$$

takže skalární součin je definován $\forall x, y \in l_2$. Ověření podmínek (a)-(c) je triviální. Norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$$

indukovaná skalárním součinem splývá se standardní normou v l_2 (příklad 27), takže l_2 je úplný. Stejným způsobem lze ukázat, že prostor $L_2[a, b]$ se skalárním součinem

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

je Hilbertovým prostorem.

Příklad 36 Prostor $C[a, b]$ není Hilbertovým prostorem. Uvažujme pro jednoduchost prostor $C[0, 1]$. Položme $x = t^2$ a $y = t$. Pak

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max_{t\in[0,1]} |t^2| = 1 \\ \|y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t| = 1 \\ \|x + y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t(t + 1)| = 2 \\ \|x - y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t(t - 1)| = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Odtud

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4 + \frac{1}{8} > 4 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

takže neplatí rovnoběžníková rovnost. Podobným způsobem lze ukázat, že prostory l_∞ a $L_\infty[a, b]$ nejsou Hibretovými prostory. Dokonce ani prostory l_p a $L_p[a, b]$ nejsou Hilbertovými prostory pro $l \neq 2$.

Poznámka 29 V příkladu 36 jsme ukázali, že v poměrně málo klasických Banachových prostorech lze zavést skalární součin. Na druhé straně jsou Hilbertovy prostory přímým zobecněním konečněrozměrných Eukleidovských prostorů a mají řadu výhodných vlastností, které opodstatňují jejich zavedení.

Věta 51 *Nechť X je Hilbertův prostor, $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor a $x \in X$. Pak existuje právě jeden prvek $v \in V$ takový, že*

$$\|x - v\| = \inf_{y\in V} \|x - y\| = \rho(x, V)$$

Důkaz: Z definice infima plyne, že existuje posloupnost $\{v_n\} \subset V$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|x - v_n\| = \rho(x, V)$$

Z rovnoběžníkové rovnosti plyne

$$\begin{aligned}\|v_m - v_n\|^2 &= \|(x-v_n)-(x-v_m)\|^2 = \\ &= 2\|x-v_n\|^2 + 2\|x-v_m\|^2 - \|(x-v_n)+(x-v_m)\|^2 = \\ &= 2\|x-v_n\|^2 + 2\|x-v_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m+v_n)\right\|^2\end{aligned}$$

$\forall m, n \in N$ a jelikož $\|x - v_m\| \to \rho(x, V)$, $\|x - v_n\| \to \rho(x, V)$ a

$$\rho(x,V) \leq \left\|x - \frac{1}{2}(v_m+v_n)\right\| \leq \frac{1}{2}\|x-v_m\| + \frac{1}{2}\|x-v_n\| \to \rho(x,V)$$

platí

$$\|v_m - v_n\|^2 \to 4\rho(x,V) - 4\rho(x,V) = 0$$

takže posloupnost $\{v_n\} \subset V$ je Cauchyovská. Protože prostor X je úplný a V je jeho uzavřený podprostor, platí $v_n \to v \in V$. Ze spojitosti normy pak plyne

$$\rho(x,V) = \lim_{n\to\infty} \|x - v_n\| = \|x - v\|$$

Definice 39 *Nechť X je Hilbertův prostor a nechť $x, y \in X$. Jestliže $(x, y) = 0$, řekneme, že prvky $x, y \in X$ jsou ortogonální.*

Definice 40 *Nechť X je Hilbertův prostor a $V \subset X$ je jeho lineární podprostor. Pak lineární podprostor*

$$V^\perp = \{w \in X : (w,v) = 0 \ \ \forall v \in V\}$$

nazveme ortogonálním doplňkem V.

Věta 52 *Nechť X je Hilbertův prostor, $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor a $x \in X$. Pak existuje právě jedna dvojice $v \in V$ a $w \in V^\perp$ taková, že $x = v + w$.*

Důkaz: (a) (Existence) Nechť $x \in X$. Nechť $v \in V$ je prvek takový, že$\|x - v\| = \rho(x, V)$. Pak $v + \lambda y \in V$ a $v - \lambda y \in V$ $\forall y \in V$ a $\forall \lambda > 0$, takže platí

$$\begin{aligned}\|x-v\|^2 &\leq \|x - v + \lambda y\|^2 = \|x-v\|^2 + 2\lambda(x-v,y) + \lambda^2\|y\|^2 \\ \|x-v\|^2 &\leq \|x - v - \lambda y\|^2 = \|x-v\|^2 - 2\lambda(x-v,y) + \lambda^2\|y\|^2\end{aligned}$$

neboli

$$2|(x-v,y)| \leq \lambda\|y\|^2$$

což v limitě pro $\lambda \to 0$ dává $(x - v, y) = 0$. Položíme-li $w = x - v$ lze psát $x = v + w$ a platí $(w, y) = 0\ \forall y \in V$, neboli $w \in V^\perp$.

(b) Abychom dokázali jednoznačnost, budeme předpokládat, že $x = v_1 + w_1$ a $x = v_2 + w_2$, kde $v_1, v_2 \in V$ a $w_1, w_2 \in V^\perp$. Pak

$$v_1 + w_1 - v_2 - w_2 = x - x = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

Ale $v_1 - v_2 \in V$ a $w_2 - w_1 \in V^\perp$, takže

$$(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = (v_1 - v_2, w_2 - w_1) = 0$$

neboli $v_1 = v_2$ a $w_1 = x - v_1 = x - v_2 = w_2$.

Důsledek 8 Nechť X je Hilbertův prostor a $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor. Pak $V \neq X \Rightarrow V^\perp \neq 0$ (existuje $w \in X \backslash V$ tak, že $(w, v) = 0$ $\forall v \in V$).

Věta 53 *(Riesz) Nechť X je Hilbertův prostor a $x^* \in X^*$ je spojitý lineární funkcionál na X. Pak existuje právě jeden prvek $x \in X$ takový, že*

$$\langle x^*, y \rangle = (x, y) \quad \forall y \in X$$

a $\|x^*\| = \|x\|$.

Důkaz: (a) (Existence) Označme

$$V = \{y \in X : \langle x^*, y \rangle = 0\} \subset X$$

nulový podprostor lineárního funkcionálu $x^* \in X^*$. Snadno se dokáže, že V je uzavřený lineární podprostor X. Jestliže $V = X$, pak $\langle x^*, y \rangle = 0\ \forall y \in X$ a lze položit $x = 0$. Jestliže $V \neq X$, existuje podle důsledku 8 nenulový prvek $w \in V^\perp$. Zřejmě $\langle x^*, w \rangle \neq 0$ a

$$y - \frac{\langle x^*, y \rangle}{\langle x^*, w \rangle} w \in V \quad \forall y \in X$$

takže

$$\left(w, y - \frac{\langle x^*, y \rangle}{\langle x^*, w \rangle} w \right) = 0 \quad \forall y \in X$$

neboli

$$(w, y) = \langle x^*, y \rangle \frac{(w, w)}{\langle x^*, w \rangle}$$

Položíme-li

$$x = \frac{\langle x^*, w\rangle}{(w,w)} w$$

máme $(x,y) = \langle x^*, y\rangle \ \forall y \in X$.

(b) (Jednoznačnost) Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dva prvky takové, že $(x_1, y) = (x_2, y) = \langle x^*, y\rangle \ \forall y \in X$. Pak pro $y = x_1 - x_2$ platí

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= (x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = \\ &= \langle x^*, x_1 - x_2\rangle - \langle x^*, x_1 - x_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

(c) (Norma) Platí

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} |(x,y)| \leq \sup_{\|y\|=1} \|x\| \, \|y\| = \|x\|$$

z druhé strany dostaneme

$$\|x\|^2 = (x,x) = \langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\| \, \|x\|$$

což dohromady dává $\|x^*\| = \|x\|$.

Důsledek 9 Každý Hilbertův prostor je reflexivní (podle Věty 53 platí $X = X^* = X^{**}$).

3.2 Ortonormální báze

Definice 41 *Nechť X je Hilbertův prostor a nechť $M \subset X$ je množina prvků takových, že*

$$\begin{aligned} x, y \in M \quad &\text{a} \quad x = y \Leftrightarrow (x,y) = 1 \\ x, y \in M \quad &\text{a} \quad x \neq y \Leftrightarrow (x,y) = 0 \end{aligned}$$

Pak řekneme, že množina $M \subset X$ je ortonormální. Jestliže navíc z $x \in X\backslash M$ a $(x,y) = 0 \ \forall y \in M$ plyne $x = 0$ (t.j. jestliže neexistuje nenulový prvek $x \in X\backslash M$ ortogonální ke všem prvkům množiny M) řekneme, že ortonormální množina M je úplná v X.

Příklad 37 V prostoru l_2 je množina

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, 0, \ldots\} \\ e_2 &= \{0, 1, 0, \ldots\} \\ e_3 &= \{0, 0, 1, \ldots\} \\ \ldots & \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ortonormální a úplná. Pro každou nenulovou posloupnost $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset R$ existuje $k \in N$ tak, že $x_k \neq 0$ a z definice skalárního součinu v l_2 (příklad 33), plyne $(e_k, x) = x_k \neq 0$.

Věta 54 *Nechť X je Hilbertův prostor a $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X. Pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{$*$}$$

Důkaz: Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|^2 &= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right) - \left(\sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n, x \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{m} (x, x_n)(x, x_n) = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall n \in N$. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme $(*)$.

Poznámka 30 Nerovnost $(*)$ se nazývá Besselovou nerovností. Čísla (x, x_n) se nazývají Fourierovými koeficienty prvku $x \in X$ (vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{x_n\} \subset X$).

Věta 55 *Nechť X je Hilbertův prostor, $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X a $\{\alpha_n\} \subset R$ je posloupnost sklalárů. Pak pro libovolné $m \in N$ platí*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \geq \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|$$

Důkaz: Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|^2 &= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right) - \left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n, x \right) + \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n) - \alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 = \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

(poslední rovnost je odvozena v Důkazu Věty 54).

Poznámka 31 Věta 55 demonstruje minimalizační vlastnost Fourierových koeficientů. Je-li $\{x_1, \dots, x_m\}$ konečná ortonormální množina a V lineární obal této množiny, pak prvek $x \in X$ je na V nejlépe aproximován prvkem

$$v = \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n$$

Věta 56 *Nechť X je Hilbertův prostor, $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X a $\{\alpha_n\} \subset R$ je posloupnost sklalárů. Pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

konverguje právě tehdy, jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \qquad (*)$$

V tomto případě

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2}$$

Důkaz: Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{\alpha=n}^{m} \alpha_k x_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n}^{m} \alpha_k x_k, \sum_{k=n}^{m} \alpha_k x_k \right) = \sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2$$

takže posloupnost $\{s_n\}$ je Cauchyovská (a protože X je úplný je zároveň konvergentní) právě tehdy, platí-li $(*)$. Zbytek důkazu je zřejmý

Definice 42 *Nechť X je Hilbertův prostor, $M \subset X$ je ortonormální množina a $\mathcal{L}(M)$ je lineární obal množiny M (množina všech lineárních kombinací prvků množiny M). Jestliže $\overline{\mathcal{L}(M)} = X$, řekneme, že M je ortonormální báze v X.*

Věta 57 *V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.*

Věta 58 *V separabilním Hilbertově prostoru existuje spočetná ortonormální báze.*

Důkaz: Předpokládejme, že $M \subset X$ je nespočetná ortonormální báze. Jelikož pro $\forall x, y \in M$ platí

$$\rho^2(x, y) = (x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$$

existuje nespočetný systém disjunktních otevřených koulí $B\left(x, \sqrt{2}/2\right) \subset X$, $x \in M$. Pro libovolnou spočetnou množinu $\{x_n\} \subset X$ pak musí existovat prvek $x \in X$ takový, že $\{x_n\} \cap B\left(x, \sqrt{2}/2\right) = \emptyset$. Množina $\{x_n\} \subset X$ tedy není hustá v X.

Věta 59 *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a $\{x_n\} \subset X$ je spočetná ortonormální množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) $\{x_n\} \subset X$ je úplná v X.

(b) $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální báze v X.

(c) Pro libovolný prvek $x \in X$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 = \|x\|^2 \tag{$*$}$$

Důkaz: (a) $\Rightarrow$ (b): Předpokládejme, že (b) neplatí. Pak podle Důsledku 8 existuje nenulový prvek $x \in X \backslash \{x_n\}$ takový, že $(x, x_n) = 0\ \forall n \in N$, což je ve sporu s (a).
(b) $\Rightarrow$ (c): Platí-li (b), existuje posloupnost $\{\alpha_n\} \subset R$, taková, že

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

Použijeme-li větu 55 a rovnost z důkazu věty 54 dostaneme

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \geq \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\| = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2$$

což v limitě pro $m \to \infty$ dává

$$0 \geq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2$$

Použijeme-li Besselovu nerovnost (věta 54) dostaneme ($*$).
(c) $\Rightarrow$ (a): Předpokládejme, že (a) neplatí. Pak existuje prvek $x \neq 0$, $x \in X \backslash \{x_n\}$ takový, že $(x, x_n) = 0\ \forall n \in N$. Podle ($*$) však platí $\|x\| = 0$, což je spor.

Poznámka 32 Rovnost ($*$) se nazývá Parsevalova rovnost.

Příklad 38 Nechť X je prostor komplexních funkcí periodických s periodou 2π (t.j. $x(t+2\pi) = x(t)\ \forall t \in R$) takových, že

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\overline{x}(t)dt < \infty, \quad \forall x \in X$$

(pruhem nad komplexním číslem značíme komplexně sdružené číslo). Zavedeme-li skalární součin vztahem

$$(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\overline{y}(t)dt, \quad \forall x,y \in X$$

je X (komplexním) Hilbertovým prostorem a množina funkcí

$$x_n(t) = e^{int}, \quad n \in Z$$

(Z je množina celých čísel a i je imaginární jednotka) tvoří úplný ortonormální systém v X. Důkaz úplnosti tohoto systému lze nalézt ve speciální literatuře o Fourierových řadách. Ortonormalita je zřejmá. Pro $n, m \in Z$ platí

$$(x_n, x_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_n(t)\overline{x}_m(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt$$

takže

$$(x_n, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1$$

a

$$(x_n, x_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \frac{1}{2\pi i(n-m)}(e^{2\pi i(n-m)} - 1) = 0$$

pokud $m \neq n$, neboť exponenciální funkce má periodu $2\pi i$ a tedy $e^{2\pi i(n-m)} = e^0 = 1$. Podle věty 49 lze libovolný prvek $x \in X$ vyjádřit jako součet Fourierovy řady

$$x(t) = \sum_{n \in Z}(x, x_n)x_n(t) = \sum_{n \in Z} c_n e^{int}$$

kde Fourierovy koeficienty počítáme podle vzorce

$$c_n = (x, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-int}dt, \quad n \in Z$$

Z úplnosti použitého ortonormálního systému plyne Parsevalova rovnost

$$\sum_{n \in Z}|c_n|^2 = \|x\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\overline{x}(t)dt$$

Věta 60 *Každé dva separabilní Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní.*

Důkaz: Jsou-li X, Y dva separabilní Hilbertovy prostory, existují spočetné ortonormální báze $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset Y$ a pro $x \in X$, $y \in Y$ platí

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad \alpha_n = (x, x_n) \;\; \forall n \in N \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n, \quad \beta_n = (y, y_n) \;\; \forall n \in N \end{aligned}$$

Definujeme zobrazení $I : X \to Y$ tak, že

$$y = Ix \;\Leftrightarrow\; \beta_n = \alpha_n \quad \forall n \in N$$

Toto zobrazení je zřejmě lineární, prosté a zobrazuje X na Y. Protože

$$\|Ix\| = \|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|$$

je I izometrické.

Důsledek 10 Pro libovolný separabilní Hilbertův prostor X platí $X = l_2$.

Důsledek 11 Hilbertův prostor je separabilní právě tehdy, existuje-li v něm spočetná ortonormální báze. První část tohoto tvrzení udává věta 56. Druhá část plyne z toho, že existence spočetné ortonormální báze dovoluje sestrojit izometrické zobrazení tohoto prostoru na l_2 (důkaz věty 60), který je separabilní.