

Co vy na to, pane Gauss?

Petr Tichý

13. listopadu 2013

Válka v Perském zálivu, Patriot-Scud

25.02.1991 minula americká raketa **Patriot** iráckou raketu **Scud**.
Scud zasáhla americká kasárna, 28 vojáků zahynulo, 100 raněno.



Proč raketa Patriot minula svůj cíl?

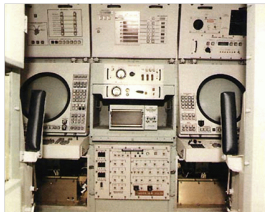
odpalovací zařízení



radar



kontrolní stanice



- Výpočet předpokládané **oblasti výskytu** objektu na základě **rychlosti** objektu, **souřadnic**, **času**.
- Vlastní hodiny vrací celé číslo → **čas v desetínách sekund** od zapnutí systému.
- Abychom získali **čas v sekundách**, musíme **dělit 10!**

Dělení 10ti na počítači

- Číslo $1/10$ má v **dvojkové soustavě** nekonečný rozvoj

$$1/10 = 0,00011001100110011001100 \dots$$

- Systém \rightarrow 24 bitů na číslo, usekne výsledek, chyba

$$\approx 0,000000095.$$

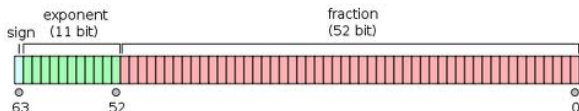
- **100 hodin** provozu \rightarrow hodiny vrací **velká čísla**, chyba

$$100 * 60 * 60 * 10 * 0,000000095 \approx 0,34$$

- Za 0,34 sekundy uletěla Scud zhruba **570 metrů**.

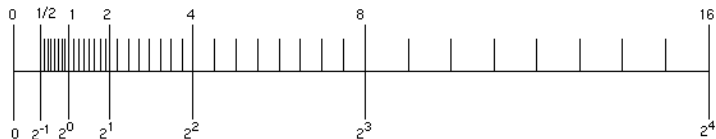
- **Příčinou** minutí cíle byl tedy **nepřesný výpočet času**.

- **Reprezentace** čísla v počítači



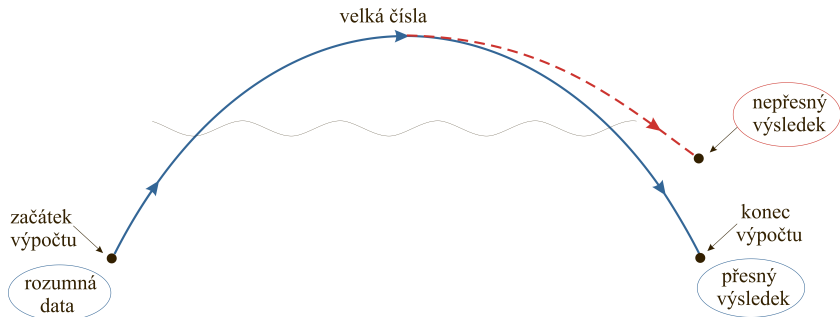
- Jak jsou tato čísla **rozložena**?

Binary Representation:



- Pozorování: počítání s **velkými čísly** → **nepřesné výsledky**.

Intuitivní představa výpočtu



Hledání odpovědi:

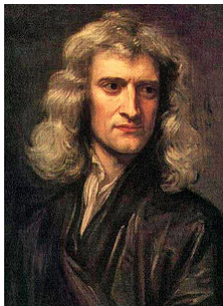
numerická (numerus = číslo, vyčíslení pomocí čísel)

analýza (analyzovat, pochopit, rozebrat do detailů).

Gaussova eliminace

algoritmus pro řešení soustavy lineární rovnic

- jeden z neužitečnějších a nejpoužívanějších,
- používali ho již staří **Číňané** před více než 2000 lety,
- **Isaac Newton** jej objevil pro Evropu (1670),
- **Carl Friedrich Gauss** (1810) navrhl vhodnou notaci,
- zhruba od roku 1950 název Gaussova eliminace.



Jak funguje Gaussova eliminace?

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x + 5y - 5z = 2$$

$$3x + 2y - 2z = 3$$

Kvůli algoritmizaci budeme pracovat jen s koeficienty

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -33 & -33 \end{array} \right].$$

Získali jsme ekvivalentní soustavu

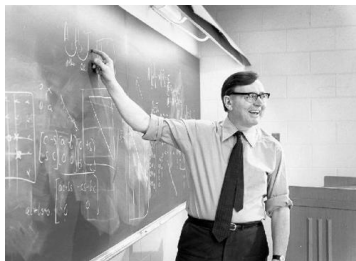
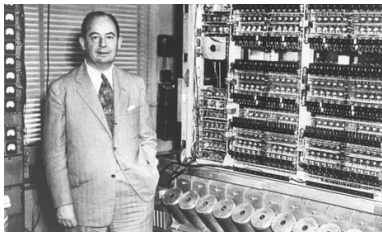
$$x + 2y + z = 4$$

$$y - 7z = -6$$

$$-33z = -33$$

Numerická analýza Gaussovy eliminace

- 40 léta minulého století poprvé implementována na počítači,
- John von Neumann, Alan Turing, James H. Wilkinson.



Gaussova eliminace může dávat nepřesné výsledky

Příklad

- Velikost prvků může při eliminaci růst

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \\ -10 & 1 & 0 & 0 & 12 & \bullet \\ -10 & -10 & 1 & 0 & 124 & \bullet \\ -10 & -10 & -10 & 1 & 1248 & \bullet \\ -10 & -10 & -10 & -10 & 124816 & \bullet \end{array} \right].$$

- n rovnic o n neznámých \rightarrow velikost prvku je

$$2^{n-1}.$$

Příklad řešení na počítači, 56 neznámých

Zvolme hodnoty proměnných (řešení), například

$$[1, -1, 1, \dots, -1, 1, -1]$$

a **dopočtíme** pravou stranu

$$[0, -3, 0, -3, \dots, 0, -3, 0, -2].$$

Řešíme soustavu tvaru

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right],$$

ale pro 56 neznámých. Počítač spočte **nepřesné řešení**

$$[1, -1, 1, \dots, -1, 1, -1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{2}, -1].$$

- Gaussova eliminace **může spočít řešení nepřesně**, i přesto jeden z nejpoužívanějších algoritmů, důležitá součást velmi komplikovaných algoritmů.
- Při **praktických výpočtech** dochází k velkému růstu velikosti prvků **zřídka**, nutné ale kontrolovat během výpočtu.
- Obecně, většina výpočtů se **realizuje na počítači**. Je důležité rozumnět **chování algoritmů v počítači**. Potřebujeme vědět, co jsem spočetl, s jakou přesností.
- **Numerická analýza** hledá odpovědi na tyto otázky. Často velmi **těžké matematické problémy**.

Co Vy na to, pane Gauss?



Numerická analýza je k nezaplacení.

Děkuji za pozornost!