

Übersicht zur Numerik II für Ingenieure

Petr Tichý und Jörg Liesen

Technische Universität Berlin

19. Februar 2004

Modellierung

“Real world” Problem



Mathematisches Modell
(Differentialgleichung)

Diskretisierung



Diskretes Problem

LGS Lösung



Linear algebraisches
Problem

Modellierung

“Real world” Problem

Mathematisches Modell
(Differentialgleichung)

Diskretisierung

Diskretes Problem

LGS Lösung

Linear algebraisches
Problem

Motivation

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen

Typeinteilung

Elliptische Randwertprobleme

Wiederholung

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- gewöhnliche \times partielle
- lineare \times nichtlineare
- homogene \times inhomogene

Verschiedene DGLen erfordern verschiedene Lösungsmethoden.

- gewöhnliche \times partielle
- lineare \times nichtlineare
- homogene \times inhomogene

Verschiedene DGLen erfordern verschiedene Lösungsmethoden.

Wir konzentrieren uns auf lineare partielle Differentialgleichungen (PDGL) zweiter Ordnung:

$$-\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x)$$

Koeffizienten $a_{ik}(x)$ definieren symmetrische Matrix $A(x)$.

... nach Eigenwerten von $A(x)$ und Rang von $[A(x)|b(x)]$

- **elliptische**, z.B.

$$\Delta u = f \quad (\text{Poisson-Gleichung}),$$

- **hyperbolische**, z.B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Wellen-Gleichung}),$$

- **parabolische**, z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Wärmeleitung}).$$

Motivation

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen

Typeinteilung

Elliptische Randwertprobleme

Wiederholung

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$+ \text{ Randbedingungen auf } \Gamma = \partial\Omega$$

Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$+ \text{Randbedingungen auf } \Gamma = \partial\Omega$$

Klassifikation von Randbedingungen (RB):

- Dirichlet RB

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma_i \subseteq \Gamma,$$

- Neumann RB

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \Gamma_i \subseteq \Gamma,$$

- Cauchy RB

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g \quad \text{auf } \Gamma_i \subseteq \Gamma.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen

Typeinteilung

Elliptische Randwertprobleme

Wiederholung

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Modellierung

“Real world” Problem



Mathematisches Modell
(Differentialgleichung)

Diskretisierung



Diskretes Problem

LGS Lösung



Linear algebraisches
Problem

Motivation

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen

Typeinteilung

Elliptische Randwertprobleme

Wiederholung

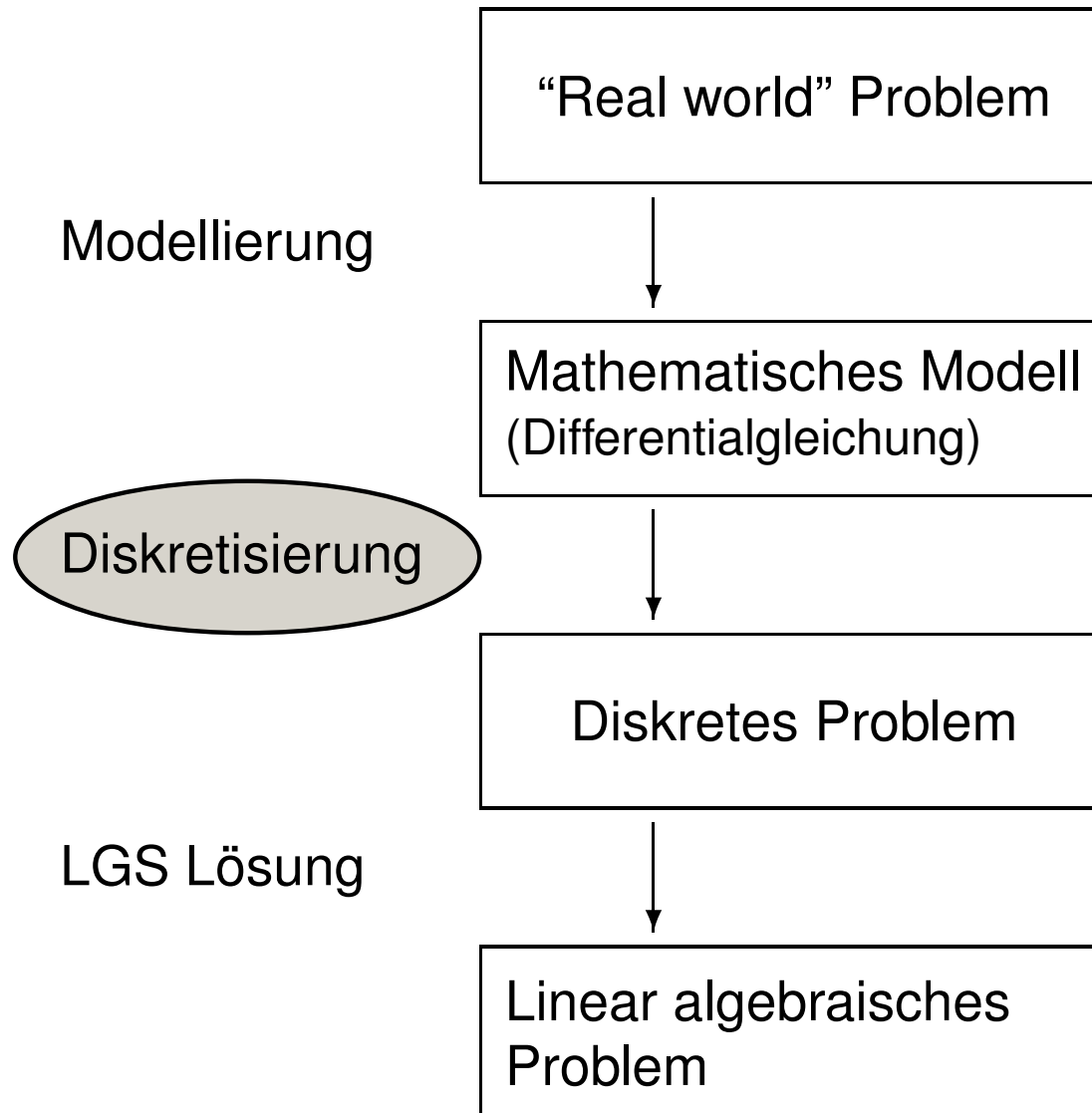
Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Differenzen Methode

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Taylor Entwicklung von u in Gitterpunkten

$$v(x - h) = v(x) - \frac{h}{1!} v'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) - \dots$$

$$v(x + h) = v(x) + \frac{h}{1!} v'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) + \dots$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Taylor Entwicklung von u in Gitterpunkten

$$v(x - h) = v(x) - \frac{h}{1!} v'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) - \dots$$

$$v(x + h) = v(x) + \frac{h}{1!} v'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) + \dots$$

Elimination “ungewollter” niedriger Ableitungen ergibt

$$-v''(x) = \frac{-v(x - h) + 2v(x) - v(x + h)}{h^2} + O(h^2)$$

Approximation (schematisch):

$$-v''(x) \approx h^{-2} \textcircled{-1} \textcircled{2} \textcircled{-1} u$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

● 5-Punkte-Stern:

$$-\Delta u = h^{-2} \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ | \\ \textcircled{-1} - \textcircled{4} - \textcircled{-1} \\ | \\ \textcircled{-1} \end{array} u + \mathcal{O}(h^2)$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

● 5-Punkte-Stern:

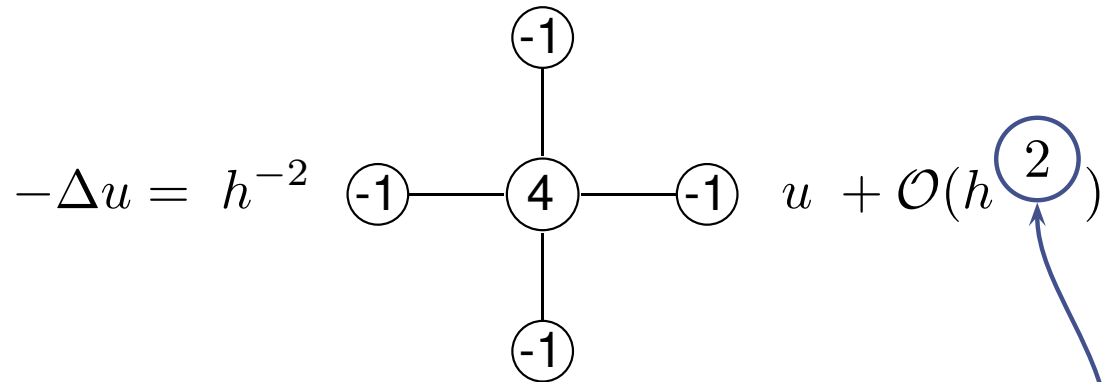
$$-\Delta u = h^{-2} \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ | \\ \textcircled{-1} - \textcircled{4} - \textcircled{-1} \\ | \\ \textcircled{-1} \end{array} u + \mathcal{O}(h^2)$$

● kompakter 9-Punkte-Stern:

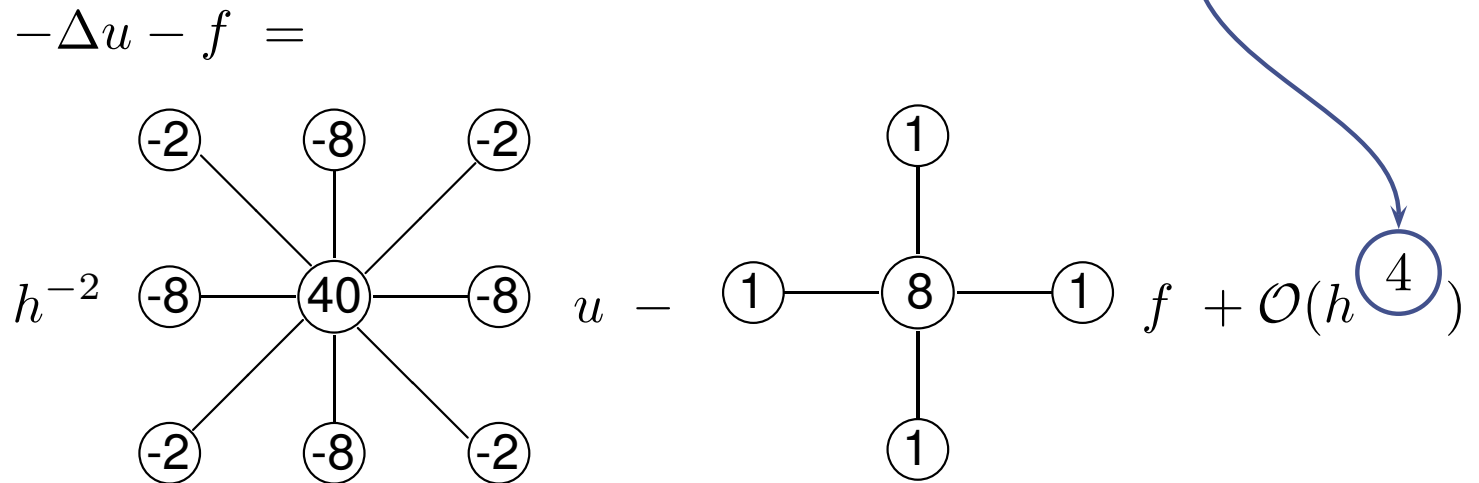
$$-\Delta u - f = h^{-2} \begin{array}{ccc} \textcircled{-2} & \textcircled{-8} & \textcircled{-2} \\ & | & \\ \textcircled{-8} & \textcircled{40} & \textcircled{-8} \\ & | & \\ \textcircled{-2} & \textcircled{-8} & \textcircled{-2} \end{array} u - \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{8} - \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} f + \mathcal{O}(h^4)$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
 - Idee: Taylor Entwicklung
 - Differenzen Sterne 2D**
 - Dirichlet Randbedingungen
 - Neuman Randbedingungen
 - Idee von Finiten Differenzen
 - Konvergenz
 - Konvergenz-Beispiel
 - Vorteile und Nachteile
 - Testproblem
 - Darstellung
 - Experiment
 - Darstellung
 - Wiederholung
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

● 5-Punkte-Stern:



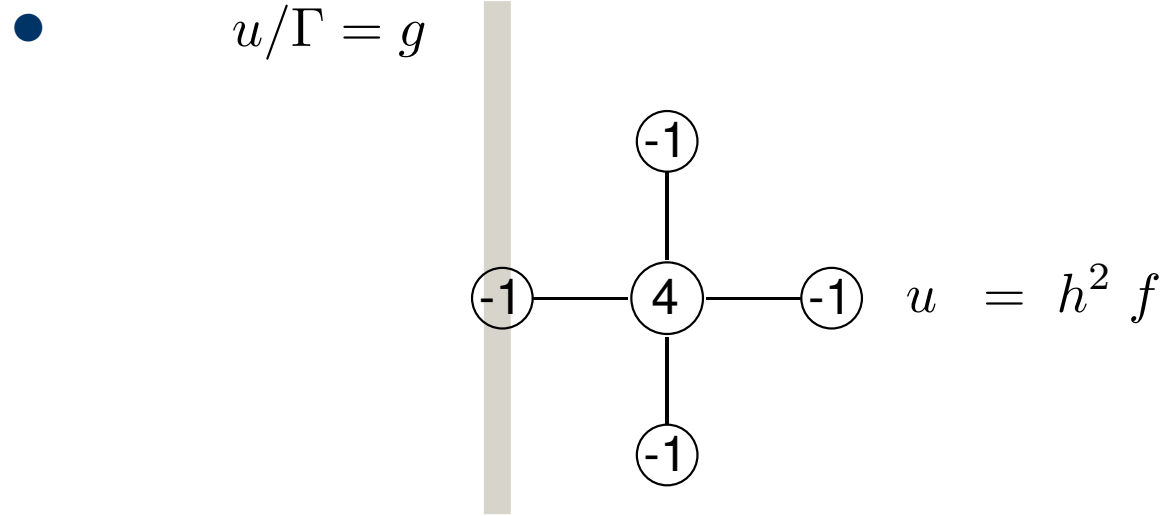
● kompakter 9-Punkte-Stern:



Konsistenzordnung

Dirichlet Randbedingungen

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
 - Idee: Taylor Entwicklung
 - Differenzen Sterne 2D
 - Dirichlet Randbedingungen**
 - Neuman Randbedingungen
 - Idee von Finiten Differenzen
 - Konvergenz
 - Konvergenz-Beispiel
 - Vorteile und Nachteile
 - Testproblem
 - Darstellung
 - Experiment
 - Darstellung
 - Wiederholung
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen



Dirichlet Randbedingungen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

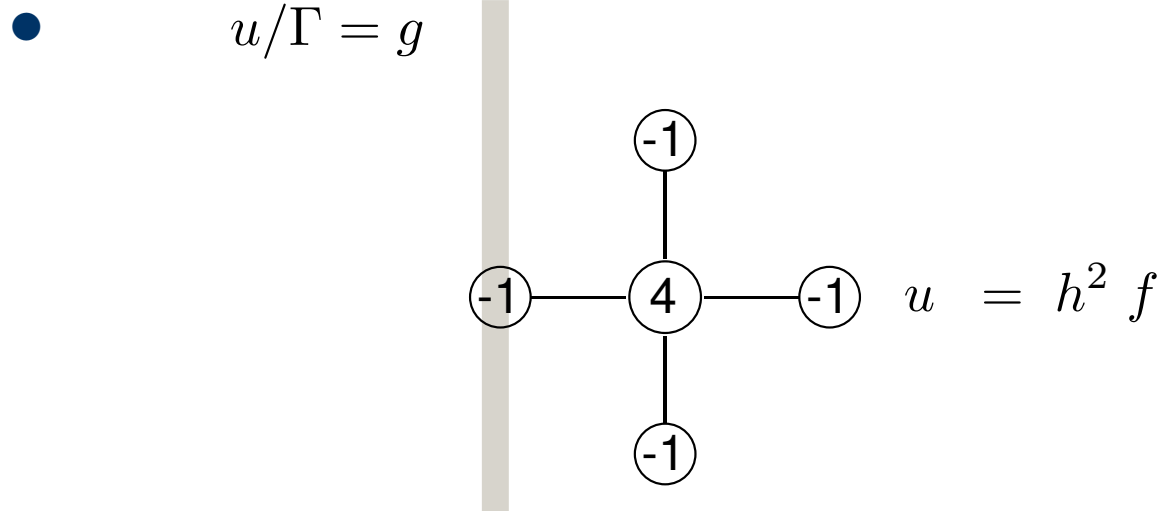
Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen



- Für u am Rand setzen wir g in den Differenzenstern ein.
 g überführen wir auf die rechte Seite.

Dirichlet Randbedingungen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

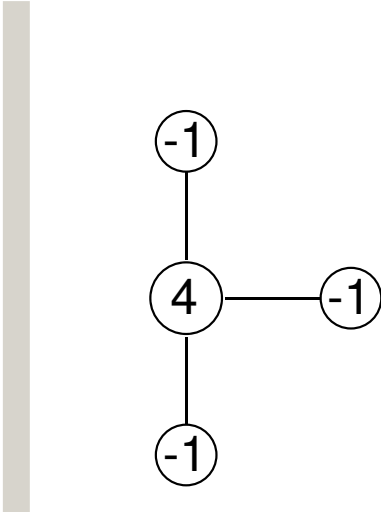
Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- $$u/\Gamma = g$$


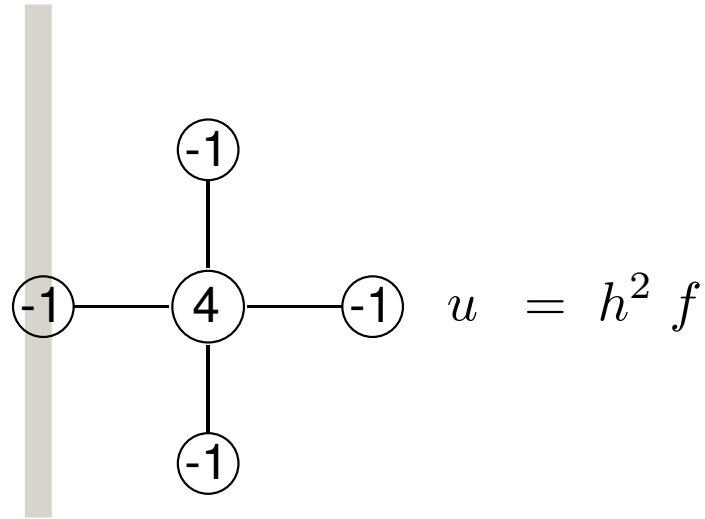
$$u = h^2 f + g(\Gamma)$$

- Für u am Rand setzen wir g in den Differenzenstern ein.
 g überführen wir auf die rechte Seite.

Neuman Randbedingungen

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
 - Idee: Taylor Entwicklung
 - Differenzen Sterne 2D
 - Dirichlet Randbedingungen
 - Neuman Randbedingungen**
 - Idee von Finiten Differenzen
 - Konvergenz
 - Konvergenz-Beispiel
 - Vorteile und Nachteile
 - Testproblem
 - Darstellung
 - Experiment
 - Darstellung
 - Wiederholung
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

- $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \varphi$



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

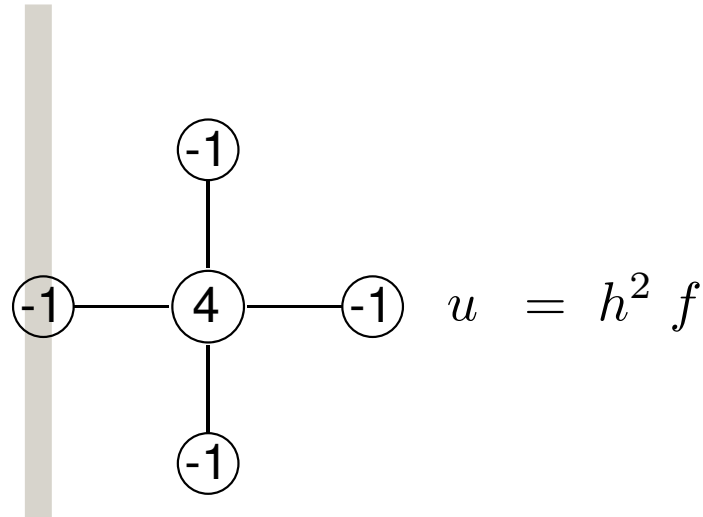
Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- $$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \varphi$$



- Einseitige Differenz: Auf linkem Rand gilt**

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{u(x) - u(x - h)}{h} + O(h).$$

Wir approximieren RB durch

$$u(x) = u(x + h) + h \varphi.$$

Neuman Randbedingungen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

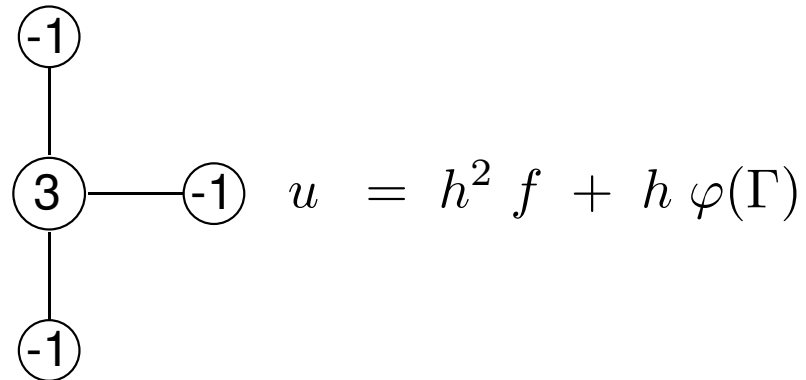
Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- $$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \varphi$$



- Einseitige Differenz: Auf linkem Rand gilt

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{u(x) - u(x - h)}{h} + O(h).$$

Wir approximieren RB durch

$$u(x) = u(x + h) + h \varphi.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- Gegeben: Differentialgleichung, Randbedingungen, Gitter.
- Ersetze Differentialoperator in Gitterpunkten durch Differenzensterne (aus Taylor Entwicklung).
- 1 Stern in innerem Gitterpunkt = 1 Gleichung.
- In Differenzensternen betrachte auch Randbedingungen.
- Ersetze die Differentialgleichung durch Differenzengleichungen.
- Wir erhalten lineares Gleichungssystem.

$$A_h u_h = b_h.$$

Definition:

- **Konsistenz** von Ordnung p :

$$| b_h - A_h u |_h = O(h^p).$$

- **Stabilität**: Es gibt C unabhängig von h , so daß:

$$\| A_h^{-1} \| \leq C < \infty.$$

- **Konvergenz** von Ordnung p :

$$| u_h - u |_h = O(h^p).$$

Definition:

- **Konsistenz** von Ordnung p :

$$| b_h - A_h u |_h = O(h^p).$$

- **Stabilität**: Es gibt C unabhängig von h , so daß:

$$\| A_h^{-1} \| \leq C < \infty.$$

- **Konvergenz** von Ordnung p :

$$| u_h - u |_h = O(h^p).$$

Konsistenz + Stabilität = Konvergenz

Definition:

- **Konsistenz** von Ordnung p :

$$| b_h - A_h u |_h = O(h^p).$$

- **Stabilität**: Es gibt C unabhängig von h , so daß:

$$\| A_h^{-1} \| \leq C < \infty.$$

- **Konvergenz** von Ordnung p :

$$| u_h - u |_h = O(h^p).$$

Satz: Ein konsistentes und stabiles Verfahren ist konvergent und die Konvergenzordnung ist mindestens gleich der Konsistenzordnung.

Beispiel: $-\Delta u = f$, $\Omega = [0, 1]^2$, Dirichlet RB

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

	Konsistenz- Ordnung	Konvergenz- Ordnung	Glattheit von u
5-P-S	2	2	$u \in C^4(\Omega)$
komp. 9-P-S	4	4	$u \in C^6(\Omega)$
komp. 9-P-S	4	6	$u \in C^8(\Omega),$ $f = 0$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Vorteile:

- Einfaches mathematisches Konzept (Taylorentwicklung).
- Für regelmässige Gebiete einfache Implementation.
- Für regelmässige Gebiete gute Resultate.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Vorteile:

- Einfaches mathematisches Konzept (Taylorentwicklung).
- Für regelmässige Gebiete einfache Implementation.
- Für regelmässige Gebiete gute Resultate.

Nachteile:

- Hohe Voraussetzungen an die Glattheit von u .
- Probleme mit Geometrie bei allgemeinen Gebieten.
- Probleme mit Verfeinerung (große Anzahl neuer Gitterpunkte).

Testproblem: $u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

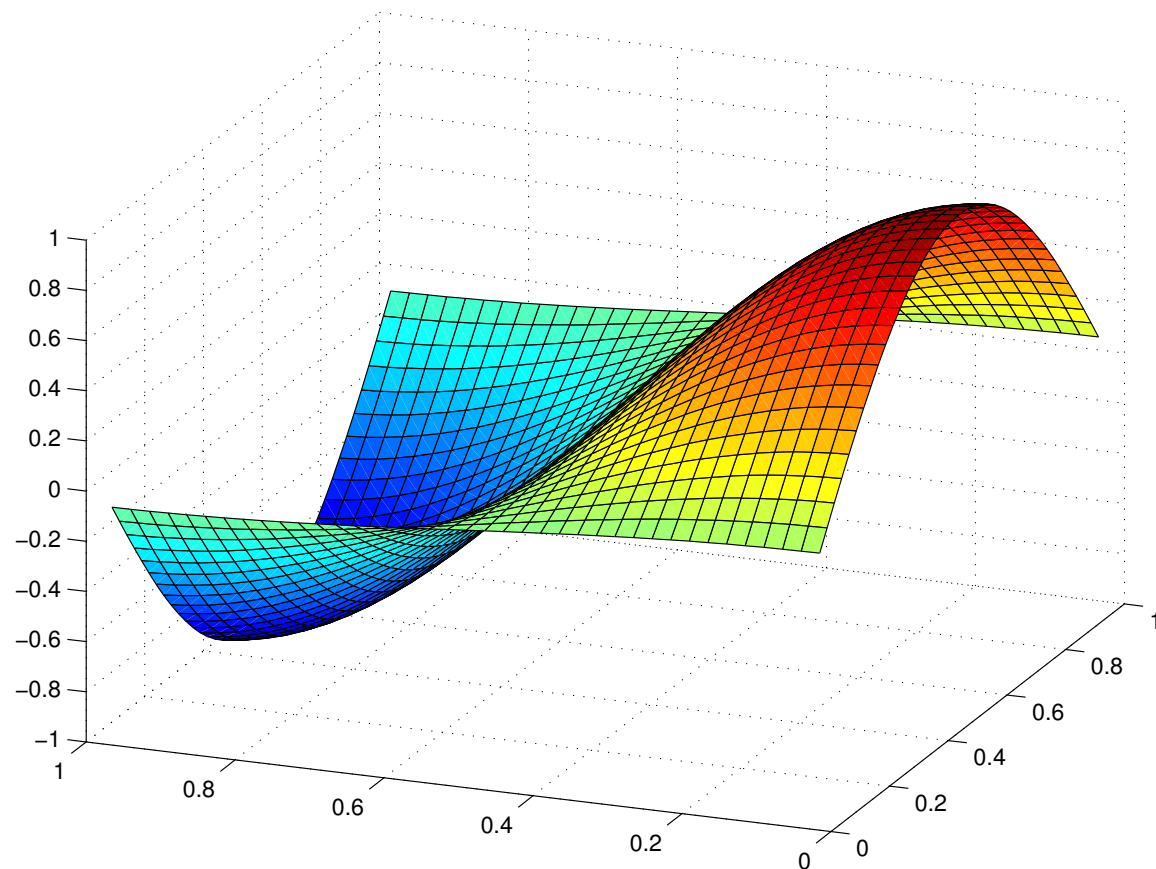
Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Lösung, $\sin(\pi x)\cos(\pi y)$



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

- Idee: Taylor Entwicklung
- Differenzen Sterne 2D
- Dirichlet Randbedingungen
- Neuman Randbedingungen
- Idee von Finiten Differenzen
- Konvergenz
- Konvergenz-Beispiel
- Vorteile und Nachteile
- Testproblem

Darstellung

- Experiment
- Darstellung
- Wiederholung

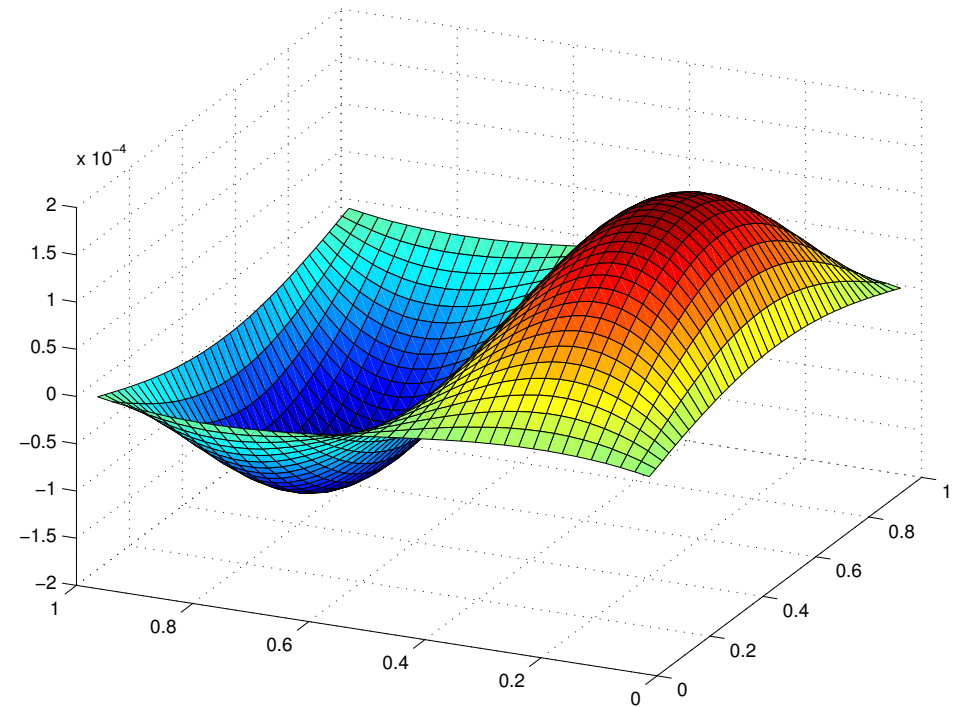
Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

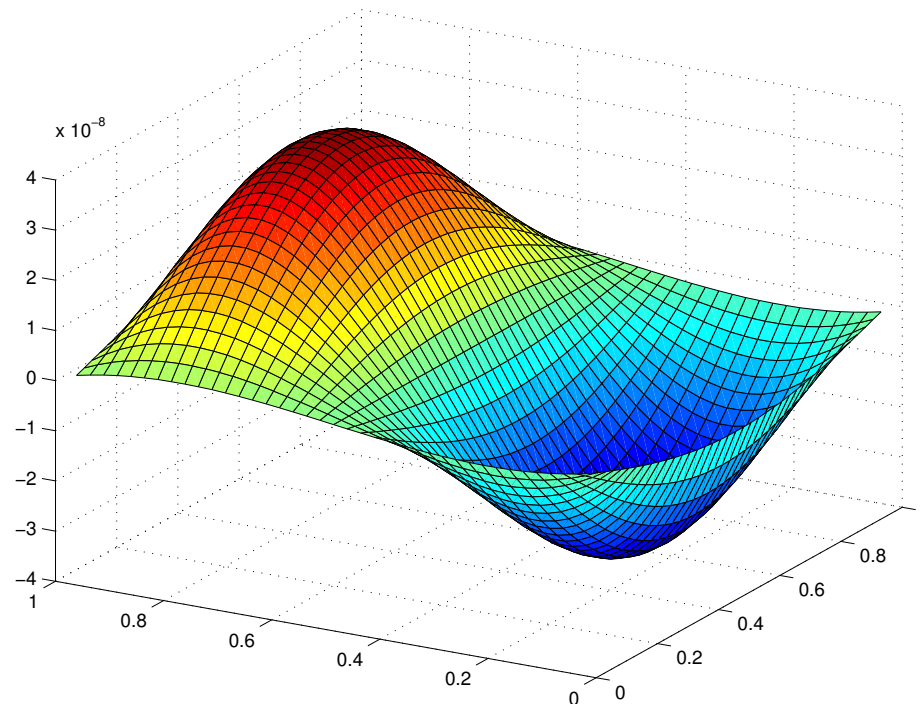
Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Fehler, 5-P. Stern, N=39



Fehler, 9-P. Stern, N=39



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

Wiederholung

Finite Elemente

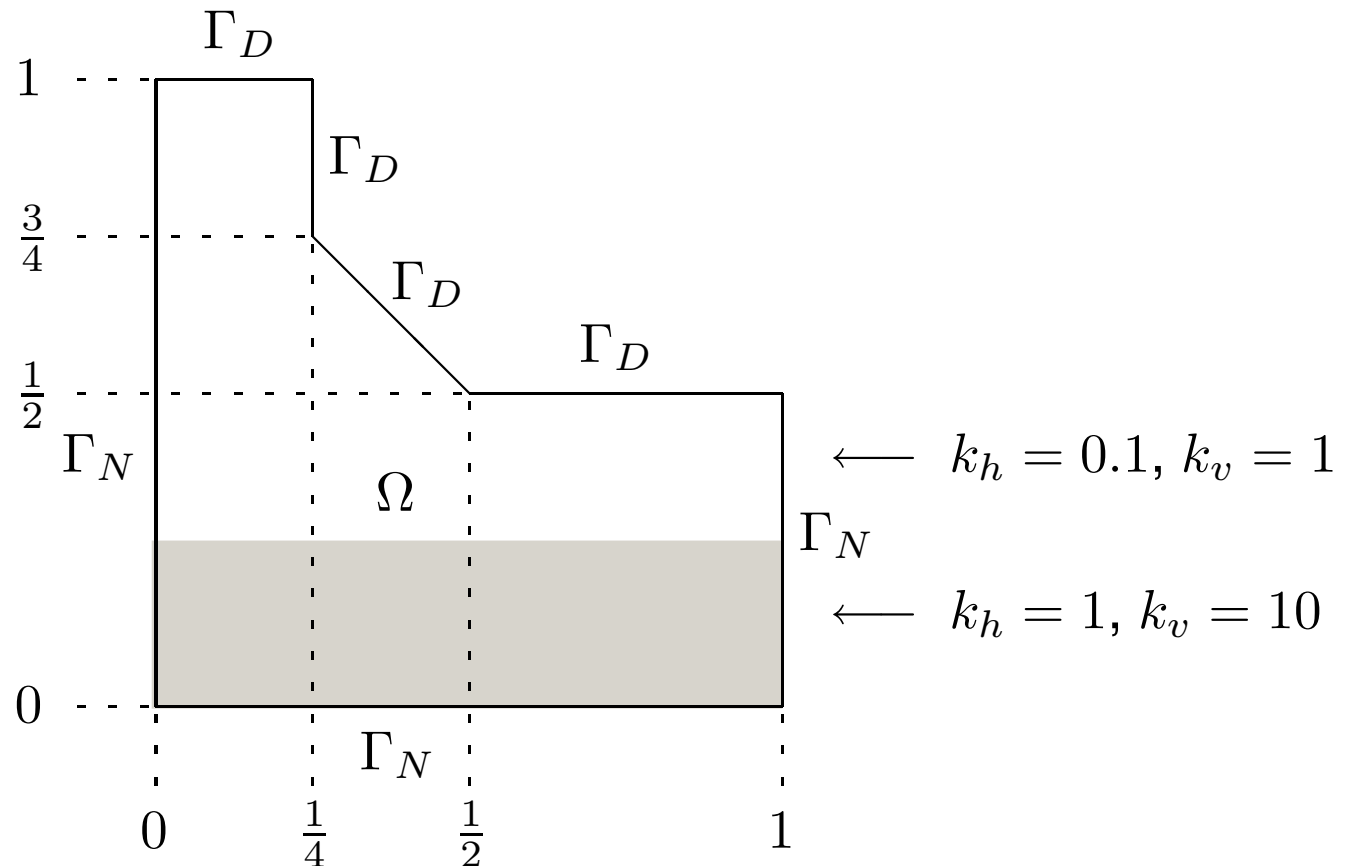
Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

$u \dots$ Strömungspotential, $k_h, k_v \dots$ Durchlässigkeit,

$$-(k_h u_x)_x - (k_v u_y)_y = 0.$$



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Idee: Taylor Entwicklung

Differenzen Sterne 2D

Dirichlet Randbedingungen

Neuman Randbedingungen

Idee von Finiten Differenzen

Konvergenz

Konvergenz-Beispiel

Vorteile und Nachteile

Testproblem

Darstellung

Experiment

Darstellung

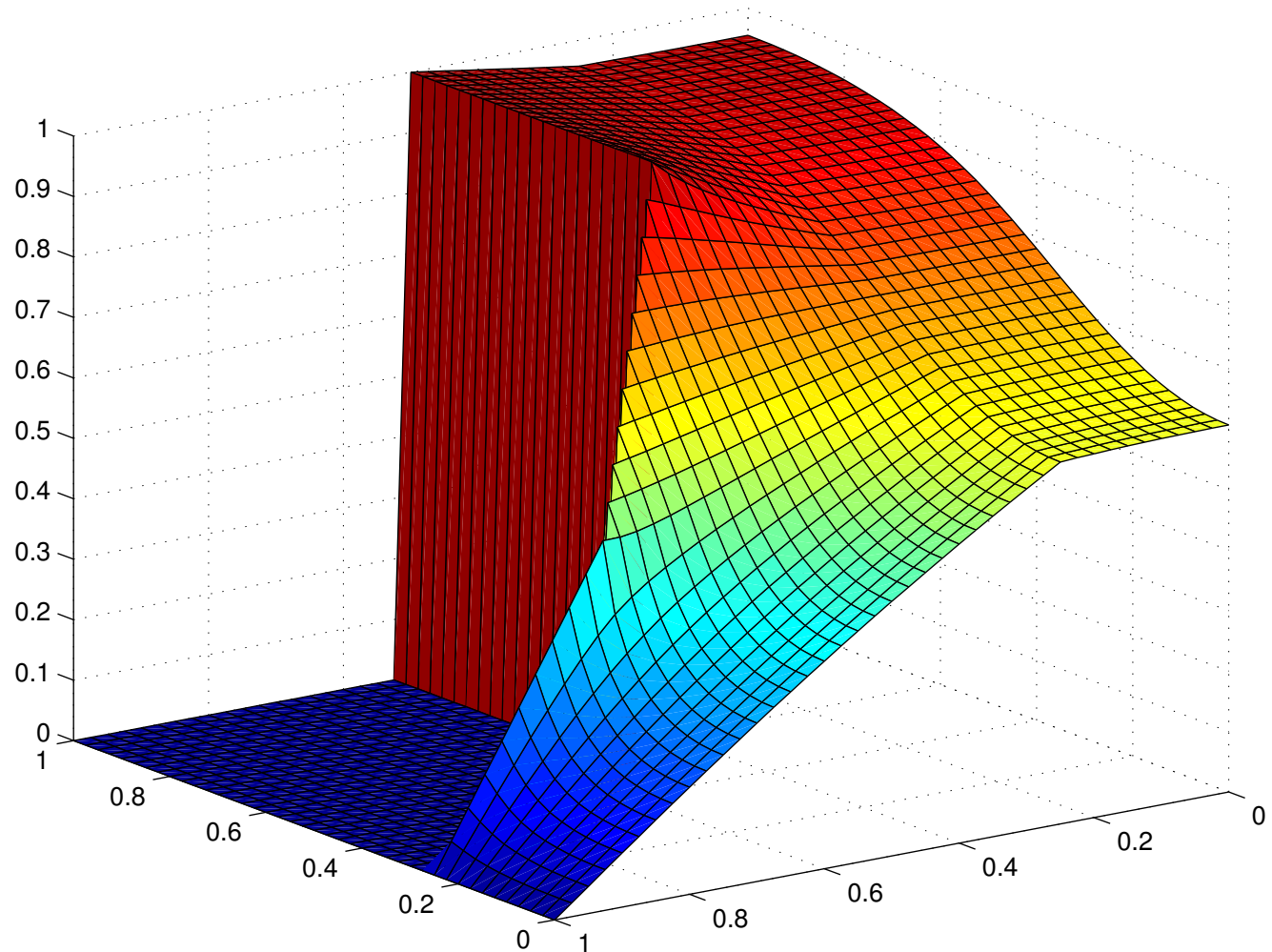
Wiederholung

Finite Elemente

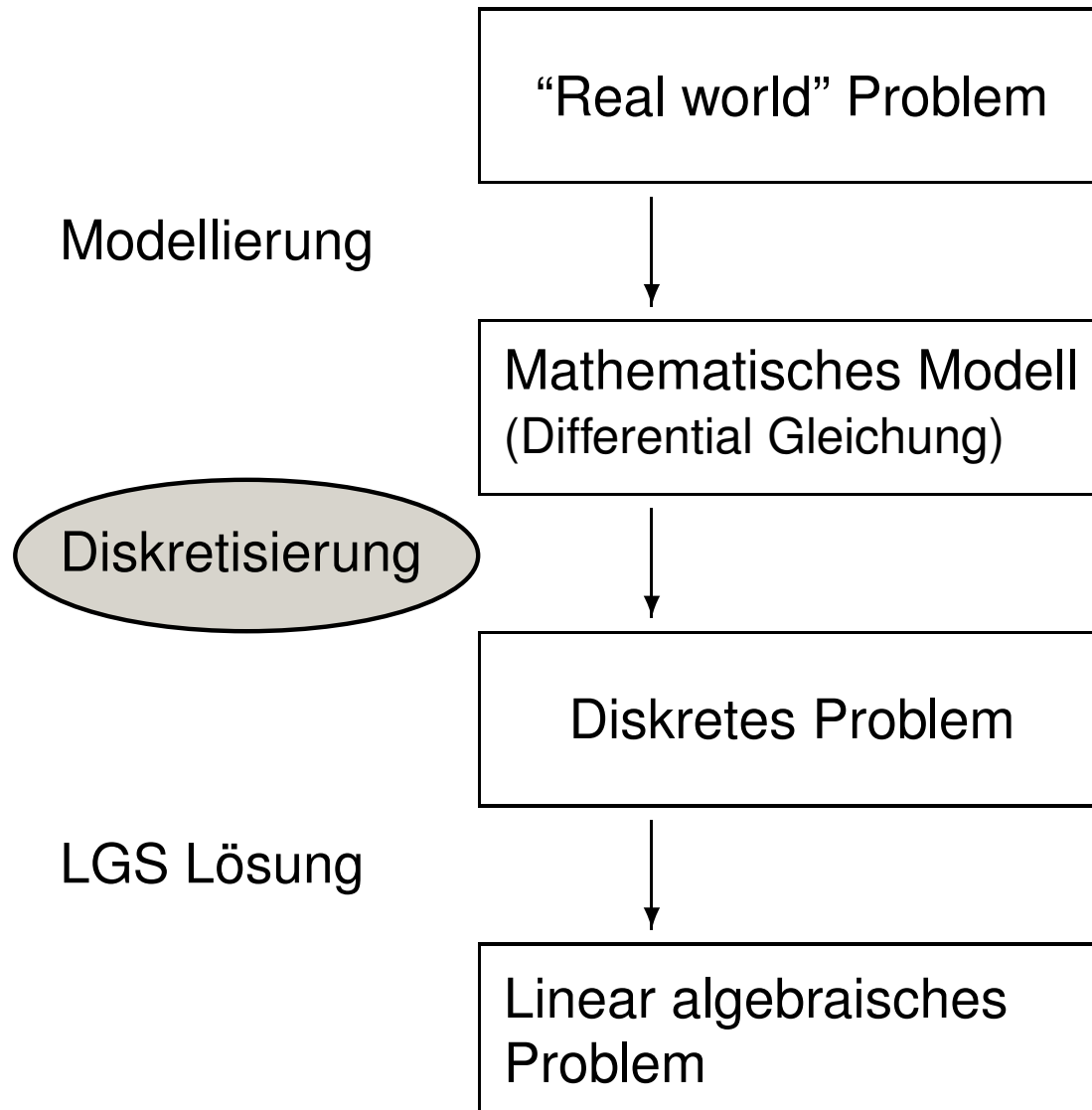
Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen



- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
 - Idee: Taylor Entwicklung
 - Differenzen Sterne 2D
 - Dirichlet Randbedingungen
 - Neuman Randbedingungen
 - Idee von Finiten Differenzen
 - Konvergenz
 - Konvergenz-Beispiel
 - Vorteile und Nachteile
 - Testproblem
 - Darstellung
 - Experiment
 - Darstellung
- Wiederholung**
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Finite-Element-Methode

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Gesucht: Methode zur Diskretisierung

- auf beliebigen Gebieten,
- mit einfachen Möglichkeiten zur Gitterverfeinerung,
- die Konvergenz auch bei weniger glatten Lösungen garantiert,
- Neumann/Cauchy RB leicht berücksichtigen läßt
- und leicht algorithmisierbar ist.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Gesucht: Methode zur Diskretisierung

- auf beliebigen Gebieten,
- mit einfachen Möglichkeiten zur Gitterverfeinerung,
- die Konvergenz auch bei weniger glatten Lösungen garantiert,
- Neumann/Cauchy RB leicht berücksichtigen läßt
- und leicht algorithmisierbar ist.

Um eine solche Methode zu entwickeln, muss man viel Mathematik benutzen (insbes. Funktionalanalysis).

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- (bi-)lineare Formen,
- Integralsätze im \mathbb{R}^n ,
- Sobolev Räume,
- Sätze der Funktionalanalysis,
- Variationsmethoden (Galerkin, Ritz),
- u.v.m.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Matematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

$f(v)$ ist Linearform wenn

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),$$

$a(u, v)$ ist Bilinearform = linear in jeder Variable.

$f(v)$ ist Linearform wenn

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),$$

$a(u, v)$ ist Bilinearform = linear in jeder Variable.

Mögliche Eigenschaften einer Bilinearform $a(u, v)$ sind (jeweils für alle $u \in V, v \in V$):

- Symmetrie: $a(u, v) = a(v, u)$
- Definitheit: $a(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- Positivität: $a(u, u) \geq 0,$
- V-Elliptizität: $a(u, u) \geq \beta \|u\|^2$ für eine Konst. $\beta > 0,$
- Stetigkeit: $a(u, v) \leq \alpha \|u\| \|v\|$ für eine Konst. $\alpha > 0.$

Voraussetzungen:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
- $\Gamma = \partial\Omega$ glatter Rand,
- $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbares Vektorfeld,
- $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußeres Einheits-Normalenfeld,

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Voraussetzungen:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
- $\Gamma = \partial\Omega$ glatter Rand,
- $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbares Vektorfeld,
- $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußeres Einheits-Normalenfeld,

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, d\Omega = \int_{\Gamma} \nu \cdot w \, d\Gamma.$$

Greensche Formel:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Voraussetzungen:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
- $\Gamma = \partial\Omega$ glatter Rand,
- $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbares Vektorfeld,
- $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußeres Einheits-Normalenfeld,

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, d\Omega = \int_{\Gamma} \nu \cdot w \, d\Gamma.$$

Greensche Formel:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

Verallgemeinerungen auf Lipschitz-Gebiete Ω und H^1 bzw. H^2 Funktionen existieren.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Beispiel:

$$(1) \quad \Delta u = q \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{auf } \Gamma.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Beispiel:

$$(1) \quad \Delta u = q \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{auf } \Gamma.$$

- Multipliziere (1) mit $v \in V$, V ist Grundraum.
- Integriere über Ω .
- Benutze Integralsätze.
- Berücksichtige Randbedingungen.

Beispiel:

$$(1) \quad \Delta u = q \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{auf } \Gamma.$$

- Multipliziere (1) mit $v \in V$, V ist Grundraum.
- Integriere über Ω .
- Benutze Integralsätze.
- Berücksichtige Randbedingungen.

Variationsproblem

Suche $u \in V$ mit $a(u, v) = f(v)$ f.a. $v \in V$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad f(v) = \int_{\Omega} q v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi v \, d\Gamma.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

g ist **schwache Ableitung** von f nach x , wenn

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} g \psi d\Omega \quad \text{f.a. } \psi \in C^{0,\infty}.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

g ist **schwache Ableitung** von f nach x , wenn

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} g \psi d\Omega \quad \text{f.a. } \psi \in C^{0,\infty}.$$

Sobolev Raum $H^k(\Omega)$ = Funktionen, deren schwache Ableitungen bis Ordnung k existieren und im $L^2(\Omega)$ liegen (d.h. quadratisch integrierbar sind), Ω ist Lipschitz-Gebiet.

Sobolev Raum $H^k(\Omega)$ ist Hilbertraum.

g ist **schwache Ableitung** von f nach x , wenn

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} g \psi d\Omega \quad \text{f.a. } \psi \in C^{0,\infty}.$$

Sobolev Raum $H^k(\Omega)$ = Funktionen, deren schwache Ableitungen bis Ordnung k existieren und im $L^2(\Omega)$ liegen (d.h. quadratisch integrierbar sind), Ω ist Lipschitz-Gebiet.

Sobolev Raum $H^k(\Omega)$ ist Hilbertraum.

Variationsproblem

Suche $u \in V$ mit $a(u, v) = f(v)$ f.a. $v \in V$.

Wir lösen dies in "schwachem Sinne", d.h. in Sobolevräumen.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Sei V ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (u, v) und davon erzeugter Norm $\|v\| = (v, v)^{1/2}$.

Sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, V -elliptische Bilinearform und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Linearform.

Dann besitzt das Variationsproblem

$$\text{Suche } u \in V \text{ mit } a(u, v) = f(v) \quad \text{f.a. } v \in V,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehler

Weitere Problemklassen

Ansatzraum $V_h \subset V$, $\dim V_h = N < \infty$, **Basis** v_1, \dots, v_N ,

Betrachte

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i.$$

Idee: Löse Variationsproblem im V_h .

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Mathematische Grundlagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung**
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Ansatzraum $V_h \subset V$, $\dim V_h = N < \infty$, **Basis** v_1, \dots, v_N ,

Betrachte

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i.$$

Idee: Löse Variationsproblem im V_h .

- **Galerkin-Ansatz**

Suche $u_h \in V_h$ mit $a(u_h, v) = f(v)$ f.a. $v \in V_h$,

- **Ritz-Ansatz**

Suche $u_h \in V_h$ mit $F(u_h) \leq F(v)$ f.a. $v \in V_h$,
 wobei $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$.

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Formen
- Integralsätze im \mathbb{R}^n
- Variationsproblem
- Sobolev Räume
- Lax-Milgram Satz
- Diskretisierung
- Lineares Gleichungssystem**
- Idee der FEM
- Realisierung
- Konvergenz von FEM
- Konvergenz-Beispiel
- Experiment
- Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Falls $a(u, v)$ positiv und symmetrisch ist, sind beide Ansätze sind äquivalent und führen auf das lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a(v_1, v_1) & \dots & a(v_1, v_N) \\ \vdots & & \vdots \\ a(v_N, v_1) & \dots & a(v_N, v_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_N) \end{pmatrix} .$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Mathematische Grundlagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem**
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Falls $a(u, v)$ positiv und symmetrisch ist, sind beide Ansätze sind äquivalent und führen auf das lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a(v_1, v_1) & \dots & a(v_1, v_N) \\ \vdots & & \vdots \\ a(v_N, v_1) & \dots & a(v_N, v_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_N) \end{pmatrix}.$$

FEM - basiert auf dem Galerkin-Ansatz, wählt geschickt:

- Ansatzraum V_h (mit guten Approximationseigenschaften),
- Basisfunktionen v_j (so daß Matrix A_h dünn besetzt ist).

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- Zerlegung des Gebietes in viele Teilgebiete Ω_i

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i.$$

- Man wählt Ansatzräume V_h so daß sie stückweise polynomiale Funktionen v enthalten: $v|_{\Omega_i}$ ist Polynom.
- Man wählt Basisfunktionen mit kleinem Träger.

- Zerlegung des Gebietes in viele Teilgebiete Ω_i

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i.$$

- Man wählt Ansatzräume V_h so daß sie stückweise polynomiale Funktionen v enthalten: $v|_{\Omega_i}$ ist Polynom.
- Man wählt Basisfunktionen mit kleinem Träger.

Anforderungen:

- Zerlegung ist “zulässig”.
- Eine Funktion aus V_h ist auf einem Element Ω_i eindeutig bestimmt durch die Werte oder Ableitungen in den Element-Knoten.

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Mathematische Grundlagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung**
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

z.B. Dreieckelemente.

- Assemblierung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe von Elementmatrizen und Elementvektoren:

$$\int_{\Omega} a(v_i, v_j) d\Omega = \sum_{k=1}^M \int_{\Omega_k} a(v_i, v_j) d\Omega_k$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Matematische Grunglagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung**
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

z.B. Dreieckelemente.

- Assemblierung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe von Elementmatrizen und Elementvektoren:

$$\int_{\Omega} a(v_i, v_j) d\Omega = \sum_{k=1}^M \int_{\Omega_k} a(v_i, v_j) d\Omega_k$$

- Berechnung von Integralen über Ω_k mit Hilfe von der Transformation:

$$\Omega_i \longleftrightarrow \text{Referenzdreieck}$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Mathematische Grundlagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM**
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Lemma von Céa: Sei u_h Galerkin Approximation. Falls a eine V -elliptische und stetige Bilinearform ist, dann gilt

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Formen
- Integralsätze im \mathbb{R}^n
- Variationsproblem
- Sobolev Räume
- Lax-Milgram Satz
- Diskretisierung
- Lineares Gleichungssystem
- Idee der FEM
- Realisierung
- Konvergenz von FEM**
- Konvergenz-Beispiel
- Experiment
- Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Lemma von Céa: Sei u_h Galerkin Approximation. Falls a eine V -elliptische und stetige Bilinearform ist, dann gilt

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

Satz: Sind alle Elemente Ω_i vom gleichen Typ (Lagrange), sind die Polynome vom Grad k sowie $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^k.$$

(c ist von h unabhängig aber von u abhängig)

Beispiel: Konvergenz in $H^1(\Omega)$ -Norm

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Mathematische Grundlagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	Lineares Dreieckelement	Quadratisches Dreieckelement
$u \in H^2(\Omega)$	$O(h)$	$O(h)$
$u \in H^3(\Omega)$	$O(h)$	$O(h^2)$

Höherpolynomiale Ansätze bringen oft nur dann einen Vorteil, wenn genügend "Glattheit" der Lösung vorhanden ist.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Motivation

Mathematische Grundlagen

Formen

Integralsätze im \mathbb{R}^n

Variationsproblem

Sobolev Räume

Lax-Milgram Satz

Diskretisierung

Lineares Gleichungssystem

Idee der FEM

Realisierung

Konvergenz von FEM

Konvergenz-Beispiel

Experiment

Wiederholung

Lineare Gleichungssysteme

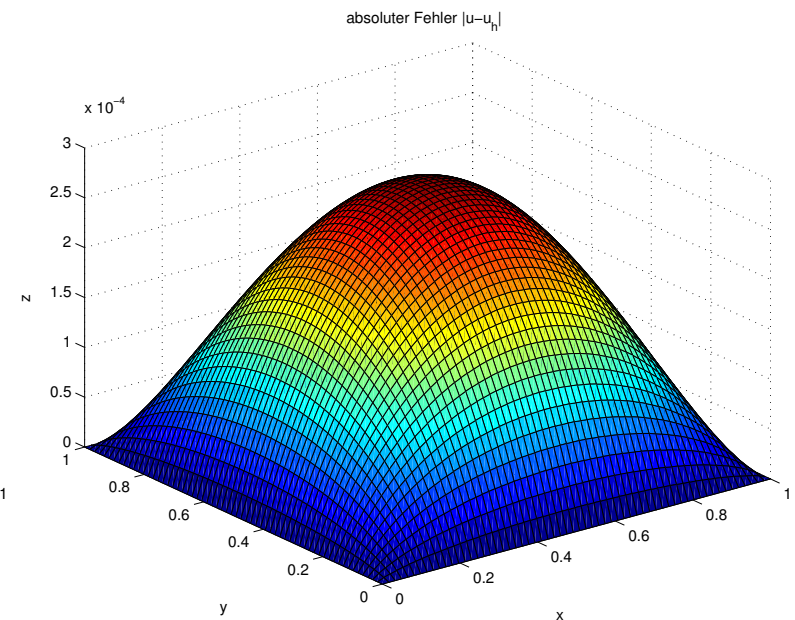
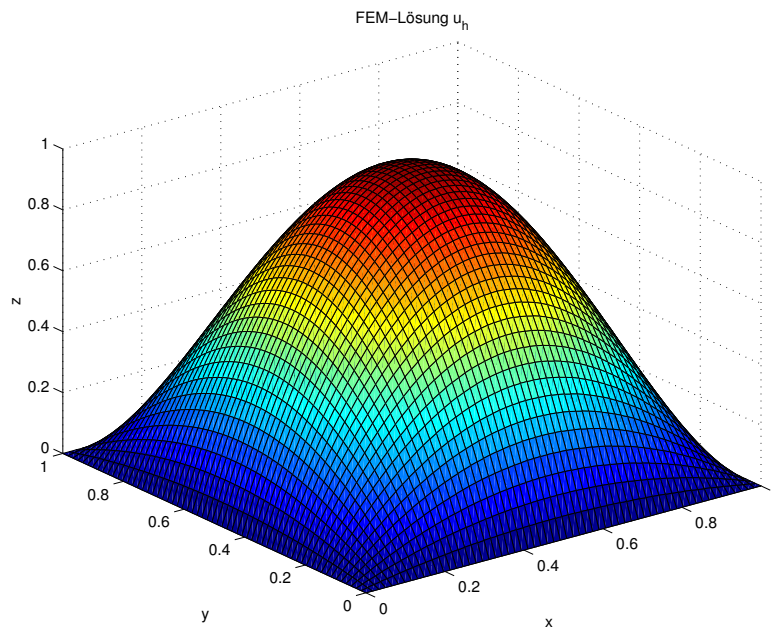
Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

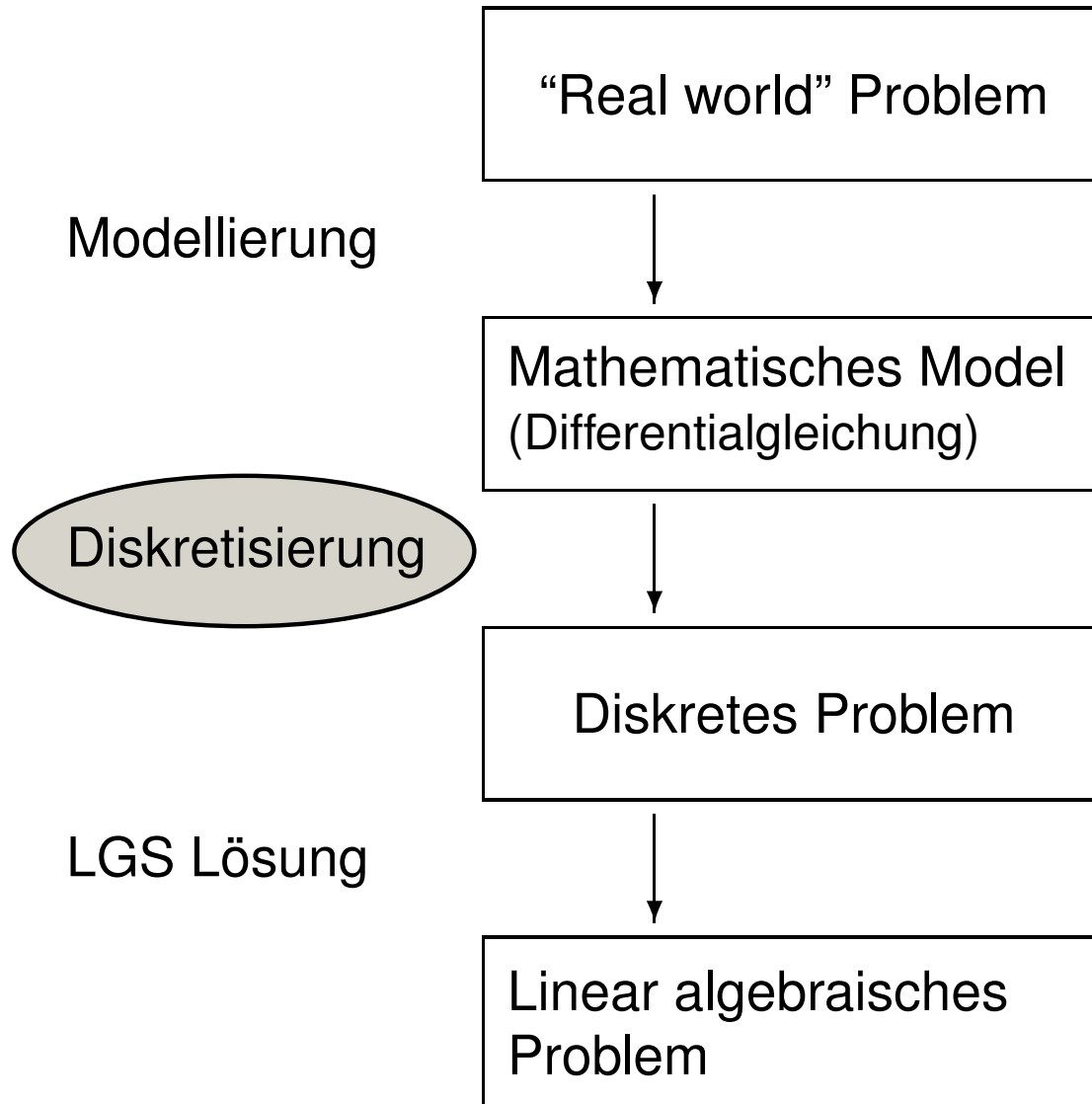
$$-\Delta u = 32(y - y^2 + x - x^2)$$

$$u = 0$$

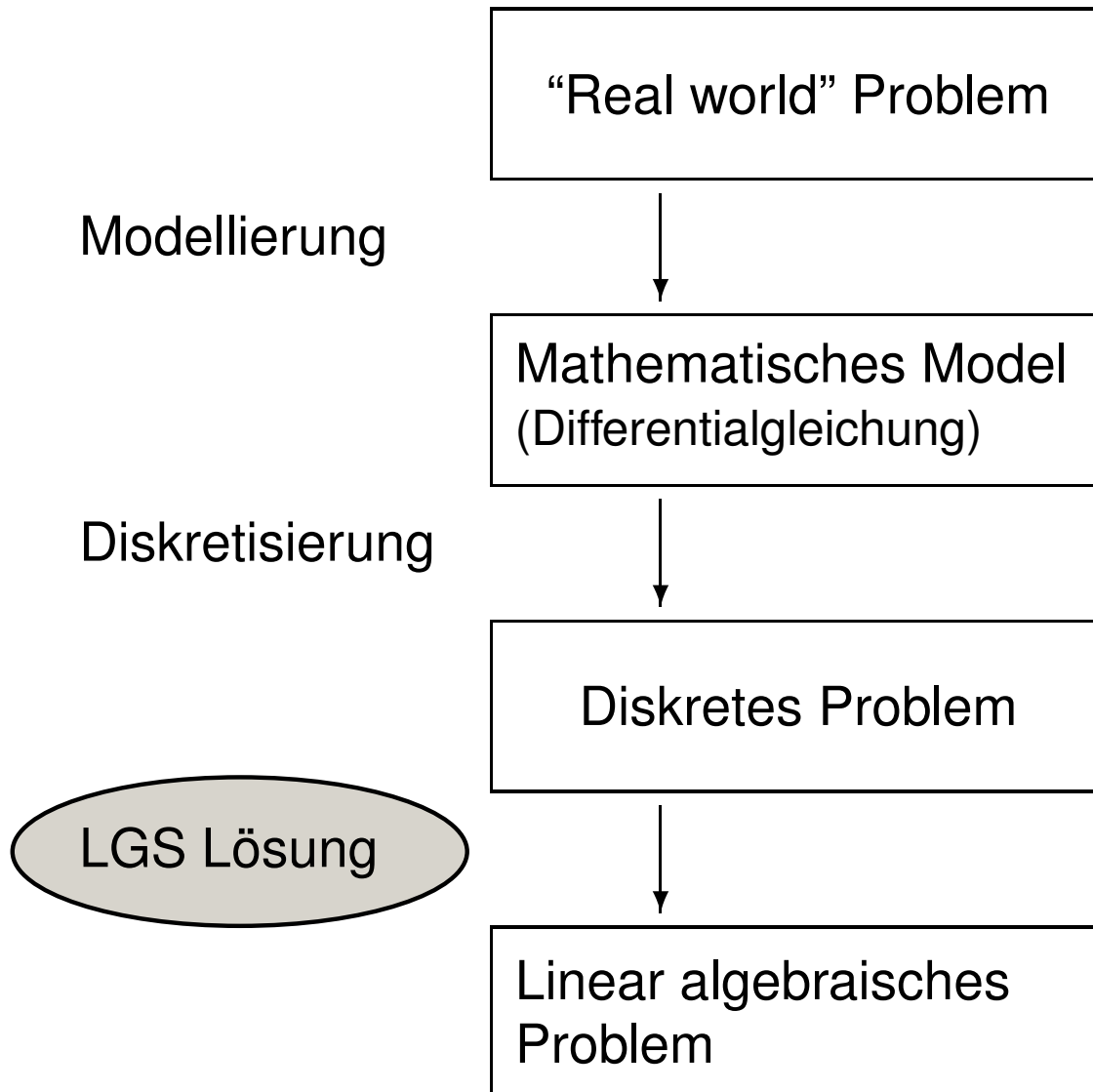
in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$,
auf $\partial\Omega$.



- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Matematische Grunglagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen



- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
 - Motivation
 - Matematische Grunglagen
 - Formen
 - Integralsätze im \mathbb{R}^n
 - Variationsproblem
 - Sobolev Räume
 - Lax-Milgram Satz
 - Diskretisierung
 - Lineares Gleichungssystem
 - Idee der FEM
 - Realisierung
 - Konvergenz von FEM
 - Konvergenz-Beispiel
 - Experiment
 - Wiederholung
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

$$Ax = b$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel \rightarrow CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus \rightarrow PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Aus Diskretisierung \rightarrow Systeme $Ax = b$ mit Eigenschaften:

- A ist dünn besetzt.
- A kann sehr groß sein.
- $Ax = b$ muß nicht unbedingt exakt gelöst werden (\Rightarrow Diskretisierungsfehler ohnehin vorhanden).

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Aus Diskretisierung → Systeme $Ax = b$ mit Eigenschaften:

- A ist dünn besetzt.
- A kann sehr groß sein.
- $Ax = b$ muß nicht unbedingt exakt gelöst werden (\Rightarrow Diskretisierungsfehler ohnehin vorhanden).

Mögliche Verfahren zur Lösung:

- Direkte Verfahren (Gauss, LU, LL^T)
- Klassische Iterative Verfahren (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR)
- Projektionsmethoden (Krylov-Raum-Methoden)
- Multigrid (Mehrgitter) Verfahren

Aus Diskretisierung → Systeme $Ax = b$ mit Eigenschaften:

- A ist dünn besetzt.
- A kann sehr groß sein.
- $Ax = b$ muß nicht unbedingt exakt gelöst werden (\Rightarrow Diskretisierungsfehler ohnehin vorhanden).

Mögliche Verfahren zur Lösung:

- Direkte Verfahren (Gauss, LU, LL^T)
- Klassische Iterative Verfahren (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR)
- Projektionsmethoden (Krylov-Raum-Methoden)
- Multigrid (Mehrgitter) Verfahren

In diesem Fall → **Krylov-Raum-Methoden** sehr geeignet.

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Übersicht
- Projektionsmethoden**
- Krylov-Raum-Methoden
- Implementation
- Beispiel → CG
- Eigenschaften von CG
- Vorkonditionierung für CG
- Algorithmus → PCG
- Konvergenz
- Konvergenzkriterien
- Endliche Arithmetik
- Allgemeine Eigenschaften
- Multigrid Verfahren
- Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Grundidee: Gegeben A, b, x_0

Finde $x_i \in x_0 + \mathcal{S}_i$ mit $r_i \perp \mathcal{C}_i$,

wobei

x_i Approximation der Lösung,

r_i Residuum $b - Ax_i$,

$\mathcal{S}_i, \mathcal{C}_i$ i -dimensionale Räume

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Übersicht
- Projektionsmethoden**
- Krylov-Raum-Methoden
- Implementation
- Beispiel → CG
- Eigenschaften von CG
- Vorkonditionierung für CG
- Algorithmus → PCG
- Konvergenz
- Konvergenzkriterien
- Endliche Arithmetik
- Allgemeine Eigenschaften
- Multigrid Verfahren
- Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Grundidee: Gegeben A, b, x_0

Finde $x_i \in x_0 + \mathcal{S}_i$ mit $r_i \perp \mathcal{C}_i$,

wobei

x_i Approximation der Lösung,

r_i Residuum $b - Ax_i$,

$\mathcal{S}_i, \mathcal{C}_i$ i -dimensionale Räume

$Ax = b$ wird projiziert auf kleineres System

$$C_i^T A S_i y_i = C_i^T r_0.$$

Die Spalten von C_i bzw. S_i sind Basisvektoren von \mathcal{C}_i bzw. \mathcal{S}_i .

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Zur Definition von \mathcal{S}_i und \mathcal{C}_i werden Krylov-Räume benutzt,

$$K_i(A, r_0) := \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{i-1}r_0\}$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden**
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Zur Definition von \mathcal{S}_i und \mathcal{C}_i werden Krylov-Räume benutzt,

$$K_i(A, r_0) := \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{i-1}r_0\}$$

Beispiele der Wahl von \mathcal{S}_i und \mathcal{C}_i :

- Wenn A SPD, $\mathcal{S}_i = \mathcal{C}_i := K_i(A, r_0) \rightarrow$ **CG-Verfahren**

$$\|x - x_i\|_A = \min_{y \in x_0 + K_i(A, r_0)} \|x - y\|_A.$$

- Für allgemeine (nichtsymmetrische) A ,
 $\mathcal{S}_i := K_i(A, r_0)$, $\mathcal{C}_i := AK_i(A, r_0) \rightarrow$ **GMRES-Verfahren**

$$\|b - Ax_i\| = \min_{y \in x_0 + K_i(A, r_0)} \|b - Ay\|.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Man benötigt eine geeignete (idealerweise orthogonale) Basis der Krylov-Räume.

Beispiel: **Arnoldi-Verfahren** → konstruiert sukzessive eine Orthogonalbasis der Krylov-Räume,

$$AV_i = V_{i+1}H_{i+1,i}.$$

Man benötigt eine geeignete (idealerweise orthogonale) Basis der Krylov-Räume.

Beispiel: **Arnoldi-Verfahren** \rightarrow konstruiert sukzessive eine Orthogonalbasis der Krylov-Räume,

$$AV_i = V_{i+1}H_{i+1,i}.$$

- Im Allgemeinen ist $H_{i+1,i}$ eine obere Hessenberg Matrix \Rightarrow um neuen Basis-Vektor v_{i+1} zu berechnen, benötigt man alle vorherige Basis-Vektoren v_1, \dots, v_i
- Falls $A = A^T$, ist $H_{i+1,i}$ tridiagonal \Rightarrow um neuen Basis-Vektor v_{i+1} zu berechnen, benötigt man nur v_{i-1} und $v_i \rightarrow$ **Lanzcos-Verfahren**.
- Mit Hilfe der Basis-Vektoren konstruieren wir x_i und r_i .

Beispiel → Das CG-Verfahren

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Input: $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Initialisierung: $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$.

Für $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(p_i, Ap_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i.$$

- Die A -Norm des Fehlers wird in jedem Schritt i minimiert,

$$\|x - x_i\|_A = \min_{y \in x_0 + \mathcal{K}_i(A, r_0)} \|x - y\|_A.$$

- $\{r_0, \dots, r_i\}$ ist eine **orthogonale Basis** von $\mathcal{K}_{i+1}(A, r_0)$,
 $\{p_0, \dots, p_i\}$ ist eine **A -orthogonale Basis** von $\mathcal{K}_{i+1}(A, r_0)$.
- Das CG-Verfahren terminiert nach höchstens N Schritten.
- Für $d > 0$, $d \in \mathbb{N}$, gilt

$$\|x - x_i\|_A^2 - \|x - x_{i+d}\|_A^2 = \sum_{j=i}^{i+d-1} \alpha_j \|r_j\|^2 > 0.$$

- Die euklidische Fehlernorm ist monoton fallend, d.h.

$$\|x - x_i\| > \|x - x_{i+1}\|.$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- Transformation des Systems $Ax = b$

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{b},$$

$$\hat{A} = L^{-1}AL^{-T}, \quad \hat{b} = L^{-1}b, \quad \hat{x} = L^T x.$$

- Transformation des Systems $Ax = b$

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{b},$$

$$\hat{A} = L^{-1}AL^{-T}, \quad \hat{b} = L^{-1}b, \quad \hat{x} = L^T x.$$

- CG wird formal auf das System $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ angewandt.
- Rückwärtstransformation $x_i := L^{-T}\hat{x}_i$.
- Formulierung eines neuen Algorithmus, der direkt x_i berechnet.
- In jedem Schritt müssen wir LGS mit LL^T lösen.

- Transformation des Systems $Ax = b$

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{b},$$

$$\hat{A} = L^{-1}AL^{-T}, \quad \hat{b} = L^{-1}b, \quad \hat{x} = L^T x.$$

- CG wird formal auf das System $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ angewandt.
- Rückwärtstransformation $x_i := L^{-T}\hat{x}_i$.
- Formulierung eines neuen Algorithmus, der direkt x_i berechnet.
- In jedem Schritt müssen wir LGS mit LL^T lösen.

Mit Vorkonditionierung wollen wir **Konvergenz beschleunigen**.

- Transformation des Systems $Ax = b$

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{b},$$

$$\hat{A} = L^{-1}AL^{-T}, \quad \hat{b} = L^{-1}b, \quad \hat{x} = L^T x.$$

- CG wird formal auf das System $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ angewandt.
- Rückwärtstransformation $x_i := L^{-T}\hat{x}_i$.
- Formulierung eines neuen Algorithmus, der direkt x_i berechnet.
- In jedem Schritt müssen wir LGS mit LL^T lösen.

Mit Vorkonditionierung wollen wir **Konvergenz beschleunigen**.

Vorkonditionierung

Kombination von iterativen Verfahren und direkten Verfahren.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Input: $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Initialisierung: $r_0 = b - Ax_0$, $z_0 = (LL^T)^{-1}r_0$, $p_0 = z_0$.

Für $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_i = \frac{(r_i, z_i)}{(p_i, Ap_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i$$

$$z_{i+1} = (LL^T)^{-1}r_{i+1}$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, z_{i+1})}{(r_i, z_i)}$$

$$p_{i+1} = z_{i+1} + \beta_i p_i.$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz**
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

- $A = A^T$: Konvergenz ist im Allgemeinen abhängig von Eigenwertverteilung und vom Startvektor r_0 .
- * “Worst-case” Schranke für CG (unabhängig von r_0):

$$\frac{\|x - x_i\|_A}{\|x - x_0\|_A} \leq \min_{\substack{p(0)=1 \\ \deg p=i}} \max_{1 \leq j \leq N} p(\lambda_j)$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz**
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

- $A = A^T$: Konvergenz ist im Allgemeinen abhängig von Eigenwertverteilung und vom Startvektor r_0 .

* “Worst-case” Schranke für CG (unabhängig von r_0):

$$\frac{\|x - x_i\|_A}{\|x - x_0\|_A} \leq \min_{\substack{p(0)=1 \\ \deg p=i}} \max_{1 \leq j \leq N} p(\lambda_j)$$

- Allgemeines A : Konvergenz abhängig auch von Eigenraumstruktur. Wie? Offene Frage.

* “Worst-case” Schranke für GMRES wenn A diagonalisierbar, $A = VDV^{-1}$,

$$\frac{\|r_i\|}{\|r_0\|} \leq \kappa(V) \min_{\substack{p(0)=1 \\ \deg p=i}} \max_{1 \leq j \leq N} p(\lambda_j)$$

Vorteil von iterativen Verfahren: Prozess kann jederzeit beendet werden mit Approximation x_i .

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Vorteil von iterativen Verfahren: Prozess kann jederzeit beendet werden mit Approximation x_i .

Wie können wir Qualität der Approximation messen?

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien**
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Vorteil von iterativen Verfahren: Prozess kann jederzeit beendet werden mit Approximation x_i .

Wie können wir Qualität der Approximation messen?

- Normweiser Rückwärtsfehler

$$\frac{\|r_i\|}{\|A\| \|x_i\| + \|b\|} < tol \quad \text{Begründung: Störungstheorie}$$

- In CG: Relative A -Norm des Fehlers (Einschätzung)

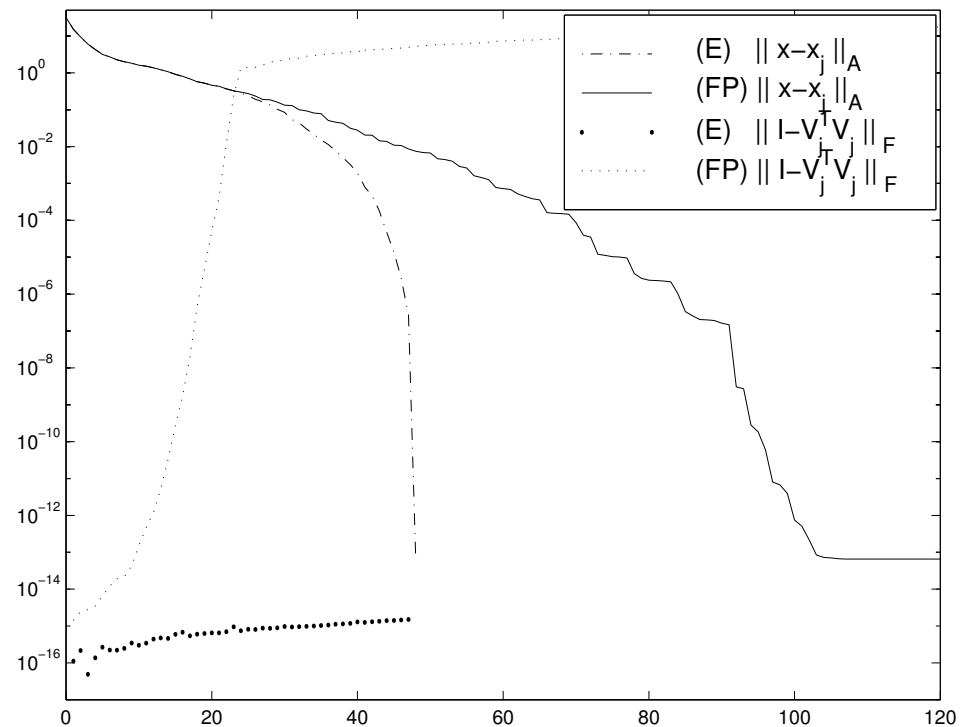
$$\frac{\|x - x_i\|_A}{\|x - x_0\|_A} < tol \quad \text{Begründung: Physikalische Bedeutung}$$

- Relative Residuenorm

$$\frac{\|r_i\|}{\|r_0\|} < tol \quad \text{Begründung: Einfach zu berechnen}$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik**
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

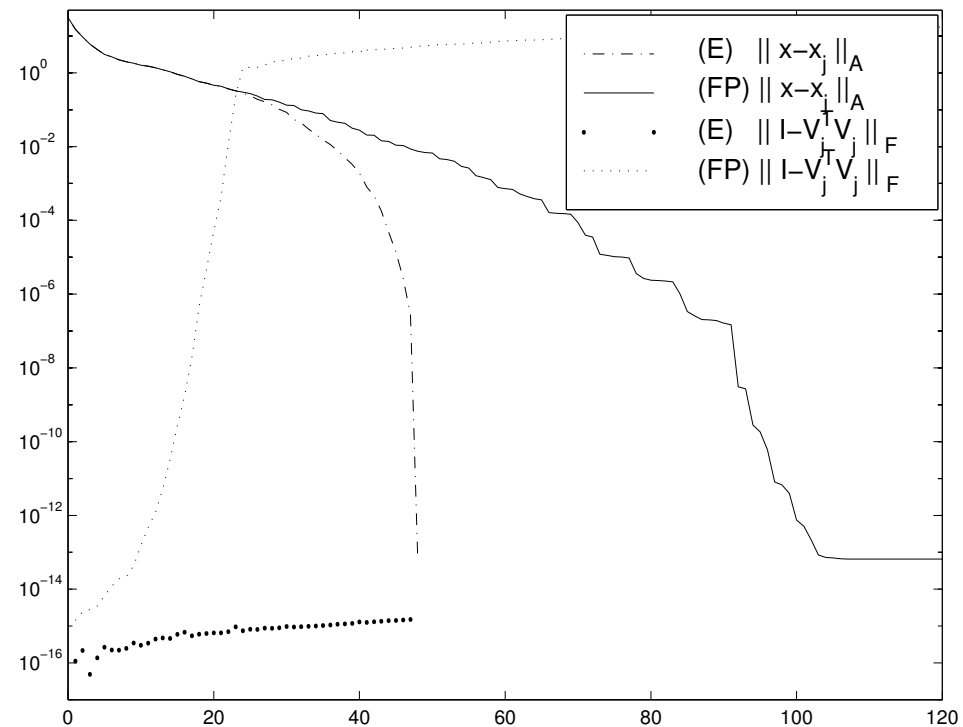
Einfluß von Endlicher Arithmetik kann wichtig sein.
 Beispiel CG-Verfahren: Orthogonalität geht verloren.



Sind alle schönen Eigenschaften von CG verloren?

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

Einfluß von Endlicher Arithmetik kann wichtig sein.
 Beispiel CG-Verfahren: Orthogonalität geht verloren.



Sind alle schönen Eigenschaften von CG verloren?
NEIN. Nur Konvergenzverzögerung.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

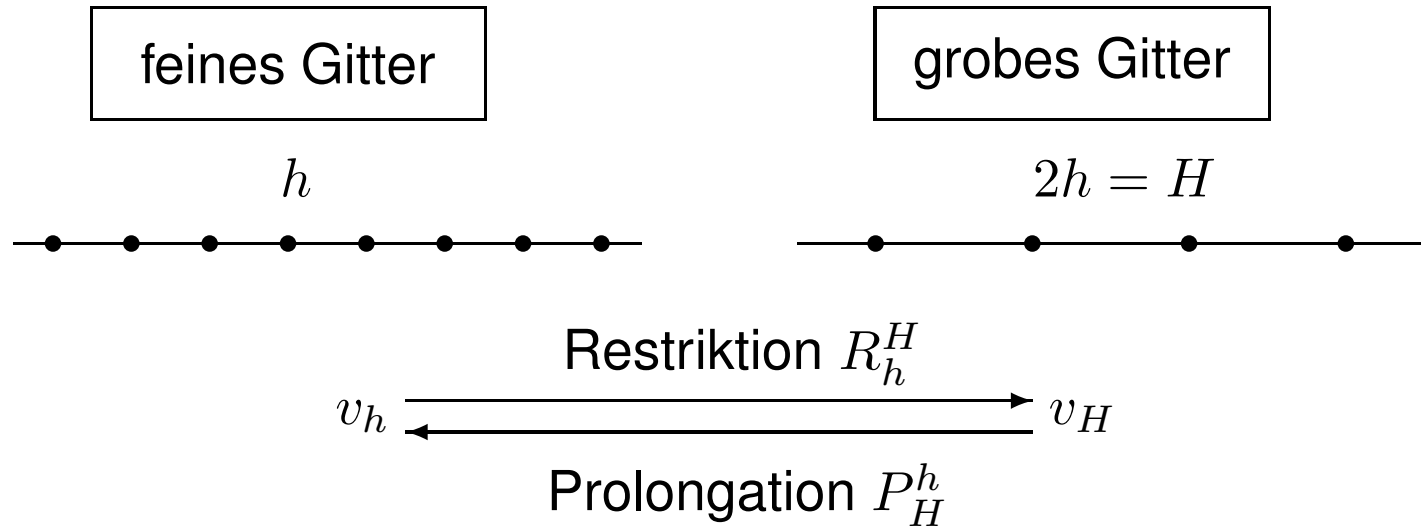
Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- Konstruieren Approximationen für die Lösung.
- Ermöglichen inexakte Lösung des Systems.
- Prozess kann jederzeit gestoppt werden, um Operationen zu sparen.
- Machen Projektionen auf Krylov Räume.
- Krylov Räume → gute Approximationseigenschaften.
- Können sehr große Systeme mit dünn besetzter Matrix lösen.
- Benötigen nur Funktion, die $A * v$ berechnet, nicht A .
- Haben niedrige Speicheranforderungen (besonders CG).
- Zur Konvergenzbeschleunigung → Vorkonditionierung.
- u.v.m.

Multigrid (Mehrgitter) Verfahren

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren**
 - Grundschemata von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen



Wir wollen $A_h x_h = b_h$ lösen.

Idee: Reduziere niederfrequente Anteile auf groben Gitter.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Projektionsmethoden

Krylov-Raum-Methoden

Implementation

Beispiel → CG

Eigenschaften von CG

Vorkonditionierung für CG

Algorithmus → PCG

Konvergenz

Konvergenzkriterien

Endliche Arithmetik

Allgemeine Eigenschaften

Multigrid Verfahren

Grundschema von Multigrid

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

- Glättungsschritt I: $x_h^{(j)} = Relax(A_h, b_h, x_h^{(j-1)}, m_1)$

z.B. m_1 Schritte Jacobi-Relaxation

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

- Glättungsschritt I: $x_h^{(j)} = Relax(A_h, b_h, x_h^{(j-1)}, m_1)$

z.B. m_1 Schritte Jacobi-Relaxation

- Korrektur:

- * Berechne Defekt: $d_h^{(j)} = b_h - A_h x_h^{(j)}$

- * Restriktion: $d_H^{(j)} = R_h^H d_h^{(j)}$

- * Löse Defektgleichung auf grobem Gitter $A_H x_H^{(j)} = d_H^{(j)}$

- * Prolongation: $y_h^{(j+1)} = P_H^h x_H^{(j)}$

- * Korrektur: $x_h^{(j+1)} = x_h^{(j)} + y_h^{(j+1)}$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
 - Übersicht
 - Projektionsmethoden
 - Krylov-Raum-Methoden
 - Implementation
 - Beispiel → CG
 - Eigenschaften von CG
 - Vorkonditionierung für CG
 - Algorithmus → PCG
 - Konvergenz
 - Konvergenzkriterien
 - Endliche Arithmetik
 - Allgemeine Eigenschaften
 - Multigrid Verfahren
 - Grundschema von Multigrid
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen

- Glättungsschritt I: $x_h^{(j)} = Relax(A_h, b_h, x_h^{(j-1)}, m_1)$
 z.B. m_1 Schritte Jacobi-Relaxation
- Korrektur:
 - * Berechne Defekt: $d_h^{(j)} = b_h - A_h x_h^{(j)}$
 - * Restriktion: $d_H^{(j)} = R_h^H d_h^{(j)}$
 - * Löse Defektgleichung auf grobem Gitter $A_H x_H^{(j)} = d_H^{(j)}$
 - * Prolongation: $y_h^{(j+1)} = P_H^h x_H^{(j)}$
 - * Korrektur: $x_h^{(j+1)} = x_h^{(j)} + y_h^{(j+1)}$
- Glättungsschritt II: $x_h^{(j+2)} = Relax(A_h, b_h, x_h^{(j+1)}, m_2)$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Lösungsprozess und Fehler

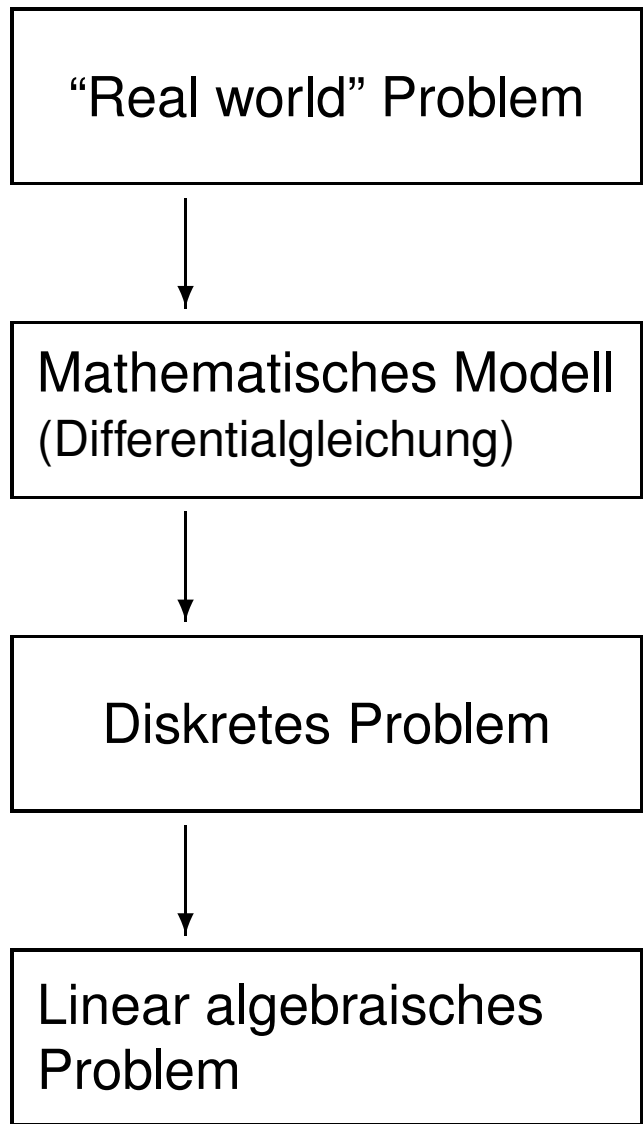
Experiment

Darstellung

Weitere Problemklassen

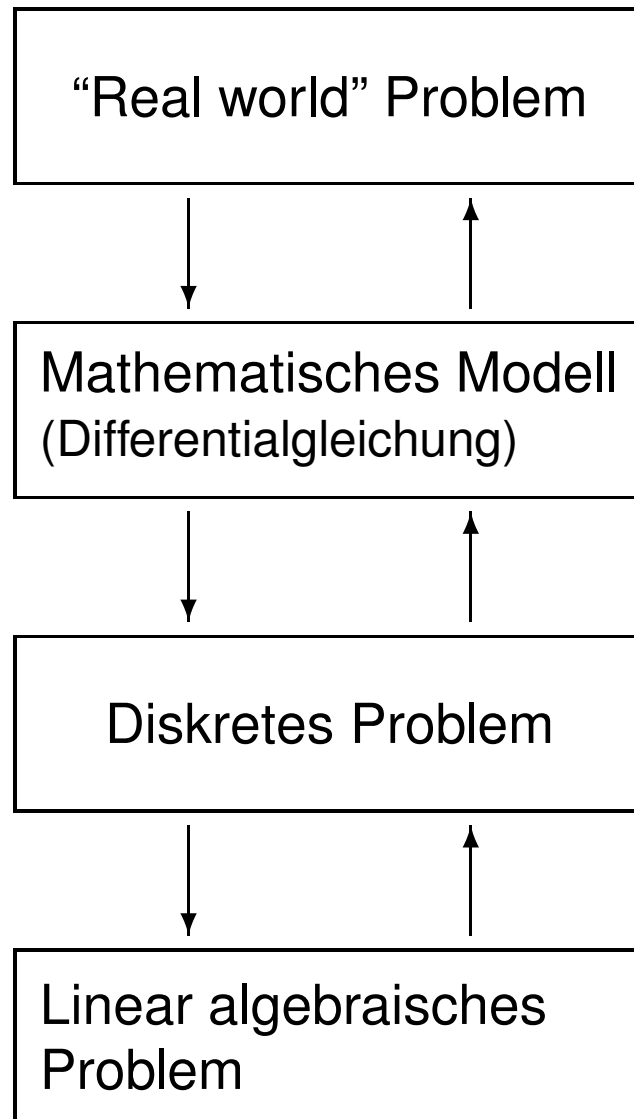
Lösungsprozess und Fehlers

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler**
- Experiment
- Darstellung
- Weitere Problemklassen



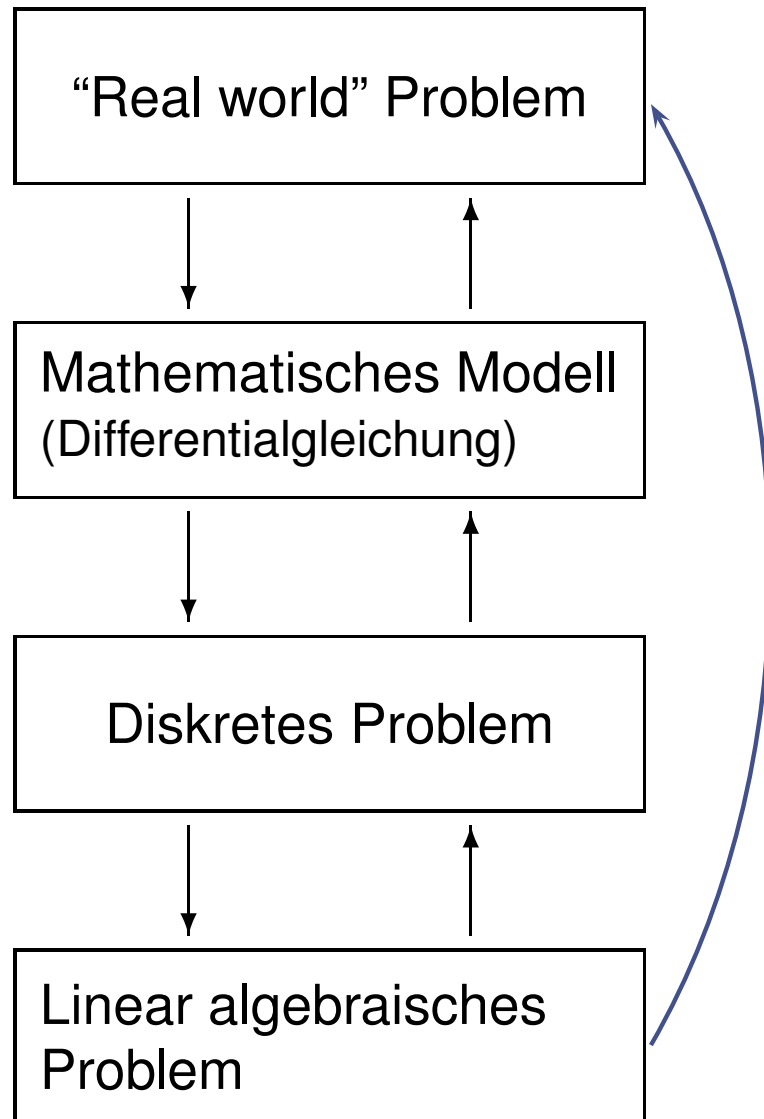
- Auf jedem Niveau gibt es Fehler.
- Es ist wichtig, diese Fehler einzuschätzen und zu verstehen.

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment
- Darstellung
- Weitere Problemklassen



- Auf jedem Niveau gibt es Fehler.
- Es ist wichtig, diese Fehler einzuschätzen und zu verstehen.
- Nur dann wissen wir, “wie exakt” wir auf jedem Niveau lösen müssen.

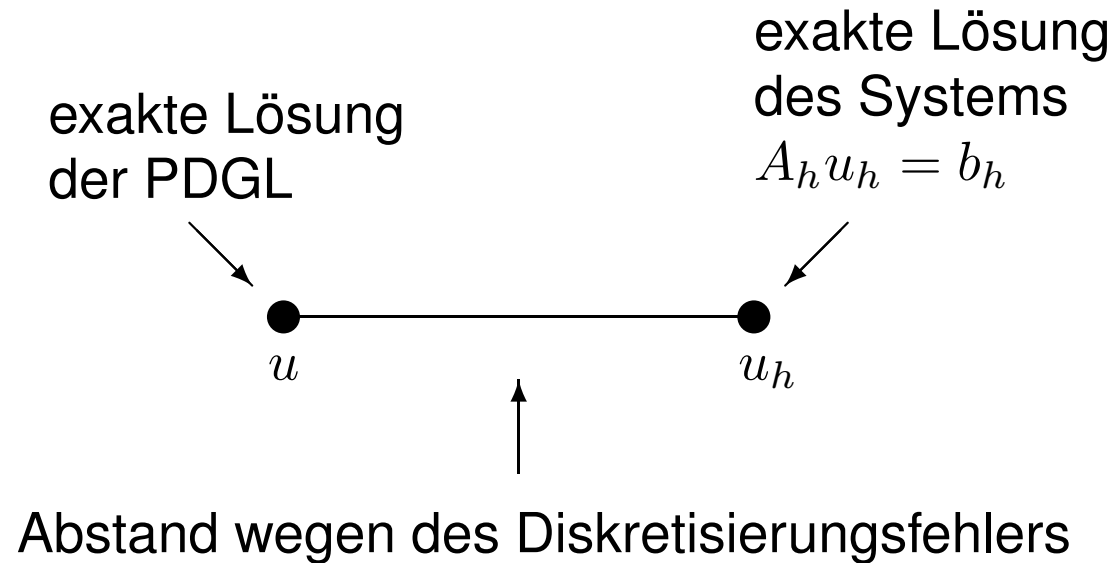
- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment
- Darstellung
- Weitere Problemklassen



- Auf jedem Niveau gibt es Fehler.
- Es ist wichtig, diese Fehler einzuschätzen und zu verstehen.
- Nur dann wissen wir, “wie exakt” wir auf jedem Niveau lösen müssen.
- Nur dann wissen wir, wie weit die Lösung des LGSs der Realität entspricht

Wie “exakt” muss man LGS lösen?

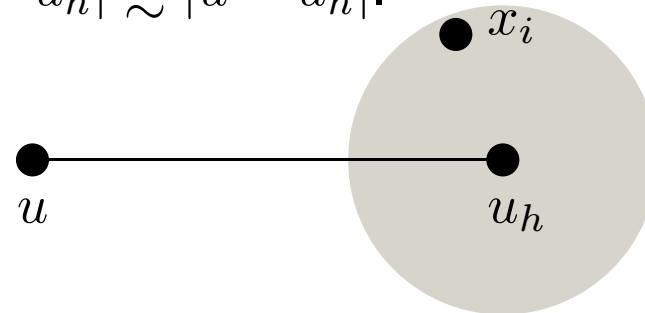
- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment**
- Darstellung
- Weitere Problemklassen



Wie “exakt” muss man LGS lösen?

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment**
- Darstellung
- Weitere Problemklassen

CG konstruiert Approximationen x_i zu u_h . Man kann CG stoppen, falls $|x_i - u_h| \lesssim |u - u_h|$.

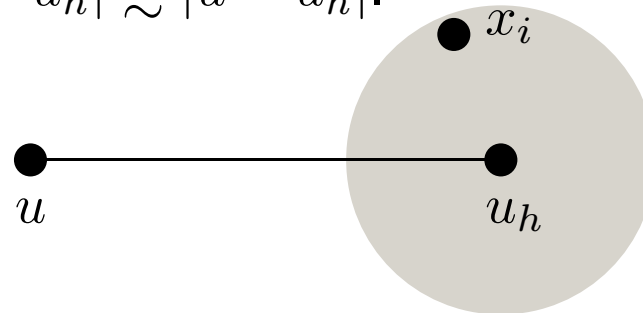


Dann ist $|u - u_h| \sim |u - x_i|$.

Wie “exakt” muss man LGS lösen?

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment**
- Darstellung
- Weitere Problemklassen

CG konstruiert Approximationen x_i zu u_h . Man kann CG stoppen, falls $|x_i - u_h| \lesssim |u - u_h|$.



Dann ist $|u - u_h| \sim |u - x_i|$.

Testproblem:

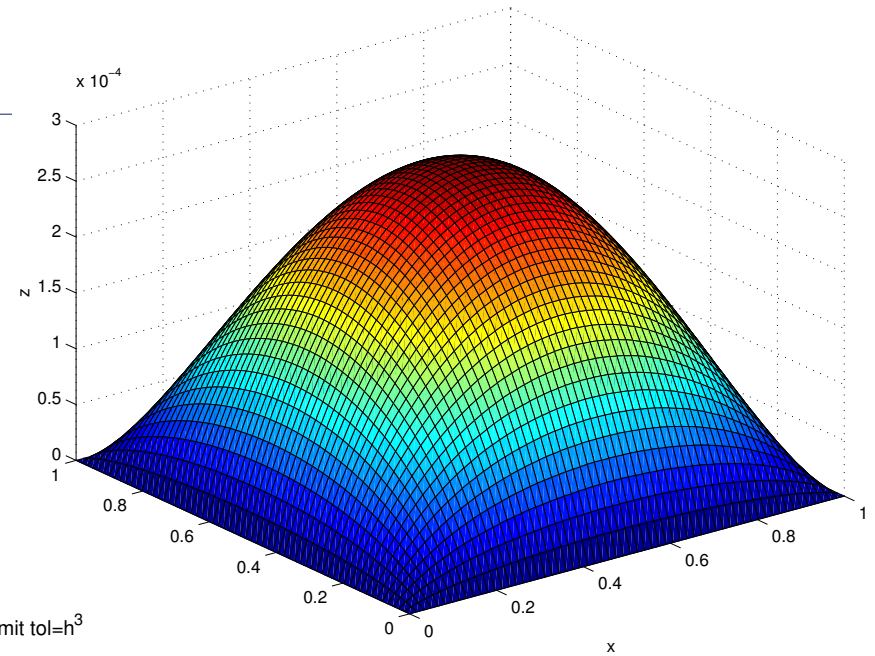
$$-\Delta u = 32(y - y^2 + x - x^2), \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Lineare Dreieckelemente, Diskretisierungsfehler $\sim h^2$.
LGS: CG-Verfahren, Konvergenzkriterium

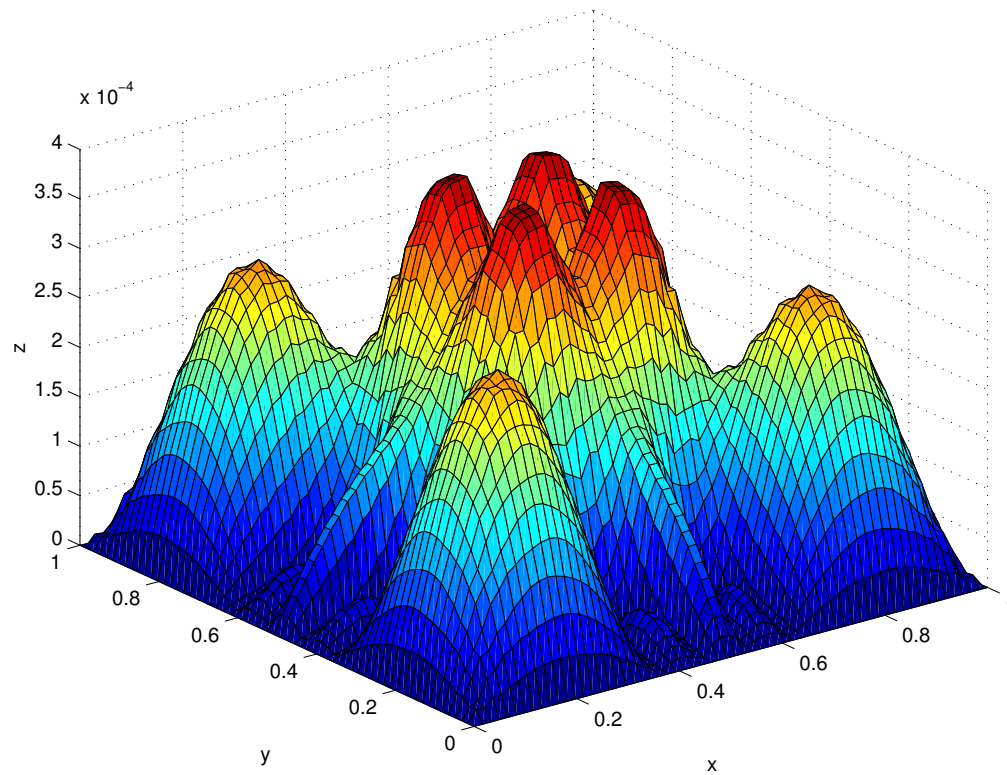
$$\frac{\|r_i\|}{\|A\| \|x_i\| + \|b\|} \leq h^3.$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehler
- Lösungsprozess und Fehler
- Experiment
- Darstellung**
- Weitere Problemklassen

absoluter Fehler $|u-u_h|$, u_h wurde "exakt" berechnet



absoluter Fehler $|u-u_h|$, u_h wurde "unexakt" berechnet mit $tol=h^3$



Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Eigenwertprobleme

Lösung von EE

Parabolische PDGL

Vertikale Linienmethode

Weitere Problemklassen

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Eigenwertprobleme

Lösung von EE

Parabolische PDGL

Vertikale Linienmethode

Hyperbolische Anfangsrandwertaufgabe,

$$\Delta w = w_{tt}$$

$$w(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Hyperbolische Anfangsrandwertaufgabe,

$$\Delta w = w_{tt}$$

$$w(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ansatz: $w(x, y, t) = u(x, y) g(t)$ führt auf

$$g'' u - g \Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta u}{u} = \frac{g''}{g} := \lambda.$$

Hyperbolische Anfangsrandwertaufgabe,

$$\Delta w = w_{tt}$$

$$w(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ansatz: $w(x, y, t) = u(x, y) g(t)$ führt auf

$$g'' u - g \Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta u}{u} = \frac{g''}{g} := \lambda.$$

Gesucht eine Konstante λ mit

$$\Delta u = \lambda u, \quad (+ \text{ Randbedingungen}).$$

→ **Eliptisches Eigenwertproblem**

$g'' = \lambda g$ dann leicht lösbar (gewöhnliche DGL).

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Eigenwertprobleme

Lösung von EE

Parabolische PDGL

Vertikale Linienmethode

- FD-Diskretisierung führt auf lineares Eigenwertproblem

$$A_h u_h = \lambda u_h.$$

- FEM-Diskretisierung führt auf verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem

$$A_h u_h = \lambda M_h u_h.$$

- FD-Diskretisierung führt auf lineares Eigenwertproblem

$$A_h u_h = \lambda u_h.$$

- FEM-Diskretisierung führt auf verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem

$$A_h u_h = \lambda M_h u_h.$$

Verfahren zur Lösung:

- **Lanczos-Verfahren** (falls A_h, M_h symmetrisch)
- **Arnoldi-Verfahren** (falls A_h, M_h unsymmetrisch)

Typischerweise: A_h (und M_h) groß und dünnbesetzt.

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Eigenwertprobleme

Lösung von EE

Parabolische PDGL

Vertikale Linienmethode

Wärmeleitung: Suche $u(x, y, t) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= f(x, y, t) && \text{in } \Omega \times (0, T), \\u &= 0 && \text{für } (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\u &= u_0(x, y) && \text{für } (x, y) \in \Omega, t = 0.\end{aligned}$$

- Motivation
- Differentialgleichungen
- Finite Differenzen
- Finite Elemente
- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsprozess und Fehlers
- Weitere Problemklassen
 - Eigenwertprobleme
 - Lösung von EE
 - Parabolische PDGL**
 - Vertikale Linienmethode

Wärmeleitung: Suche $u(x, y, t) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 u_t - \Delta u &= f(x, y, t) && \text{in } \Omega \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{für } (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\
 u &= u_0(x, y) && \text{für } (x, y) \in \Omega, t = 0.
 \end{aligned}$$

Ansätze:

- Volldiskretisierung:
 - * u wird als Funktion von 3 gleichberechtigten Variablen betrachtet \rightarrow Anwendung von FD bzw. FEM.
- Semidiskretisierung \rightarrow Linienmethoden:
 - * **Vertikale**: Diskretisiere bzgl. der Raumvariablen (FD/FEM), dann löse System gewöhnlicher DGLen.
 - * **Horizontale**: Diskretisiere bzgl. der Zeitvariablen, dann löse Folge Eliptischer Randwertprobleme (FD/FEM).

Variationsproblem: Finde $u \in V$ f.a. t mit $u_t \in L^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} (u_t, v) + a(u, v) &= (f, v) && \text{f.a. } v \in V, \\ \text{sowie } u &= u_0 && \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Motivation

Differentialgleichungen

Finite Differenzen

Finite Elemente

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsprozess und Fehlers

Weitere Problemklassen

Eigenwertprobleme

Lösung von EE

Parabolische PDGL

Vertikale Linienmethode

Variationsproblem: Finde $u \in V$ f.a. t mit $u_t \in L^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} (u_t, v) + a(u, v) &= (f, v) && \text{f.a. } v \in V, \\ \text{sowie } u &= u_0 && \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Semidiskretes Problem: Finde $u_h \in V_h$ f.a. t mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v\right) + a(u_h, v) &= (f, v) && \text{f.a. } v \in V_h, \\ (u_h(x, y, 0), v) &= (u_0, v) && \text{f.a. } v \in V_h. \end{aligned}$$

Variationsproblem: Finde $u \in V$ f.a. t mit $u_t \in L^2(\Omega)$ und

$$(u_t, v) + a(u, v) = (f, v) \quad \text{f.a. } v \in V,$$

$$\text{sowie } u = u_0 \quad \text{für } t = 0.$$

Semidiskretes Problem: Finde $u_h \in V_h$ f.a. t mit

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v\right) + a(u_h, v) = (f, v) \quad \text{f.a. } v \in V_h,$$

$$(u_h(x, y, 0), v) = (u_0, v) \quad \text{f.a. } v \in V_h.$$

Ansatz

$$u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) w_j(x, y)$$

führt auf Systeme gewöhnlicher DGLen der Form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = By + f(t), \quad y(0) = g.$$