NEUR II, zimní semestr 2018/2019

Neuronové sítě II
T204, úterý 9.30

Přednášející:
František Hakl (2.10., 16.10., 30.10., 13.11., 11.12., 18.12)
Martin Holeňa (9.10., 23.10., 6.11., 20.11., 27.11., 4.12.)
Ústav informatiky AV ČR, Pod Vodárenskou věží 2, Praha 8

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.
zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT
přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Contents

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

1 Aproximace I. - S-W

- modul spojitosti
- approxinmace v $C_{\langle 0,1 \rangle}$
- Stone-Weierstrass lemma
- aproximace v $C_{\bar{K}}$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\widetilde{f} : \bar{K} \to \Re$ *, kde* $\bar{K} \subset \Re^n$ *je kompaktní množina. Potom definujeme* MODUL SPOJITOSTI *jako číslo*

$$\omega\left(\widetilde{f}, \delta\right) \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \bar{K} \\ \|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}\| < \delta}} \left|\widetilde{f}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) - \widetilde{f}\left(\vec{\boldsymbol{y}}\right)\right|.$$

Tvrzení. *Nechť* $\widetilde{\sigma} : \Re \to \Re$ *je spojitá a nechť platí* $\lim_{x\to-\infty} \widetilde{\sigma}(x) \to 0$ *a* $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{\sigma}(x) \to 1$. *Potom pro libovolnou funkci* $\widetilde{f} \in C_{\langle 0,1\rangle}$ *platí nerovnost*

$$\left\|\widetilde{f} - \widetilde{g}_n\right\|_\infty \leq \omega\left(\widetilde{f}, \frac{1}{n}\right)\left(4 + 2\sup_{x\in\Re}|\widetilde{\sigma}(x)|\right),$$

kde posloupnost funkcí $\{\widetilde{q}_n\}_1^\infty$ *je definována předpisem*

$$\widetilde{q}_n(x) \stackrel{def}{=} \widetilde{f}(0) + \sum_{v=1}^{n}\left(\widetilde{f}\left(\frac{v}{n}\right) - \widetilde{f}\left(\frac{v-1}{n}\right)\right)\widetilde{\sigma}\left(A_n(nx - v)\right) \tag{1}$$

a pro číselnou posloupnost $\{A_i\}_1^\infty$ *platí, že* A_n *je nejmenší kladné celé číslo, pro které platí*

$$|\widetilde{\sigma}(x)| \leq \frac{1}{n} \quad pro \quad x \leq -A_n \qquad a \qquad 1 - \frac{1}{n} \leq \widetilde{\sigma}(x) \leq 1 + \frac{1}{n} \quad pro \quad x \geq A_n.$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení (Stone-Weierstrass). *Nechť* $\bar{K}$ *je kompaktní množina v* $\Re^n$ *a* $\mathcal{B}$ *je lineární podprostor v prostoru* $C_{\bar{K}}$ *takový, že obsahuje konstantní nenulovou funkci a v množině* $\bar{K}$ *odděluje libovolné dva body (t.j. pro libovolné* $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \bar{K}$, $\vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\boldsymbol{y}}$ *existuje* $\widetilde{f} \in \mathcal{B}$ *tak, že* $\widetilde{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq \widetilde{f}(\vec{\boldsymbol{y}})$*) a nechť navíc platí, že pro libovolné* $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathcal{B}$ *je i* $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \in \mathcal{B}$. *Potom* $\mathcal{B}$ *je hustá v prostoru* $C_{\bar{K}}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Předpokládejme, že* $\bar{K}$ *je kompaktní podmnožina prostoru* $\Re^n$ *. Potom lineární obal množiny funcí* $\bar{\Theta} \stackrel{def}{=} \left\{ \widetilde{\rho}\,(\vec{\boldsymbol{x}}) = e^{\langle \vec{\boldsymbol{a}} | \vec{\boldsymbol{x}} \rangle} \,|\vec{\boldsymbol{a}} \in \Re^n \right\}$ *je hustý v prostoru* $C_{\bar{K}}$ *.*

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $\bar{K}$ *je kompaktní podmnožina prostoru* $\Re^n$ *a nechť* $\widetilde{\sigma} : \Re \to \Re$ *je spojitá funkce pro kterou platí* $\lim_{x\to-\infty} \widetilde{\sigma}(x) \to 0$ *a* $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{\sigma}(x) \to 1$. *Potom množina funkcí tvaru*

$$\widetilde{g}(\vec{\boldsymbol{x}}) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{k} b_j \widetilde{\sigma}(\langle \vec{\boldsymbol{w}}_j | \vec{\boldsymbol{x}} \rangle + c_j),$$

je hustá v prostoru $C_{\bar{K}}$, *kde* $k \in N$, $c_j, b_j \in \Re$, $\vec{\boldsymbol{w}}_j \in \Re^n$, $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

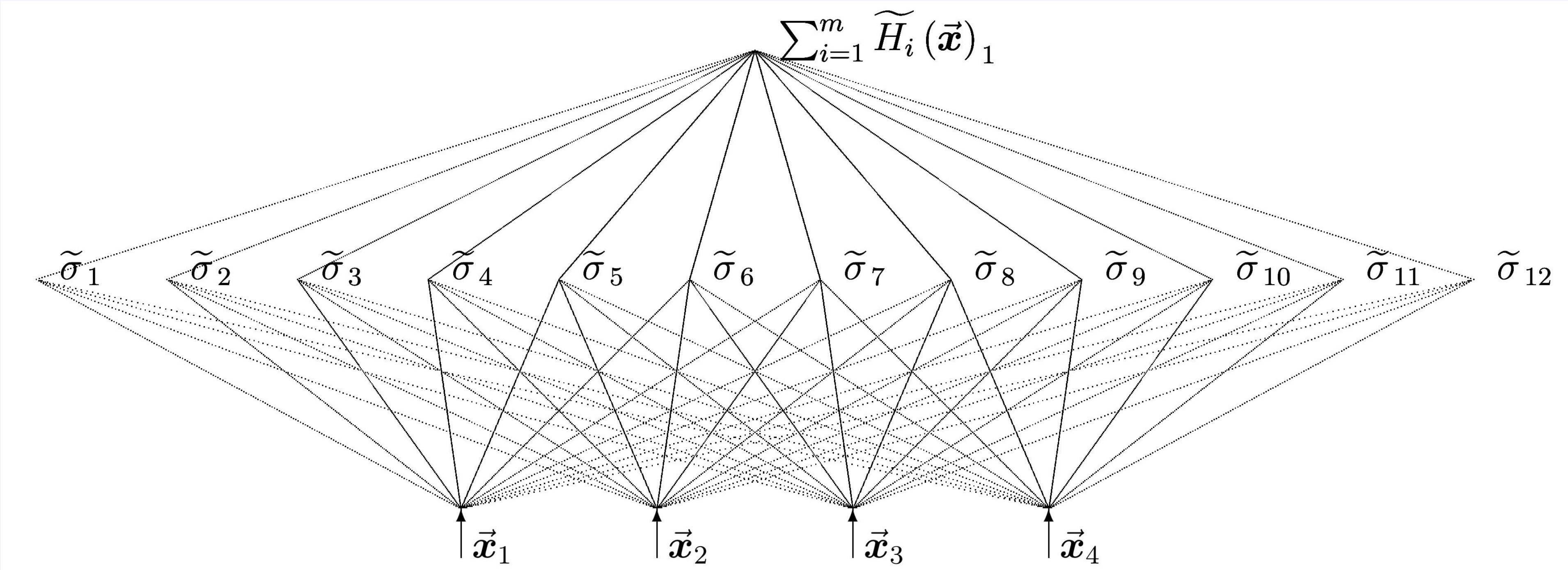

Figure 1: Odpovídající neuronová síť s jednou výpočetní vrstvou.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

2 Approximace II. - Konvoluce

- aproximace konvolucí
- konvoluční jádro
- volba konvolučního jádra

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.
zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT
přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Předpokládejme, že* $\widetilde{f}$ *je omezená, stejnoměrně spojitá funkce na* $\Re^n$ *a že pro* $\widetilde{g} \in \mathcal{L}_1^{\Re^n}$ *platí* $\int_{\Re^n} \widetilde{g}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) d\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = 1$. *Dále definujme funkce* $\widetilde{g_m}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \stackrel{def}{=} m^n \widetilde{g}\left(m\vec{\boldsymbol{x}}\right)$. *Potom platí:*

1. $\left(\widetilde{f} * \widetilde{g_m}\right) = \int_{\Re^n} \widetilde{f}\left(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{t}}\right) \widetilde{g_m}\left(\vec{\boldsymbol{t}}\right) d\left(\vec{\boldsymbol{t}}\right)$ *konverguje stejnoměrně k funkci* $\widetilde{f}$ *pro* $m \to \infty$ *na* $\Re^n$.
2. *pro libovolné číslo* $R > 0$ *platí:* $\left\|\left(\widetilde{f} * \widetilde{g_m}\right) - \widetilde{f}\right\|_\infty \leq \omega\left(\widetilde{f}, \frac{2R}{m}\right) \|\widetilde{g}\|_1 + 2\left\|\widetilde{f}\right\|_\infty \int_{\|\vec{\boldsymbol{s}}\| > R} |\widetilde{g}\left(\vec{\boldsymbol{s}}\right)| d\vec{\boldsymbol{s}}$, *kde norma* $\|.\|_\infty$ *je brána vzhledem k celému* $\Re^n$.
3. *Nechť* $\widetilde{f}$ *Lipstichovská s konstantou* λ *a nechť* $M \stackrel{def}{=} \int_{\Re^n} \|\vec{\boldsymbol{x}}\| |\widetilde{g}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)| d\vec{\boldsymbol{x}} < \infty$. *Potom platí odhad* $\left\|\left(\widetilde{f} * \widetilde{g_m}\right) - \widetilde{f}\right\|_\infty \leq \frac{M\lambda}{m}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Pro libovolnou spojitou funkci* $\widetilde{\phi} \in C_{\Re}$ *definujme* KONVOLUČNÍ JÁDRO *jako funkci* $\widetilde{G_{\widetilde{\Phi}}} : \Re^n \to \Re$ *definovanou předpisem*

$$\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\alpha_n} \int_{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|=1} \widetilde{\phi}\,(\langle \vec{\boldsymbol{x}}\,|\vec{\boldsymbol{u}}\rangle) d\,(\vec{\boldsymbol{u}}), \quad \textit{kde} \quad \alpha_n \stackrel{def}{=} \int_{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|=1} d\,(\vec{\boldsymbol{u}}), \tag{2}$$

(α_n *je povrch jednotkové koule v prostoru* $\Re^n$ *).*

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť pro nějaké* $a > 0$ *je* $\bar{K} \stackrel{def}{=} \langle a, a \rangle^n$ *a* $\widetilde{\phi} \in C_{\Re}$ *je stejnoměrně spojitá. Předpokládejme, že* $\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ *je definována podle 2. Nechť* $\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\cdot) \in \mathcal{L}_1^{\Re^n}$ *a současně*

$$\int_{\Re^n} \widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) d(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq 0 \, .$$

Potom lineární obal funkcí ve tvaru $\widetilde{\phi}(\langle \vec{\boldsymbol{x}} \,|\vec{\boldsymbol{a}} \rangle - c)$, $\vec{\boldsymbol{a}} \in \Re^n$, $c \in \Re$, *je hustý v prostoru* $C_{\bar{K}}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť* $p, R \in \Re,\ R > 0$ *a* $\vec{\boldsymbol{x}} \in \Re^n$. *Potom platí, že*

$$\int_{\|\vec{\boldsymbol{x}}\| \geq R} \frac{1}{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|^p} d\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) < \infty$$

právě když $p > n$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť* $\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ *je definováno dle 2.Potom* $\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \widetilde{g}_0\left(\widetilde{\phi}, r\right)$*, kde* $r \stackrel{def}{=} \|\vec{\boldsymbol{x}}\|$ *a*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}_0\left(\widetilde{\phi}, r\right) &\stackrel{def}{=} \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \int_{-1}^{1} \widetilde{\phi}(rs) \left(1 - s^2\right)^{\frac{n-3}{2}} d(s) \\
&= \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \int_{-r}^{r} r^{2-n} \widetilde{\phi}(t) \left(r^2 - t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} d(t), \quad r \neq 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť n je liché a pro $\widetilde{\psi}(t) \stackrel{def}{=} \widetilde{\phi}(1+t) + \widetilde{\phi}(1-t)$ a pro nějaké $\eta > 0$ platí $\left|\widetilde{\psi}(t)\right| \leq \frac{\eta}{|t|^p}$, $p > n-2$. Potom $\widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\cdot) \in \mathcal{L}_1^{\Re n}$ tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) t^{2j} d(t) = 0, \quad j \in \{0, \ldots, \frac{n-3}{2}\}. \tag{4}$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Předpokládejme, že n je liché a že funkce* $\widetilde{\psi}$ *splňuje předpoklady a tvrzení lemmy . Dále předpokládejme, že* $\widetilde{\psi}$ *je sudá funkce. Potom platí*

$$\int_{\Re^n} \widetilde{G}_{\widetilde{\phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) d(\vec{\boldsymbol{x}}) = -2\alpha_{n-2}\tau_n \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) t^{n-1} d(t), \tag{5}$$

kde je

$$\tau_n \stackrel{def}{=} \int_0^1 r\left(1-r^2\right)^{\frac{n-3}{2}} d(r) > 0.$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $\widetilde{\sigma} \in C_{\Re}$ *je stejnoměrně spojitá na* $\Re$ *a* $\widetilde{\psi}(t) \overset{def}{=} \widetilde{\sigma}(1+t)+\widetilde{\sigma}(1-t)$. *Předpokládejme, že* n *je liché a* $\bar{K} = \langle -a, a\rangle^n$, $a > 0$ *a pro nějaké* $\eta > 0$ *platí* $\left|\widetilde{\psi}(t)\right| \leq \frac{\eta}{|t|^p}$, $p > n-2$. *Dále nechť*

$$\int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) t^{n-1} d(t) \neq 0.$$

Potom lineární obal množiny funkcí ve tvaru $\widetilde{\sigma}(\langle \vec{\boldsymbol{x}} | \vec{\boldsymbol{w}} \rangle + c)$, *kde* $\vec{\boldsymbol{w}} \in \Re^n$ *a* $c \in \Re$, *je hustý v prostoru* $C_{\bar{K}}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

3 Approximace III. - Duální prostory

- věta o vztahu hustoty funkcí a nulového funkcionálu
- aplikace na prostor $\mathcal{L}_p^{\bar{K}}$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $\mathcal{X}$ *je úplný normovaný vektorový prostor nad tělesem* $\Re$, $\bar{V}$ *je jeho podprostor. Potom* $\bar{V}$ *je hustý v* $\mathcal{X}$ *, právě když jediný lineární omezený funkcionál na* $\mathcal{X}$ *, v jehož nulovém prostoru je* $\bar{V}$ *obsažen, je nulový funkcionál.*

Důkaz byl prezentován na přednášce.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť* $\widetilde{g}$ *je funkce definovaná na kompaktní množině* $\bar{K} \subset \Re^n$ *splňující následující podmínku:*

$$(\forall \vec{\boldsymbol{a}} \in \Re^n,\ \|\vec{\boldsymbol{a}}\| = 1)\left(\forall \vec{\boldsymbol{y}} \in \bar{K}\right)\left(\int_{\langle \vec{\boldsymbol{a}}|\vec{\boldsymbol{x}}\rangle < \langle \vec{\boldsymbol{a}}|\vec{\boldsymbol{y}}\rangle} \widetilde{g}\,(\vec{\boldsymbol{x}})d\,(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int_{\langle \vec{\boldsymbol{a}}|\vec{\boldsymbol{x}}\rangle > \langle \vec{\boldsymbol{a}}|\vec{\boldsymbol{y}}\rangle} \widetilde{g}\,(\vec{\boldsymbol{x}})d\,(\vec{\boldsymbol{x}}).\right)$$

Potom $\widetilde{g}$ *je skoro všude na* $\bar{K}$ *rovna nule.*

Důkaz byl prezentován na přednášce.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

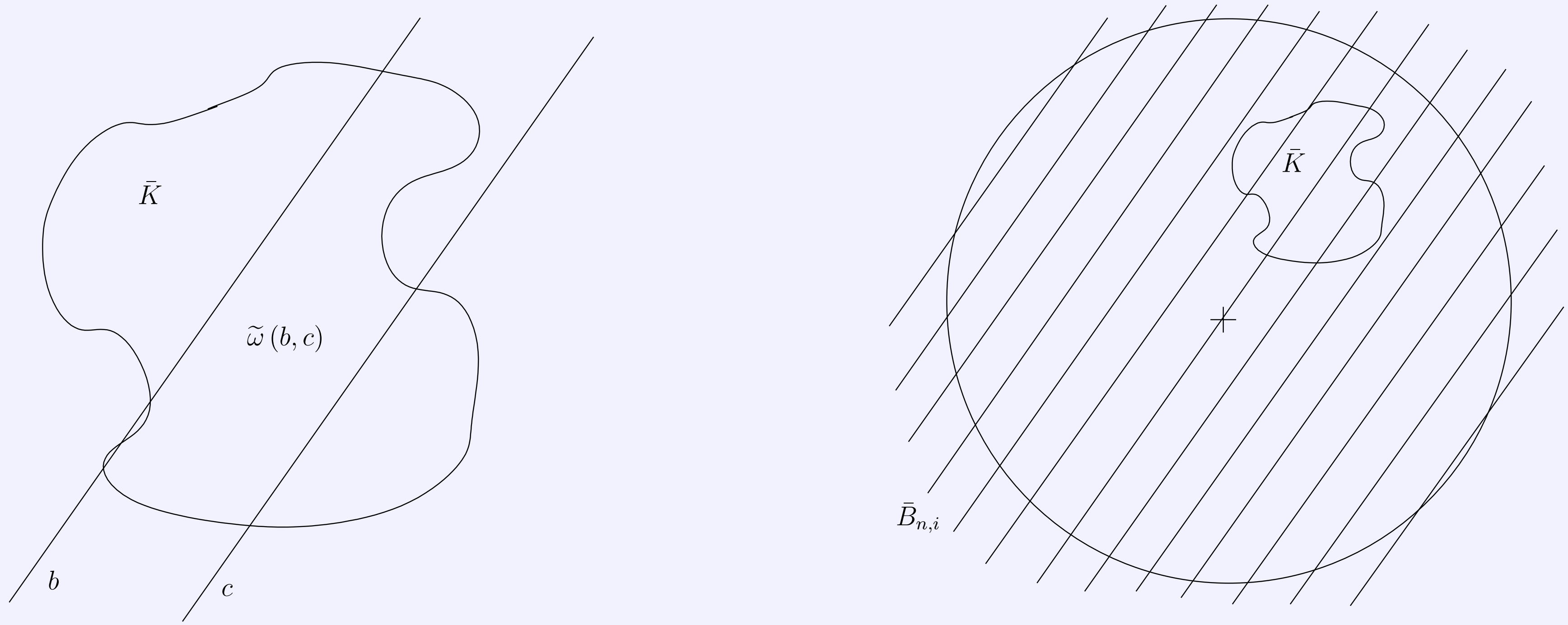

Figure 2: Definition of sets $\bar{B}_{n,i}$ and of the mapping $\widetilde{\omega}$.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

4 Approximace IV. - Binární neuronové sítě

- pojem prahového vektoru
- základní vlastnosti prahového vektoru
- odhad počtu vektorů
- dolní odhad počtu vektorů

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.
zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT
přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť funkce* $\widetilde{sgn} : \Re^n \to \{-1, +1\}$ *je definována jako*

$$\widetilde{sgn}\,(z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \;\;1 & pro \quad x > 0 \\ -1 & \qquad\;\; x \leq 0 \end{cases} .$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S$ *jsou vektory z* $\{-1, +1\}^n$. *Potom říkáme, že vektor* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *je* PRAHOVÝM VEKTOREM *systému* $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S$ *právě když existují čísla* $w_1, \ldots, w_S$ *tak, že vektor* $\sum_{i=1}^{S} w_i \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_i$ *má pouze nenulové složky a platí:*

$$\vec{\boldsymbol{y}} \stackrel{def}{=} \widetilde{sgn}\left(\sum_{i=1}^{S} w_i \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_i\right).$$

(Funkce $\widetilde{sgn}$ *je aplikována na vektory po složkách).*

Lemma. *Nechť* $\vec{\boldsymbol{y}}^T (\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S) = \vec{\mathbf{0}}^T$. *Potom* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *není prahovým vektorem systému* $(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S)$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Lemma. *Nechť* $\vec{\boldsymbol{y}}^T$ *je prahovým vektorem systému* $(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S)$, $\vec{\boldsymbol{x}}_i \neq \vec{\mathbf{0}}$, $i \in \{1, \ldots, S\}$ *a sloupce matice* $\boldsymbol{X}$ *jsou rovny vektorům* $\vec{\boldsymbol{x}}_i$. *Potom pro všechny vektory* $\vec{\boldsymbol{z}} \in \{-1, +1\}^n$, $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{z}}$, *platí*

$$\vec{\boldsymbol{y}}^T \cdot \boldsymbol{X} \neq \vec{\boldsymbol{z}}^T \cdot \boldsymbol{X}.$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Existuje nejvýše* $(n+1)^S$ *různých prahových vektorů systému* $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S \in \{-1, +1\}^n$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Předkpokládejme, že vektory* $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S$ *jsou lineárně nezávislé a nechť*

$$\vec{\boldsymbol{y}} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{S} \beta_i \vec{\boldsymbol{x}}_i + \vec{\boldsymbol{y}}^{\perp},$$

kde $\vec{\boldsymbol{y}}^{\perp}$ *je z ortogonálního doplňku* $[\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S]_\lambda$. *Označme vektor* $\vec{\boldsymbol{\beta}} \stackrel{def}{=} (\beta_1, \ldots, \beta_S)$ *jako* ZOBECNĚNÉ SPEKTRUM *vektoru* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *a číslo*

$$\beta_{max} \stackrel{def}{=} \max\{|\beta_i| \,|\, i \in \{1, \ldots, S\}\}$$

jako MAXIMUM ZOBECNĚNÉHO SPEKTRA *vektoru* $\vec{\boldsymbol{y}}$.

Lemma. *Je-li* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *prahovým vektorem systému* $(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S)$ *tak platí*

$$\sum_{i=1}^{S} \left| \vec{\boldsymbol{\beta}}_i \right| \geq 1.$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *je prahový vektor systému ortogonálních vektorů* $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_S \in \{-1, +1\}^n$. *Potom*

$$S \geq \frac{n}{\max_i |\langle \vec{\boldsymbol{y}} \,|\vec{\boldsymbol{x}}_i \rangle|}. \tag{6}$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

5 Symetrické prahové vektory

- vlastnosti prahů základních vektorů parity
- obvod pro symetrické vektory

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je reálná matice o rozměrech* $r \times s$ *a* $\boldsymbol{B}$ *je reálná matice o rozměrech* $m \times n$. *Potom* TENSOROVÝ SOUČIN *matic* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *je matice* $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$ *o rozměrech* $mr \times ns$ *definovaná jako*

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}b_{1,1} & \boldsymbol{A}b_{1,2} & \dots & \boldsymbol{A}b_{1,n} \\ \boldsymbol{A}b_{2,1} & \boldsymbol{A}b_{2,2} & \dots & \boldsymbol{A}b_{2,n} \\ & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}b_{m,1} & \boldsymbol{A}b_{m,2} & \dots & \boldsymbol{A}b_{m,n} \end{pmatrix} .$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Čtvercová matice* $\boldsymbol{A}$ *je* ROSTOUCÍ *, jestli-že její prvky v každém řádku a v každém sloupci tvoří neklesající posloupnost. Matice* $\boldsymbol{A}$ *je* POTENCIÁLNĚ ROSTOUCÍ *, jestli-že existují permutační matice* $\boldsymbol{P}$ *a* $\boldsymbol{Q}$ *tak, že matice* $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}$ *je rostoucí.*

Lemma. *Čtvercová matice* $\boldsymbol{A}$ *s prvky z* $\{-1,1\}$ *je potenciálně rostoucí právě když neobsahuje jako svojí podmatici matici* $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ *nebo* $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* n *je přirozené,* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *, a* $\boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{k})}$ *označuje vektor jedniček délky* 2^k*. Potom* i-tý základní vektor parity *je definován jako* $\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_i \stackrel{def}{=} \boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{i-1})} \odot (1, -1) \odot \boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{n-i})}$.

Definice. *Předpokládejme že* $n \stackrel{def}{=} 2k$, $\vec{\boldsymbol{y}} \in \{-1,+1\}^{2^n}$ *a* $\boldsymbol{M}_{\vec{\boldsymbol{y}}}$ *je čtvercová matice řádu* $2^{\frac{n}{2}}$, *jejíž sloupce jsou tvořeny po sobě jdoucími podvektory vektoru* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *délky* $2^{\frac{n}{2}}$. *Potom matici* $\boldsymbol{M}_{\vec{\boldsymbol{y}}}$ *nazveme* SDRUŽENOU MATICÍ *vektoru* $\vec{\boldsymbol{y}}$.

Lemma. *Nechť* $\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_1, \ldots, \vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_n$ *jsou základní vektory parity pro* $n \stackrel{def}{=} 2k$. *Dále nechť* $\boldsymbol{E}^{(i)}$ *je čtvercová matice jedniček dimenze* 2^i. *Potom:*

1. *pro* $1 \leq j \leq k$ *platí*

$$\boldsymbol{M}_{\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_j} = \boldsymbol{E}^{(j-1)} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \odot \boldsymbol{E}^{(k-j)} \qquad a \qquad \boldsymbol{M}_{\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_{k+j}} = \boldsymbol{E}^{(j-1)} \odot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \odot \boldsymbol{E}^{(k-j)}.$$

2. *Pro* $1 \leq j \leq k$ *platí*

$$\boldsymbol{M}_{\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_{k+j}} = \boldsymbol{M}^T_{\vec{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{(n)}_j}.$$

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Je-li* $n \stackrel{def}{=} 2k$ *a* $\vec{\boldsymbol{y}} \in \{-1, +1\}^{2^n}$ *je prahový vektor základních vektorů parity a konstantního vektoru, tak sdružená matice* $\boldsymbol{M}_{\vec{\boldsymbol{y}}}$ *je potenciálně rostoucí.*

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\vec{\boldsymbol{x}} = (\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{x}}_n) \in \{-1, +1\}^n$ *a definujeme číslo* $nint\,(\vec{\boldsymbol{x}}) \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ *jako*

$$nint\,(\vec{\boldsymbol{x}}) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\vec{\boldsymbol{x}}_k + 1}{2} \right) 2^{n-k}.$$

Dále nechť $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ *a* $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \{0, 1\}^n$ *jsou taková, že* $i = \sum_{j=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\alpha}}_j 2^{n-j}$. *Potom*

$$vbin\,(i) \stackrel{def}{=} \vec{\boldsymbol{\alpha}} \quad and \quad vpm\,(i) \stackrel{def}{=} 2 \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}} - \vec{\mathbf{1}}.$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $n \in N$, $\vec{\boldsymbol{y}} \in \{-1,+1\}^{2^n}$ *a* $\alpha \in \{0,\ldots,2^n-1\}$. *Potom vektor* $\vec{\boldsymbol{y}}$ *nazveme* α-SYMETRICKÝ VEKTOR *když* $(\forall i,j \in \{0,\ldots,2^n-1\})$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(vbin\,(i))_k \cdot (vbin\,(\alpha))_k = \sum_{k=1}^{n}(vbin\,(j))_k \cdot (vbin\,(\alpha))_k\right) \Rightarrow \vec{\boldsymbol{y}}_i = \vec{\boldsymbol{y}}_j \ .$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $n \in N$ *a vektor* $\vec{\boldsymbol{y}} \in \{-1,+1\}^{2^n}$ *je* $(2^n - 1)$*–symetrický vektor. Nechť* $d_1, \ldots, d_m$ *jsou délky po sobě jdoucích konstantních úseků posloupnosti* $\vec{\boldsymbol{y}}_0, \vec{\boldsymbol{y}}_{2^1-1}, \vec{\boldsymbol{y}}_{2^2-1}, \ldots, \vec{\boldsymbol{y}}_{2^n-1}$. *Dále pro každé* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *definujme funci* $\widetilde{v_k} : \{-1,+1\}^n \rightarrow \{-1,+1\}$ *jako*

$$\widetilde{v_k}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \stackrel{def}{=} \widetilde{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} \vec{\boldsymbol{x}}_j + n - 2\sum_{j=1}^{k} d_j + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

a navíc definujme $\widetilde{S}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \stackrel{def}{=} \vec{\boldsymbol{y}}_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \left(\widetilde{v_j}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) + 1\right)\right)$. *Potom pro všechna* $\vec{\boldsymbol{x}} \in \{-1,+1\}^n$ *platí* $\widetilde{S}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \vec{\boldsymbol{y}}_{nint(\vec{\boldsymbol{x}})}$.

Důkaz byl prezentován na přednášce.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

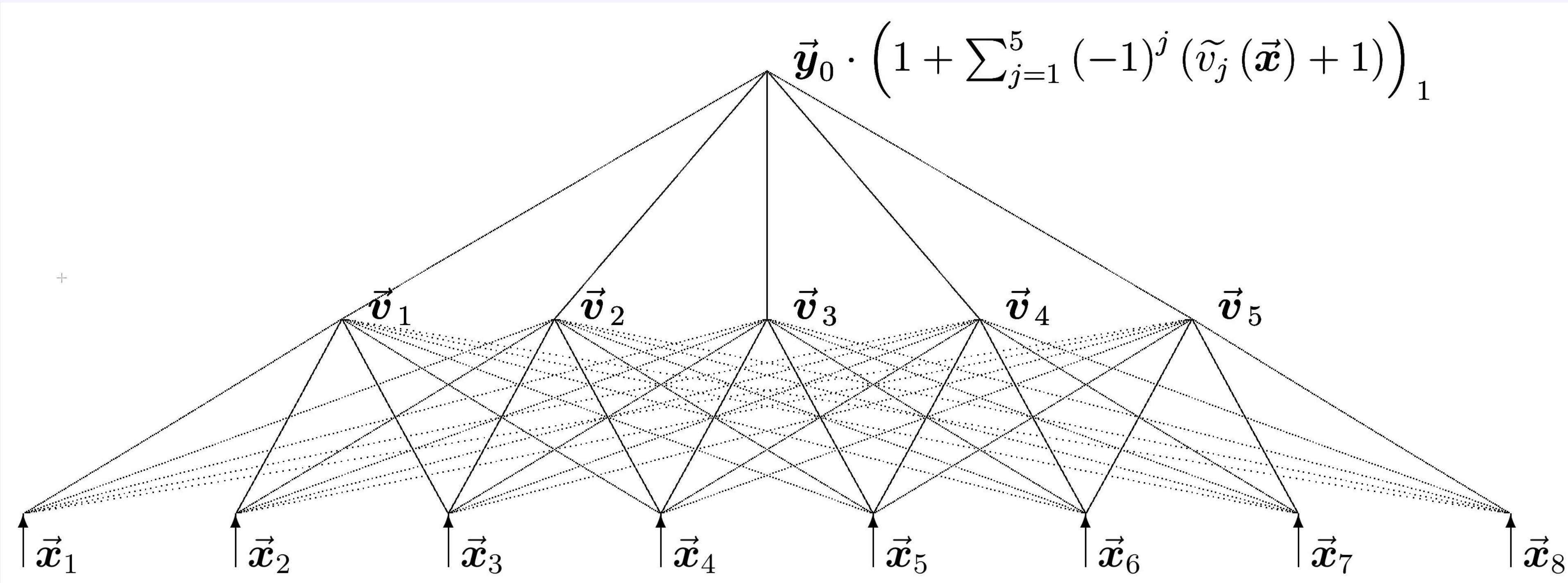

Figure 3: Příklad neuronové sítě pro výpočet symetrických vektorů.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

6 Vapnik-Chervonenkova dimenze

- Vapnik-Chervonenkova dimenze
- Radonovo lemma, VC dimenze poloprostorů a koulí
- odhady Vapnik-Chervonenkovy dimenze neuronových sítí

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\bar{X}$ *je libovolná množina. Potom* $\bar{c} \subset \bar{X}$ *nazveme* KONCEPT *(nad* $\bar{X}$ *). Neprázdný systém množin* $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$ *nazveme* TŘÍDOU KONCEPTŮ *(nad množinou* $\bar{X}$ *). Prvky této třídy* $\bar{c} \in \mathsf{C}$ *nazýváme koncepty z třídy* C *.*

Definice. *Nechť* $\widetilde{f}$ *je zobrazení z* $\bar{X}$ *do* $\{-1,+1\}$ *. Potom definujeme koncept* $\bar{c}_{\widetilde{f}}$ *jako*

$$\bar{c}_{\widetilde{f}} \stackrel{def}{=} \left\{ x \in \bar{X} \,\middle|\, \widetilde{f}(x) = 1 \right\}.$$

Definice. *Předpokládejme, že* $\bar{F}$ *je libovolná množina funkcí zobrazujících* $\bar{X}$ *do* $\{-1,+1\}$ *. Potom řekneme, že* $\bar{F}$ REPREZENTUJE TŘÍDU KONCEPTŮ

$$\mathsf{C}_{\bar{F}} \stackrel{def}{=} \left\{ \bar{A} \subset \bar{X} \,\middle|\, (\exists \widetilde{f} \in \bar{F})(\bar{A} = \bar{c}_{\widetilde{f}}) \right\}.$$

Definice. *Nechť n je přirozené číslo a*

$$\bar{F} \overset{def}{=} \left\{ \widetilde{f} : \Re^n \to \{-1,+1\} \,\middle|\, \widetilde{f}\,(\vec{\boldsymbol{x}}) = \widetilde{sgn}\,(\langle \vec{\boldsymbol{x}} \,|\vec{\boldsymbol{w}}\rangle - t), \quad t \in \Re, \;\; \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{x}} \in \Re^n \right\}.$$

Potom definujeme $\mathbf{HALFSPACE}_n \overset{def}{=} \mathsf{C}_{\bar{F}}$.

Definice. *Nechť n je přirozené číslo a*

$$\bar{F} \overset{def}{=} \left\{ \widetilde{f} : \Re^n \to \{-1,+1\} \,\middle|\, \widetilde{f}\,(\vec{\boldsymbol{x}}) = \widetilde{sgn}\,(\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{c}}\|_E - r), \quad r \in \Re^+, \;\; \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{x}} \in \Re^n \right\}.$$

Potom definujme $\mathbf{BALL}_n \overset{def}{=} \mathsf{C}_{\bar{F}}$.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\bar{X}$ *je daná množina,* $\bar{Y} \subset \bar{X}$, $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$. *Potom* $\bar{Y}$ JE ROZDĚLENA TŘÍDOU C *právě když:*

$$(\forall \bar{z} \subset \bar{Y})(\exists \bar{c} \in \mathsf{C})(\bar{c} \cap \bar{Y} = \bar{z}).$$

Dále definujme pojem VAPNIK-CHERVONENKOVA DIMENZE *systému množin* C *jako*

$$\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) \stackrel{def}{=} \sup\left\{ \left|\bar{Y}\right| \,\middle|\, \bar{Y} \textit{ je rozdělena třídou } \mathsf{C} \right\}.$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť* C *je konečná třída konceptů. Potom* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) \leq \log_2(|\mathsf{C}|)$.

Bez důkazu.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.
zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT
přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma (Sauer). *Nechť* $\bar{X}$ *je konečná množina a* $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$. *Potom*

$$|\mathsf{C}| \leq \sum_{i=0}^{\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C})} \binom{|\bar{X}|}{i}.$$

Dále existuje $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$ *taková, že platí rovnost.*

Bez důkazu.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Důsledek. *Nechť* $\bar{X}$ *je konečná množina,* $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$ *a* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) > 0$. *Potom*

$$\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) > \frac{\ln\left(\left|\bar{C}\right|\right)}{1 + \ln\left(\left|\bar{X}\right|\right)}.$$

Bez důkazu.

Lemma (Radon). *Nechť* $\bar{S} \stackrel{def}{=} \{\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k\} \subset \Re^n$, $k \geq n+2$, $\vec{\boldsymbol{x}}_i$ *jsou vzájemně různé. Potom existují množiny* $\bar{S}_1$ *a* $\bar{S}_2$ *tak, že* $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = \bar{S}$, $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \emptyset$ *a*

$$[\bar{S}_1]_\kappa \cap [\bar{S}_2]_\kappa \neq \emptyset$$

(symbol $[\bar{S}]_\kappa$ *označuje konvexní obal množiny* $\bar{S}$ *).*

Bez důkazu.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. $\mathtt{VC}_{dim}\left(\mathbf{HALFSPACE}_n\right) = \mathtt{VC}_{dim}\left(\mathbf{BALL}_n\right) = n + 1.$

Bez důkazu.

Definice. *Nechť* $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$ *je třída konceptů. Pak pro každé přirozené číslo* k *definujeme množiny*

$$\mathsf{U}_{k,\mathsf{C}} \stackrel{def}{=} \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \bar{c}_i \,|\, (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\, (\bar{c}_i \in \mathsf{C}) \right\} \qquad a \qquad \mathsf{I}_{k,\mathsf{C}} \stackrel{def}{=} \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \bar{c}_i \,|\, (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\, (\bar{c}_i \in \mathsf{C}) \right\}.$$

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Lemma. *Nechť* $\mathsf{C} \subset 2^{\bar{X}}$ *je třída konceptů, nechť* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) = d \geq 1$ *je konečná a* $k \geq 1$. *Potom* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{U}_{k,\mathsf{C}}) \leq 2dk\log_2(3k)$ *a* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{I}_{k,\mathsf{C}}) \leq 2dk\log_2(3k)$.

Bez důkazu.

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Předpokládejme, že je dán souvislý orientovaný acyklický graf s množinou vrcholů* $\bar{V}$ *a množinou hran* $\bar{E}$. *Nechť pro vrchol* $j \in \bar{V}$ *označuje číslo* d_j^+ *počet hran vedoucích do vrcholu* j *a* d_j^- *počet hran vedoucích z vrcholu* j. *Dále nechť platí:*

1. *Existuje právě jeden vrchol s* $d_j^- = 0$ *(tzv.* VÝSTUPNÍ VRCHOL *) a existuje alespoň jeden vrchol s* $d_j^+ = 0$ *(tzv.* VSTUPNÍ VRCHOLY *). Ostatní vrcholy nazveme* VNITŘNÍ VRCHOLY *.*

2. *Pro každý vrchol* $j \in \bar{V}$ *existuje zobrazení* $\widetilde{Z_j} : \left\{\Re^{d_j^+} \times W_j\right\} \to \Re$ *, kde* $\bar{W}_j$ *je daný parametrický prostor zobrazení* $\widetilde{Z_j}$ *.*

Potom $\left(\bar{V}, \bar{E}, \left(\widetilde{Z_j}, \bar{W}_j\right), j \in \bar{V}\right)$ *nazveme* SLOŽENÉ ZOBRAZENÍ *.*

Označme vrcholy grafu pevným vlastním očíslováním. Nechť $\left(\vec{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_{|\bar{V}|}\right) \in \bar{W}_1 \times \bar{W}_2 \cdots \times \bar{W}_{|\bar{V}|}$ *a*

$$(\forall j \in \bar{V}) \left(v_j = \widetilde{Z_j}\left(\left(v_{j_1} \cdots v_{j_{d_j^+}},\right), \vec{\boldsymbol{w}}_j\right) \quad a \quad (\forall i \in \{1, \ldots, d_j^+\}) \left((j_i, j) \in \bar{E}\right)\right) .$$

Potom hodnotu $v_{|\bar{V}|}$ *nazveme* HODNOTOU SLOŽENÉHO ZOBRAZENÍ *pro parametrizaci* $\left(\vec{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_{|\bar{V}|}\right)$.

Příklad: $\widetilde{s} : \Re^3 \times \bar{W}_s \times \bar{W}_f \times \bar{W}_g \times \bar{W}_h \to \Re$, kde $\bar{W}_s, \bar{W}_f, \bar{W}_g, \bar{W}_h$ jsou parametrické prostory zobrazení $\widetilde{s}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$, a

$$\widetilde{s}\left(\widetilde{f}\,(x, y, z, \vec{\boldsymbol{w}}_f), \widetilde{g}\left(y, \widetilde{h}\,(z, \vec{\boldsymbol{w}}_h), \vec{\boldsymbol{w}}_g\right), \vec{\boldsymbol{w}}_s\right).$$

Odpovídající graf je uveden na následujícím obrázku:

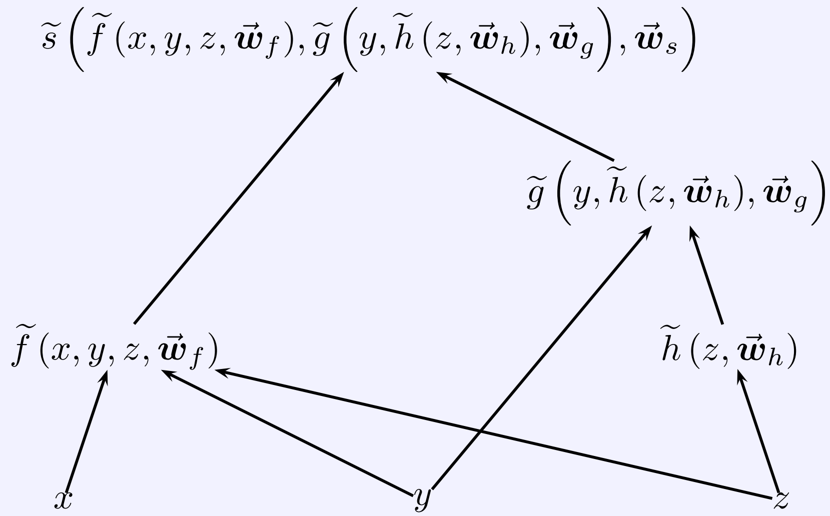

Figure 4: Corresponding graph for composed mapping.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* $\mathbf{D} \stackrel{def}{=} \left(\bar{V}, \bar{E}, \left(\widetilde{Z_j}, \bar{W}_j\right), j \in \bar{V}\right)$ *je složené zobrazení a* $z \geq 2$ *je počet nevstupních vrcholů. Dále nechť pro každý nevstupní vrchol je* $\mathtt{VC}_{dim}\left(\mathsf{C}_{\widetilde{Z}_k}\right) = d_k > 0$, $d_k < +\infty$, $k \in \{1, \ldots, z\}$ *a definujme*

$$q \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{z} d_k \ . \tag{8}$$

Potom platí

$$\mathtt{VC}_{dim}\left(\mathsf{C}_{\mathbf{D}}\right) < 2q\log_2\left(ez\right) \ . \tag{9}$$

Bez důkazu.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

7 Odhady vzorové složitosti PAC modelu učení

- **Probably Approximately Correct (PAC) učení - schéma**
- **třídy konceptů a hypotéz, chyba hypotézy vůči konceptu**
- (ϵ, δ)**-algoritmus**
- **odhady vzorové složitosti pro** (ϵ, δ)**-učení**

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

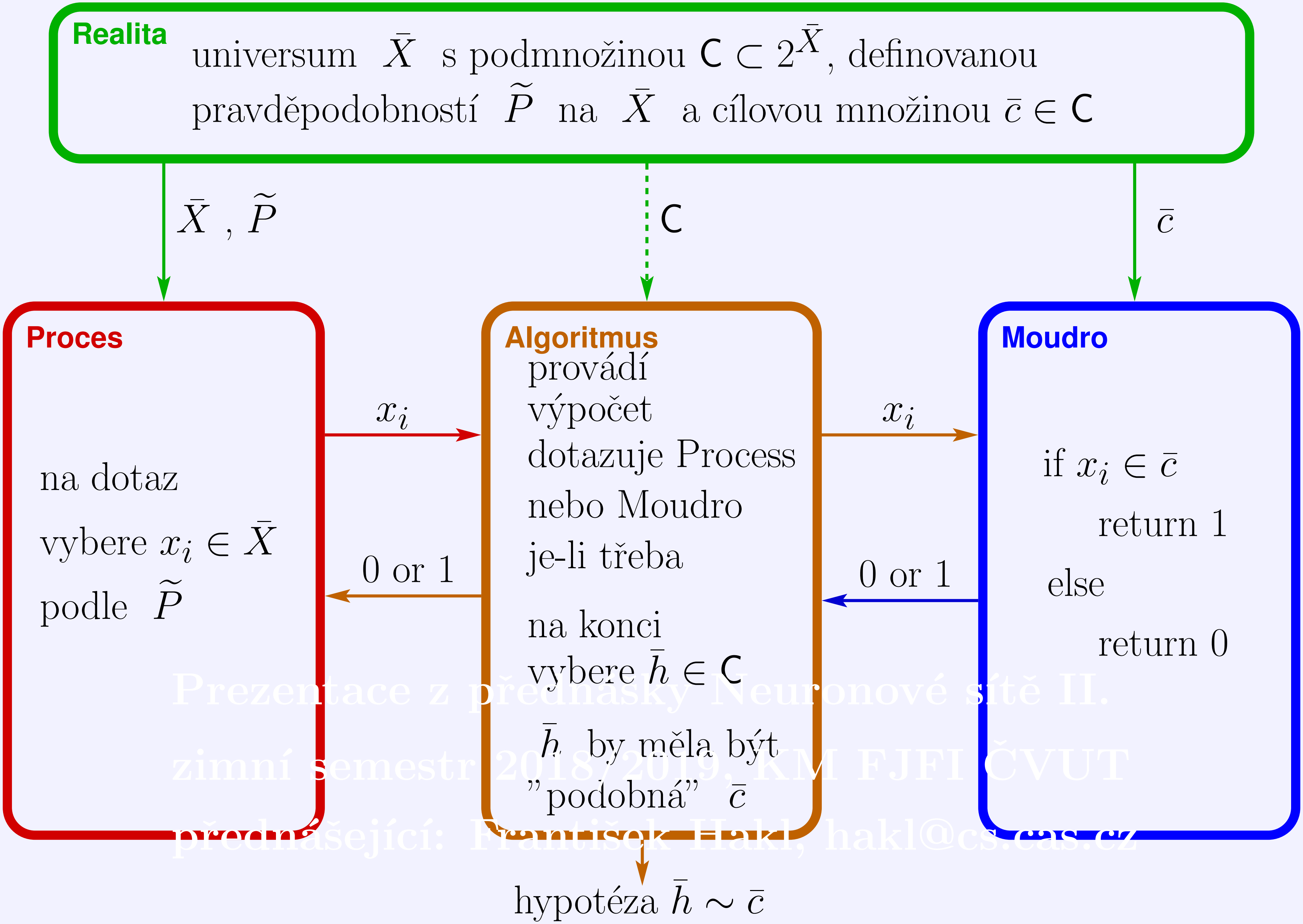

Figure 5: Učení s učitelem s dotazy na příslušnost .

Definice. *Nechť* C *je třída konceptů a systém množin* H *splňuje podmínku* $\mathsf{C} \subset \mathsf{H} \subset 2^{\bar{X}}$. *Potom* H *je* TŘÍDA HYPOTÉZ *pro třídu konceptů* C.

Definice. *Nechť* $\bar{X}$ *je pravděpodobnostní prostor s pravděpodobnostní funkcí* $\widetilde{P}$. *Dále nechť* C *je třída konceptů nad množinou* $\bar{X}$ *a* H *je třída hypotéz pro* C. *Potom pro každé* $\bar{c} \in \mathsf{C}$ *a* $\bar{h} \in \mathsf{H}$ *je číslo*

$$\mathsf{e}_{\widetilde{P}}\left(\bar{c}, \bar{h}\right) \stackrel{def}{=} Prob_{\widetilde{P}}\left(\bar{h} \triangle \bar{c}\right)$$

CHYBOU HYPOTÉZY $\bar{h}$ VŮČI KONCEPTU $\bar{c}$ *při pravděpodobnosti* $\widetilde{P}$ *(symbol* $\bar{h} \triangle \bar{c}$ *označuje symetrickou diferenci množin* $\bar{h}$ *a* $\bar{c}$, *t.j.* $\bar{h} \triangle \bar{c} = \left(\bar{c} \dot{-} \bar{h}\right) \cap \left(\bar{h} \dot{-} \bar{c}\right)$*).*

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

" $\bar{h}$ by měla aproximovat $\bar{c}$ "

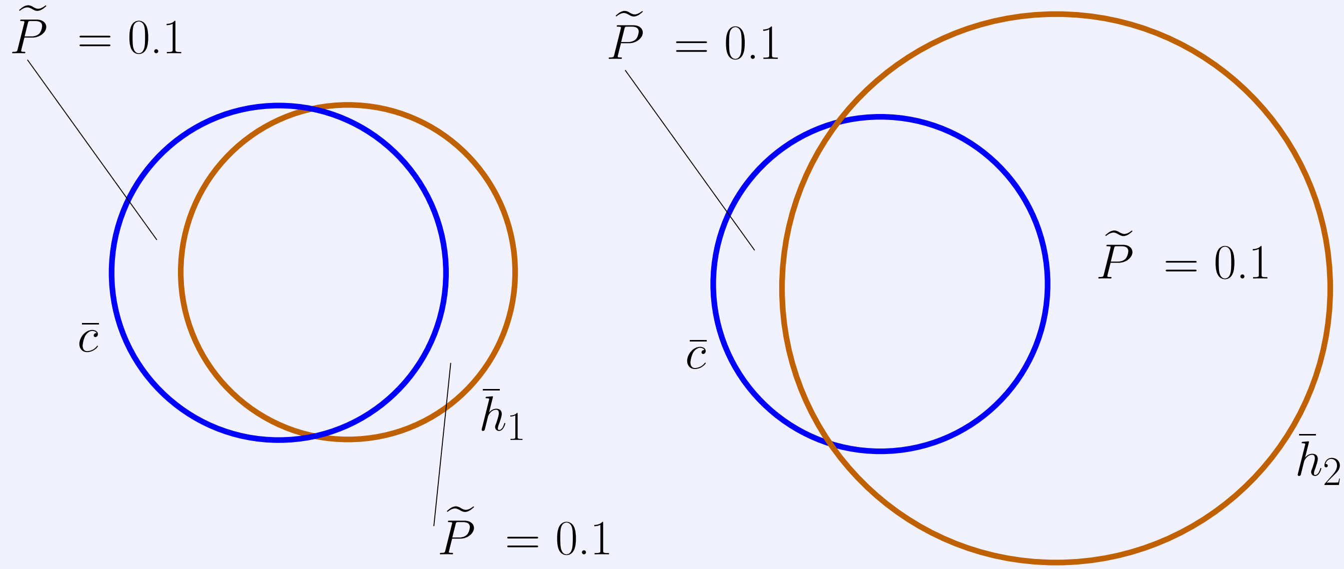

Figure 6: Příklad dvou hypotéz se stejnou chybou.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť* $\breve{x} \stackrel{def}{=} \{x_1, \ldots, x_m\}$, $x_i \in \bar{X}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\vec{\boldsymbol{z}} \in \{-1, +1\}^m$ *a nechť* $\bar{c} \subset \bar{X}$. *Potom uspořádaná dvojice* $\left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right)$ *je* VZOREK KONCEPTU $\bar{c}$ DÉLKY m *právě když*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\})\,((x_i \in \bar{c}) \Leftrightarrow (\vec{\boldsymbol{z}}_i = 1)).$$

Pro třídu konceptů C *definujme* PROSTOR VZORKŮ TŘÍDY KONCEPTŮ *jako*

$$\bar{S}_{\mathsf{C}} \stackrel{def}{=} \bigcup_{m \geq 1} \left\{ \bigcup_{\bar{c} \in \mathsf{C}} \left\{ \left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right) \,\middle|\, \left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right) \text{ je vzorek délky } m \text{ konceptu } \bar{c} \right\} \right\}.$$

Množina $\bar{b} \subset \bar{X}$ *je* KONZISTENTNÍ MNOŽINA *se vzorkem* $\left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right)$ *právě když pro všechna* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *platí* $\left(x_i \in \bar{b} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{z}}_i = 1\right)$.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Definice. *Nechť funkce* $\widetilde{m}(\epsilon, \delta)$ *zobrazuje množinu* $(0,1) \times (0,1)$ *do množiny přirozených čísel a nechť* H *je třída hypotéz pro třídu konceptů* C *definovanou nad množinou* $\bar{X}$ *. Potom* UČICÍ ALGORITMUS SLOŽITOSTI $\widetilde{m}(\epsilon, \delta)$ *třídy konceptů* C *je každé zobrazení* $\widetilde{\mathrm{A}^*} : \bar{S}_{\mathsf{C}} \to \mathsf{H}$ *takové, že pro všechny* $\bar{c} \in \mathsf{C}$*, pro všechna* $0 < \epsilon < 1$*,* $0 < \delta < 1$ *a pro libovolnou pravděpodobnost* $\widetilde{P}$ *definovanou na* $\bar{X}$ *je pravděpoddobnost množiny*

$$\left\{ \breve{x} \in \bar{X}^m \,\middle|\, \left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right) \text{ je vzorek } \bar{c} \quad \text{a} \quad \mathsf{e}_{\widetilde{P}}\left(\bar{c}, \widetilde{\mathrm{A}^*}\left(\left(\breve{x}, \vec{\boldsymbol{z}}\right)\right)\right) \geq \epsilon \right\}$$

menší než číslo δ*. Jestli-že takovýto algoritmus existuje, říkáme že* C JE UNIFORMNĚ NAUČITELNÁ *podle třídy hypotéz* H *. Každý takovýto algoritmus nazveme* (ϵ, δ)-UČICÍ ALGORITMUS .

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz

Tvrzení. *Nechť* C *netriviální, dobře utvořená třída konceptů. Potom platí následující:*

1. *Je-li* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) = d$ *a* $d < \infty$ *tak*

   (a) *pro* $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ *neexistuje* (ϵ, δ)*-učící algoritmus, který použije méně než*

   $$\max\left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\ln\left(\frac{1}{\delta}\right), d\left(1 - 2\left(\epsilon\left(1-\delta\right)+\delta\right)\right)\right) \tag{10}$$

   učících vzorů.

   (b) *pro libovolné* $0 < \epsilon < 1$ *každý učící algoritmus, který použije alespoň*

   $$\max\left(\frac{4}{\epsilon}\log_2\left(\frac{2}{\delta}\right), \frac{8d}{\epsilon}\log_2\left(\frac{12.611}{\epsilon}\right)\right) \tag{11}$$

   učících vzorů a vždy generuje konzistentní hypotézu je (ϵ, δ)*-učící algoritmus.*

2. C *je uniformně naučitelná právě když* $\mathtt{VC}_{dim}(\mathsf{C}) < \infty$*.*

Bez důkazu.

Prezentace z přednášky Neuronové sítě II.

zimní semestr 2018/2019, KM FJFI ČVUT

přednášející: František Hakl, hakl@cs.cas.cz