10 Paritní OBDD

Paritní OBDD je nedeterministické OBDD, což znamená, že výpočet může mít v některých situacích více možných pokračování. Pro jeden vstup tedy může existovat více přijímajících výpočtů. Pro nedeterministické výpočty je třeba ještě specifikovat, kdy je vstup přijat. V případě paritních OBDD se vstup považuje za přijatý, pokud pro něj existuje lichý počet výpočtů, které vedou z počátečního do koncového uzlu. Přesná definice paritního π-OBDD je následující.

Definice 10.1 Paritní π-OBDD je acyklický orientovaný graf, jehož uzly a hrany mohou být labelovány následujícím způsobem:
1. Uzly mohou být nelabelované nebo labelované některou proměnnou.
2. Právě jeden nelabelovaný uzel je označen jako počáteční.
3. Pokud graf obsahuje další uzly, pak je právě jeden další nelabelovaný uzel označen jako koncový.
4. Počet hran vycházejících z jednoho uzlu není omezen.
5. Hrany z nelabelovaného uzlu jsou nelabelované.
6. Hrany z uzlu labelovaného x_i jsou labelované buď x_i nebo $\neg x_i$.
7. Pokud dvě hrany spojují tutéž dvojici uzlů, pak musí být obě labelované a mít různé labely.
8. Labely uzlů na libovolné orientované cestě v diagramu tvoří podposloupnost $x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}$.

Hranu v paritním π-OBDD nazveme konsistentní s daným vstupem, jestliže je buď nelabelovaná nebo je labelovaná literálem, který je pro daný vstup splněn. Paritou přirozeného čísla rozumíme jeho zbytek při dělení dvěma.

Definice 10.2 Přijímající cesta pro daný vstup v paritním π-OBDD je libovolná cesta z počátečního uzlu do koncového uzlu, která obsahuje pouze hrany konsistentní s daným vstupem. Hodnota reprezentované funkce pro daný vstup je rovna paritě počtu přijímajících cest pro tento vstup.

Speciálně, graf obsahující pouze počáteční uzel definuje nulovou funkci a graf, který obsahuje počáteční a koncový uzel spojené nelabelovanou hranou, definuje konstantní funkci s hodnotou 1. Velikost paritního OBDD budeme měřit počtem uzlů včetně počátečního uzlu. Pro tuto míru velikosti existuje polynomiální algoritmus, který nalezne minimální paritní π-OBDD pro danou funkci. Je třeba ovšem upozornit, že počet uzlů není pro paritní OBDD prakticky použitelnou mírou složitosti. Bitová složitost paritního OBDD odpovídá počtu hran, který může být vzhledem k počtu uzlů kvadratický. Není znám polynomiální algoritmus pro minimalizaci počtu hran.

Kromě požadavků z definice můžeme na paritní π-OBDD klást dodatečný požadavek, že každý uzel grafu je na nějaké cestě z počátečního uzlu do koncového. Vypuštěním uzlů, které tento požadavek nesplňují, se nezmění funkce, kterou graf reprezentuje.

Každému uzlu v paritního π-OBDD můžeme přiřadit funkci tak, že z počátečního uzlu vedeme hranu do v a všechny ostatní hrany z počátečního uzlu odstraníme. Funkci, kterou takto získané paritní π-OBDD počítá, označme jako f_v.

Jestliže u je libovolný nelabelovaný uzel diagramu a V množina jeho následníků, pak platí

$$f_u = \bigoplus_{v \in V} f_v.$$

Nechť u je libovolný uzel labelovaný x_i, a nechť V_0 a V_1 jsou množiny jeho následníků přes hrany labelované $\neg x_i$ a x_i v uvedeném pořadí. Pak platí

$$f_u = \bigoplus_{v \in V_0} (1 - x_i) f_v \oplus \bigoplus_{v \in V_1} x_i f_v.$$

S využitím těchto vztahů lze pro konkrétní vstup vyčíslit hodnotu funkce, kterou paritní π-OBDD reprezentuje. Postupujeme od koncového uzlu postupně až k počátečnímu uzlu a pro každý uzel vypočteme hodnotu funkce, která je uzlu přiřazena. Lze snadno ověřit, že celková složitost výpočtu je lineární v počtu hran diagramu.

10.1 Separace paritních a deterministických OBDD

Ukážeme příklad funkce, kterou lze reprezentovat polynomiálně velkým paritním OBDD, ale která vyžaduje exponenciálně velký read-once diagram a tedy také OBDD. Použijeme funkci $x_{p(x)}$, pro kterou byl dokázán exponenciální dolní odhad pro velikost read-once diagramu v kapitole 4.5. Pro použitou funkci $p(x)$ a libovolné $i = 0, \ldots, n-1$ platí, že predikát $p(x) = i$ lze testovat pomocí deterministického π-OBDD velikosti $O(n^2)$ pro libovolné uspořádání π. Označme jako $I_{p(x)=i}$ Booleovskou funkci, která je rovna 1 právě tehdy, když je splněna podmínka v indexu. Zřejmě platí $x_{p(x)} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \, I_{p(x)=i}$, protože pro každý vstup x je splněna právě jedna z podmínek $p(x) = i$. Každou z funkcí $I_{p(x)=i}$ lze vyjádřit polynomiálním deterministickým π-OBDD pro libovolné π. Z tohoto OBDD vytvoříme OBDD pro $x_i \, I_{p(x)=i}$ tím, že všechny hrany, které testují $x_i = 0$, přesměrujeme do koncového uzlu s hodnotou 0. Získané OBDD lze snadno upravit na paritní OBDD pro tutéž funkci. Jestliže paritní OBDD pro jednotlivé funkce $x_i \, I_{p(x)=i}$ spojíme do jednoho paritního OBDD, z jehož počátečního uzlu vedou hrany do původních počátečních uzlů, získáme reprezentaci $x_{p(x)}$ pomocí paritního OBDD velikosti $O(n^3)$.

Jiný příklad funkce, pro kterou jsou paritní OBDD polynomiální a deterministické OBDD je exponenciální, je funkce "parita počtu trojúhelníků v grafu".

10.2 Charakterizace velikosti paritních OBDD

Věta 10.3 *Pro každou funkci f o n proměnných a každé uspořádání π platí*

$$\text{parity-}\pi\text{-OBDD}(f) = 1 + \dim \operatorname{span} \bigcup_{i=0}^{n} S(f, \{x_{\pi(i)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}\}).$$

Důkaz. Nechť P je parity-π-OBDD pro f. Označme jako $\mathrm{func}(P)$ množinu funkcí, které jsou počítány v jednotlivých uzlech P kromě počátečního uzlu. Dále, nechť

$$H = \bigcup_{i=0}^{n} S(f, \{x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(n-1)}\}).$$

Dokážeme nejprve, že $\mathrm{span}\ \mathrm{func}(P) \supseteq H$.

Nechť $g \in S(f, \{x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(n-1)}\})$ pro nějaké i. Pak existuje částečný vstup a, který fixuje proměnné $x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(i-1)}$ a pro který platí $f|_a = g$. Uzly P, které jsou labelované proměnnými $x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(i-1)}$ změníme na nelabelované. Hrany, které z nich vycházely, změníme tak, že hrany nekonsistentní s a vypustíme a ostatní změníme na nelabelované. Získaný diagram zřejmě počítá $f|_a$. Navíc je tento diagram možné upravit tak, že nově vzniklé nelabelované uzly vypustíme a vedeme přímé hrany z počátečního uzlu do jejich následníků tak, aby se zachovala funkce, kterou diagram počítá. Přitom je potřeba vypustit také dvojice hran, které spojují stejné dva uzly. Opakováním tohoto postupu dostaneme diagram, který obsahuje jen uzly původního diagramu a ve kterém jsou změněny hrany vycházející z počátečního uzlu. Tímto způsobem vyjádříme $f|_a$ jako součet modulo 2 funkcí počítaných uzly původního diagramu, tedy $g = f|_a \in \mathrm{span}\ \mathrm{func}(P)$. Jako důsledek dostaneme, že $|P| \geq 1 + \dim \mathrm{span}\, H$, protože musíme vzít v úvahu i počáteční uzel.

K důkazu opačné nerovnosti zkonstruujeme paritní π-OBDD P tak, že $|P| = 1 + \dim \mathrm{span}\, H$. Vyjádřeme H ve tvaru $H = H_0 \cup \ldots \cup H_n$, kde H_i pro $i = 0, \dots, n-1$ jsou funkce podstatně závisející na x_i a nezávisející na předchozích proměnných. H_n je množina konstant, které jsou obsaženy v H. Z definice množiny H plyne, že pro každé i, každou funkci $g \in H_i$ a každou hodnotu $a \in \{0,1\}$ platí $g|_{x_i=a} \in \bigcup_{j=i+1}^{n} H_i$.

Pro každé $i = 0, \dots, n$ nalezneme $H_i' \subseteq H_i$ tak, že $\bigcup_{j=i}^{n} H_j'$ je bází $\mathrm{span} \bigcup_{j=i}^{n} H_j$. Tohoto lze dosáhnout tím, že vybíráme bázi $\mathrm{span}\, H$ z množin $H_n, H_{n-1}, \dots, H_0$ v uvedeném pořadí. Protože f je jediná funkce z H, která závisí na stejné množině proměnných jako funkce f, je f jediným prvkem množiny H_i v této posloupnosti, která má nejmenší index i mezi neprázdnými množinami v posloupnosti.

Prvky množin H_i' použijeme jako uzly paritního OBDD pro f. To umožňuje skutečnost, že f je prvkem první neprázdné množiny H_i' a že pro každé $i = 0, \dots, n-1$, každé $g \in H_i'$ a $a \in \{0,1\}$ je $g|_{x_i=a} \in \bigcup_{j=i+1}^{n} H_j \subseteq \mathrm{span} \bigcup_{j=i+1}^{n} H_j'$. Přidáním počátečního uzlu získáme paritní OBDD požadované velikosti. $\square$

Protože pro libovolnou množinu funkcí F platí $\dim \mathrm{span}\, F \leq |F|$, dostaneme jako důsledek, že parity-π-OBDD$(f) \leq \pi$-OBDD(f). Výše byly uvedeny příklady funkcí, pro které je rozdíl ve velikosti paritního a obyčejného π-OBDD exponenciální.

10.3 Algoritmus minimalizace

Nechť V je množina všech uzlů vstupního paritního π-OBDD P kromě počátečního, nechť V_i pro $i = 0, \dots, n-1$ je množina uzlů P, které testují proměnnou x_i, a nechť V_n je množina obsahující jen koncový vrchol. Je tedy $V = V_0 \cup \ldots \cup V_n$.

K popisu algoritmu použijeme též množiny subfunkcí H a H_i pro $i = 0, \ldots, n$ z důkazu Věty 10.3.

Algoritmus se skládá ze dvou fází. Pro jeho popis budeme pro jednoduchost ztotožňovat uzel v v diagramu a funkci f_v, kterou počítá. V první fázi algoritmus vybere pro každé $i = n, n-1, \ldots, 0$ (v tomto pořadí) podmnožinu $V_i' \subseteq V_i$ tak, že pro každé $i = 0, \ldots, n$ je $\bigcup_{j=i}^n V_j'$ bází span $\bigcup_{j=i}^n V_j$. Při hledání V_i' přitom využíváme toho, že $\bigcup_{j=i+1}^n V_j'$ je bází, která byla nalezena v předchozích krocích algoritmu. Pro jednoduchost ji budeme zapisovat jako $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$. Funkce počítané ve vrcholech V_i vyjádříme jako lineární kombinace $2m$ funkcí ze seznamu $x_i g_1, x_i g_2, \ldots, x_i g_m, \bar{x}_i g_1, \bar{x}_i g_2, \ldots, \bar{x}_i g_m$ (připomeňme, že $\bar{x}_i$ je alternativní označení pro $\neg x_i$). Kromě funkcí ve vrcholech V_i vyjádříme též funkce g_j ve tvaru $g_j = x_i g_j + \bar{x}_i g_j$. Získáme matici rozměru $(m + |V_i|) \times (2m)$, ve které pomocí Gaussovy eliminace vybereme bázi řádkového prostoru obsahující všechny řádky odpovídající funkcím g_j a některé řádky odpovídající funkcím z V_i. Řádky odpovídající funkcím z V_i určují množinu V_i'.

Protože lineární obal funkcí počítaných v uzlech V_i' pro $i = 0, \ldots, n$ je stejný jako lineární obal func(P), obsahuje funkci f. Vytvoříme paritní OBDD, jehož uzly budou uzly z množin V_i' a počáteční uzel spojený hranami s uzly, které dávají v součtu funkci f. Toto paritní OBDD počítá stejnou funkci jako P, ale jeho uzly reprezentují lineárně nezávislé funkce. Získané OBDD však ještě nemusí být minimální, protože příslušný prostor funkcí může obsahovat i funkce mimo H. Abychom tyto nadbytečné funkce eliminovali, provedeme druhou fázi algoritmu.

Ve druhé fázi postupujeme v pořadí $i = 0, \ldots, n$ a konstruujeme V_i'' tak, že získané OBDD je ekvivalentní původnímu, ale $V_i'' \subseteq$ span H. Jestliže jsou již zkonstruovány množiny $V_1'', V_2'', \ldots, V_{i-1}''$, pak V_i'' zkonstruujeme tak, že nejprve vytvoříme množinu W_i, která obsahuje dost funkcí k tomu, aby mohla nahradit V_i' v OBDD, splňuje $W_i \subseteq$ span H, ale nemusí být lineárně nezávislá. Z množiny W_i pak vybereme pomocí Gaussovy eliminace lineárně nezávislou podmnožinu stejně jako v první fázi algoritmu a označíme ji V_i''.

Množina W_i bude obsahovat nejvýše $2(\sum_{j=0}^{i-1} |V_j'|)$ prvků a zkonstruujeme ji tak, že pro každou funkci $g \in V_j'$ pro každé $j < i$ vyjádříme $g|_{x_j=0}$ i $g|_{x_j=1}$ jako lineární kombinaci funkcí z $\bigcup_{k=j+1}^{i-1} V_k'$ a nejvýše jedné funkce ze span $\bigcup_{k=i}^n V_i'$. Právě tuto poslední funkci přidáme do W_i, což lze chápat tak, že vytvoříme uzel testující x_i a vhodně zvolíme množinu jeho následníků přes hrany labelované x_i a $\neg x_i$. Lze snadno ověřit, že uzel přidaný do W_i počítá funkci ze span H.

Po vytvoření množiny W_i odstraníme z OBDD všechny hrany z uzlů V_j'' pro $j < i$, které vedly do V_i', a místo nich vytvoříme hrany do uzlů W_i tak, aby se funkce počítaná diagramem nezměnila. Pak můžeme vypustit všechny vrcholy V_i' a vytvořit množinu V_i'' výběrem vhodných uzlů z W_i, jak bylo řečeno výše.

Tím je algoritmus popsán. Jeho správnost lze dokázat na základě jeho popisu.